О ДИССИПАТИВНОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ю. Н. Бибиков, К. Д. Сановский

(Ленинград)

Получены достаточные условия диссипативности уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + f(x^{\cdot}, x) + g(x) = e(t) \tag{1}$$

Это уравнение называется диссипативным [1], если для любого его решения функции $x(t)$ и $x^{\cdot}(t)$ равномерно финально ограничены при $t \to \infty$. Найденные условия отличаются от известных ранее [1,2] тем, что в этих условиях функции f и g могут быть ограниченными и сколь угодно малыми по сравнению с силовым членом $e(t)$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия.

1) Кусочно-непрерывные функции $f(z, x)$, $g(x)$, $e(t)$ определены при всех значениях $x, z \in (-\infty, \infty)$, $t \in [0, \infty)$ и обеспечивают существование решения уравнения (1) в любой точке фазовой плоскости $xx^{\cdot}$ при любом $t \geqslant 0$.

2) $e(t) = e_1(t) + e_2(t), \qquad |e_1(t)| \leqslant e_{10} < \infty$

$$E_2(t) = \int_0^t e_2(t)\,dt, \qquad |E_2(t)| \leqslant E_{20} < \infty$$

3) Существуют неубывающие кусочно-непрерывные функции φ и ψ такие, что

$$\varphi(z) \leqslant f(z, x) \leqslant \psi(z), \qquad x, z \in (-\infty, \infty), \quad z\varphi(z) \geqslant 0, \quad z\psi(z) \geqslant 0$$

$$e_{10} < \sup \varphi(z), \quad -e_{10} > \inf \psi(z)$$

4) $xg(x) \geqslant 0$

$$\varliminf_{x\to\infty} g(x) - e_{10} > -\varphi(-2E_{20} - 0) \geqslant 0, \qquad \varlimsup_{x\to-\infty} g(x) + e_{10} < -\psi(2E_{20} + 0) \leqslant 0$$

5) $|g(x)| \leqslant g_0 < \infty$

Тогда уравнение (1) диссипативно.

Доказательство 1°. Вместо уравнения (1) будем изучать эквивалентную систему

$$\dot{x} = y + E_2(t), \qquad y^{\cdot} = -f(y + E_2(t), x) - g(x) + e_1(t) \tag{2}$$

Пусть

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} = \frac{-f(y + E_2, x) - g(x) + e_1(t)}{y + E_2}$$

Рассмотрим на плоскости xy кривые

$$\Gamma(H, \alpha) = \{(x, y) : {}^1\!/_2 y^2 + G(x) + \alpha x = H = \text{const}\}, \qquad G(x) = \int_0^x g(x)\,dx$$

$$-\infty < \alpha, H < \infty$$

Вдоль них

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Gamma} = -\frac{g(x) + \alpha}{y}$$

В силу условий 3) и 5) теоремы существует число $b > E_{20}$ такое, что

$$y[\varphi(y - E_{20}) - e_{10}] - g_0 E_{20} > 0 \qquad (y \geqslant b)$$
$$y[\psi(y + E_{20}) + e_{10}] - g_0 E_{20} > 0 \qquad (y \leqslant -rb)$$

Выберем α_0 из условий

$$0 < \alpha_0 \leqslant \frac{b\,[\varphi\,(b - E_{20}) - e_{10}] - g_0 E_{20}}{b + E_{20}}$$
$$0 < \alpha_0 \leqslant \frac{-b\,[\psi\,(-b + E_{20}) + e_{10}] - g_0 E_{20}}{b + E_{20}}$$

Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Gamma(H,\alpha_0)} \geqslant \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} \quad (y \geqslant b), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Gamma(H,-\alpha_0)} \geqslant \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} \quad (y \leqslant -b) \tag{3}$$

2°. Из условия 4) теоремы следует, что $G\,(x)$ не убывает при $x \geqslant 0$ и не возрастает при $x \leqslant 0$. Кроме того

$$G\,(x) \geqslant 0, \quad G\,(0) = 0, \quad \lim G\,(x) = \infty \quad \text{при } x \to \pm\infty \tag{4}$$

Образуем функции

$$m\,(C) = \max\,\{x\colon G\,(x) = C\}, \qquad n\,(C) = \min\,\{x\colon G\,(x) = C\}, \qquad C \geqslant 0$$
$$\mu\,(C) = \max\,\{x\colon G\,(x) + \alpha_0 x = C\}, \qquad \inf\,\{G\,(x) + \alpha_0 x\} \leqslant C < \infty$$
$$\nu\,(C) = \min\,\{x\colon G\,(x) - \alpha_0 x = C\}, \qquad \inf\,\{G\,(x) - \alpha_0 x\} \leqslant C < \infty$$

В силу (4) $m\,(C)$ и $\mu\,(C)$ — строго возрастающие, а $n\,(C)$ и $\nu\,(C)$ — строго убывающие функции;

$$m\,(C) \geqslant 0, \quad n\,(C) \leqslant 0, \quad \mu\,(0) = \nu\,(0) = 0$$
$$m\,(C) \to \infty, \quad n\,(C) \to -\infty, \quad \mu\,(C) \to \infty, \quad \nu\,(C) \to -\infty \quad \text{при } C \to \infty$$

Рассмотрим при $C \geqslant 0$ разности $m\,(C) - \mu\,(C)$ и $\nu\,(C) - n\,(C)$. Используя равенство

$$G\,(\mu\,(C)) + \alpha_0\mu\,(C) = C = G\,(m\,(C))$$

и условие 5) теоремы, находим

$$\alpha_0\mu\,(C) = G\,(m) - G\,(\mu) \leqslant g_0\,(m - \mu)$$

Отсюда следует, что

$$m\,(C) - \mu\,(C) \to \infty \quad \text{при } C \to \infty \tag{5}$$

Аналогично доказывается соотношение

$$\nu\,(C) - n\,(C) \to \infty \quad \text{при } C \to \infty \tag{6}$$

3°. Положив $\varkappa\,(x', x''; \alpha) = \max\,\{G\,(\xi) + \alpha\xi\}$, $\xi \in [x', x'']$, рассмотрим при $C \geqslant 0$ функции

$$\sigma\,(x; C) = \sqrt{2}\,\sqrt{{}^1\!/_2\, b^2 + \varkappa\,(n, x; \alpha_0) - G\,(x) - \alpha_0 x}\,, \quad x \geqslant n\,(C)$$
$$\tau\,(x; C) = -\sqrt{2}\,\sqrt{{}^1\!/_2\, b^2 + \varkappa\,(x, m; -\alpha_0) - G\,(x) + \alpha_0 x}\,, \quad x \leqslant m\,(C)$$

Очевидны неравенства

$$\sigma\,(x;\; C) \geqslant b, \qquad \tau\,(x;\; C) \leqslant -b$$

Так как $G\,(x) + \alpha x$ непрерывна по x, то $\varkappa\,(x', x''; \alpha)$ непрерывна по x' и x''. Поэтому функции σ и τ непрерывны по x.

Пусть теперь

$$k\,(C) = \min\,\{x'\colon x \geqslant x' \geqslant n\,(C) \Rightarrow \varkappa\,(n,\; x;\; \alpha_0) = G\,(x) + \alpha_0 x\}$$
$$l\,(C) = \max\,\{x'\colon x \leqslant x' \leqslant m\,(C) \Rightarrow \varkappa\,(x,\; m;\; -\alpha_0) = G\,(x) - \alpha_0 x\}$$

Функции $k\,(C)$ и $l\,(C)$ характеризуются тем, что

$$k\,(C) = \min\,\{x'\colon x \geqslant x' \geqslant n\,(C) \Rightarrow \sigma\,(x;\; C) = b\}$$
$$l\,(C) = \max\,\{x'\colon x \leqslant x' \leqslant m\,(C) \Rightarrow \tau\,(x;\; C) = -b\}$$

Непосредственно из определения $k(C)$ и $l(C)$ имеем

$$G(k) + \alpha_0 k = \max_{\xi \in [n, k]} \{G(\xi) + \alpha_0 \xi\} \leqslant \max_{\xi \in [n, 0]} \{G(\xi) + \alpha_0 \xi\} \leqslant G(n) = C$$

$$G(l) - \alpha_0 l = \max_{\xi \in [l m]} \{G(\xi) - \alpha_0 \xi\} \leqslant \max_{\xi \in [0, m]} \{G(\xi) - \alpha_0 \xi\} \leqslant G(m) = C$$

Отсюда следует, что

$$k(C) \leqslant \mu(G(k) + \alpha_0 k) \leqslant \mu(C), \qquad l(C) \geqslant \nu(G(l) - \alpha_0 l) \geqslant \nu(C)$$

А тогда, используя (5) и (6), приходим к утверждению

$$m(C) - k(C) \to \infty, \quad l(C) - n(C) \to \infty \text{ при } C \to \infty \tag{7}$$

4°. Рассмотрим на плоскости xy взаимное расположение траекторий системы (2) и кривых

$$\Sigma(C) = \{(x, y) \colon x \geqslant n(C),\ y = \sigma(x; C)\}$$

$$T(C) = \{(x, y) \colon x \leqslant m(C),\ y = \tau(x; C)\}$$

Функции $\varkappa(n, x; \alpha_0)$ и $\varkappa(x, m; -\alpha_0)$ имеют кусочно-непрерывные производные. Поэтому

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_\Sigma = \frac{d\sigma}{dx} = \begin{cases} -(g(x) + \alpha_0)/y & \text{при } d\varkappa(n, x; \alpha_0)/dx = 0 \\ 0 & \text{при } d\varkappa(n, x; \alpha_0)/dx = g(x) + \alpha_0 > 0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_T = \frac{d\tau}{dx} = \begin{cases} -(g(x) - \alpha_0)/y & \text{при } d\varkappa(x, m; -\alpha_0)/dx = 0 \\ 0 & \text{при } d\varkappa(x, m; -\alpha_0)/dx = g(x) - \alpha_0 < 0 \end{cases}$$

Тогда с учетом (3) вдоль кривых Σ и T получаем неравенства

$$\begin{gathered} \left.\frac{dy}{dx}\right|_\Sigma \geqslant -\frac{g(x) + \alpha_0}{y} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Gamma(^1/_2 y^2 + G(x) + \alpha_0 x;\, \alpha_0)} \geqslant \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_T \geqslant -\frac{g(x) - \alpha_0}{y} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Gamma(^1/_2 y^2 + G(x) - \alpha_0 x;\, -\alpha_0)} \geqslant \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2)} \end{gathered} \tag{8}$$

5°. Согласно условию 4) теоремы существует число $a > 0$ такое, что

$$B = \inf_{|x| \geqslant a} \{|g(x)| - e_{10}\} > 0, \quad \varphi(-2E_{20} - 0) > -B, \quad \psi(2E_{20} + 0) < B \tag{9}$$

Рассмотрим в области $x \geqslant a$, $-E_{20} \leqslant y \leqslant b$ кривые $\Phi(x_0)$, определяемые дифференциальной системой

$$x^{\cdot} = y + E_{20}, \quad y^{\cdot} = -\varphi(y - E_{20}) - B; \qquad t = t_0 \quad x = x_0, \quad y = b$$

Интегрируя эту систему, находим, что

$$\Phi(x_0) = \left\{(x, y) : x - x_0 = \int\limits_{y - E_{20}}^{b - E_{20}} \frac{z + 2E_{20}}{\varphi(z) + B}\, dz\right\}$$

Из (9) и условия 3) теоремы видно, что вдоль кривых $\Phi(x_0)$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \left.\frac{dx}{dt}\right|_\Phi \geqslant 0, \qquad \left.\frac{dx}{dy}\right|_\Phi \leqslant 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{(2)} \leqslant \left.\frac{dx}{dt}\right|_\Phi \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{(2)} \leqslant \left.\frac{dy}{dt}\right|_\Phi \leqslant -\varphi(-2E_{20} - 0) - B < 0 \end{gathered} \tag{10}$$

Тогда

$$\Delta_1 = \max(x - x_0) = \int\limits_{-2E_{20}}^{b-E_{20}} \frac{z + 2E_{20}}{\varphi(z) + B} dz$$

Аналогично, рассматривая в области $x \leqslant -a$, $-b \leqslant y \leqslant E_{20}$ систему

$$x^{\cdot} = y - E_{20}, \quad y^{\cdot} = -\psi(y + E_{20}) + B; \qquad t = t_0 \quad x = x_0, \quad y = -b$$

получаем семейство кривых

$$\Psi(x_0) = \left\{ (x, y) : x_0 - x = \int\limits_{-b+E_{20}}^{y+E_{20}} \frac{-z + 2E_{20}}{-\psi(z) + B} dz \right\}$$

вдоль которых

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\Psi} \leqslant 0, \qquad \left.\frac{dx}{dy}\right|_{\Psi} \leqslant 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{(2)} \geqslant \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\Psi} \tag{11}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(2)} \geqslant \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\Psi} \geqslant -\psi(2E_{20} + 0) > 0$$

$$\Delta_2 = \max(x_0 - x) = \int\limits_{-b+E_{20}}^{2E_{20}} \frac{-z + 2E_{20}}{-\psi(z) + B} dz$$

6°. В этом пункте на плоскости xy будет построена область, в которую входят все траектории системы (2). Пусть

$$C_1 = G(a + \Delta_1), \qquad C_2 = G(-a - \Delta_2)$$

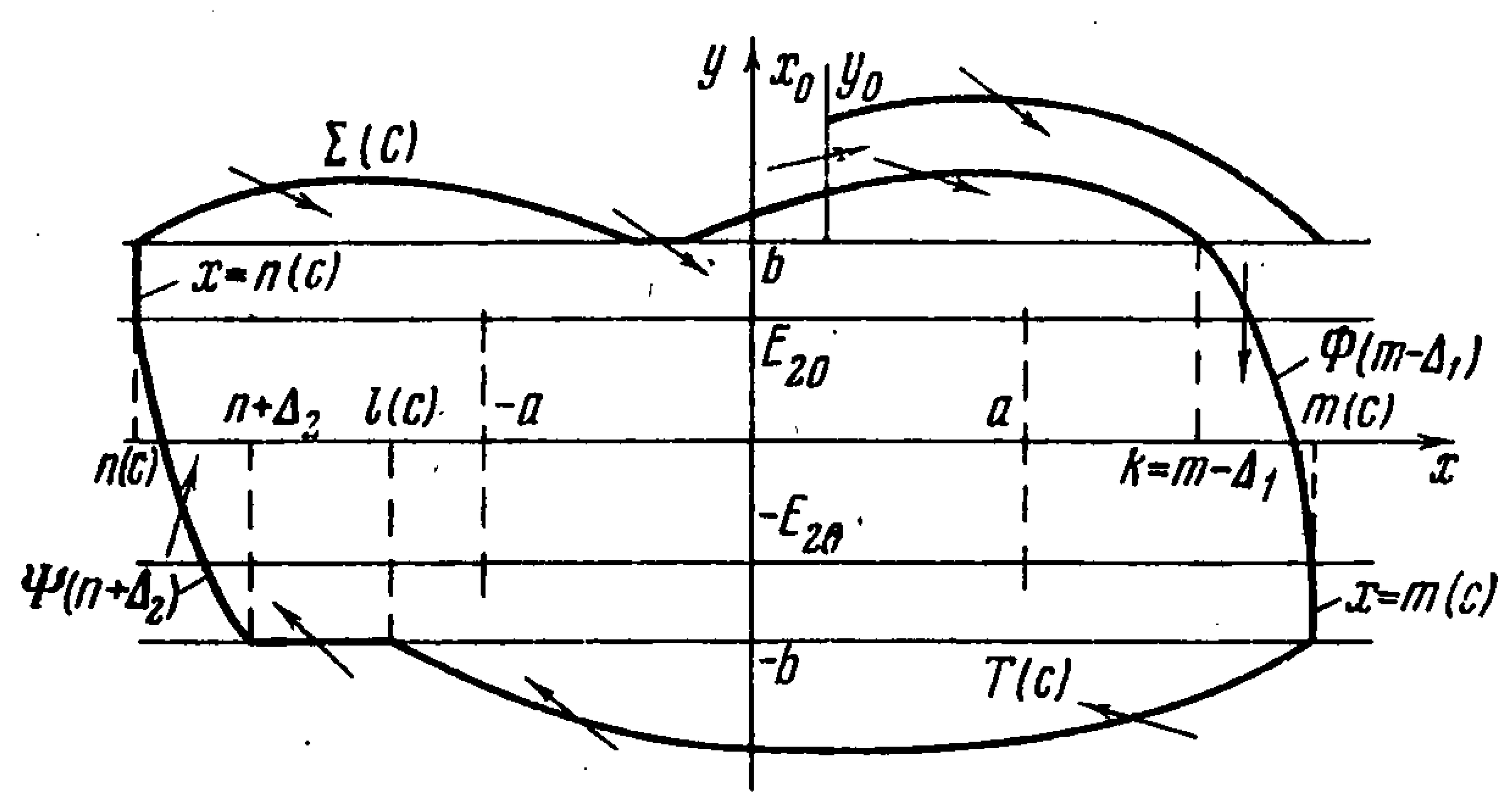
На основании (7) можно выбрать такие C_3 и C_4, что

$$C_3 = \min\{C' : C \geqslant C' \Rightarrow m(C) - k(C) \geqslant \Delta_1\}$$
$$C_4 = \min\{C' : C \geqslant C' \Rightarrow l(C) - n(C) \geqslant \Delta_2\}$$

Затем полагаем $C_5 = \max(C_1, C_2, C_3, C_4)$. В силу этого для всех $C \geqslant C_5$ справедливы соотношения

$$m(C) - \Delta_1 \geqslant a, \qquad \sigma(m(C) - \Delta_1;\ C) = b$$
$$n(C) + \Delta_2 \leqslant -a, \qquad \tau(n(C) + \Delta_2;\ C) = -b$$

Каждому значению $C \geqslant C_5$ сопоставим некоторую замкнутую кривую $\omega(C)$, получающуюся при пересечении следующих кривых: $\Sigma(C)$, $\Phi(m(C) - \Delta_1)$, $x = m(C)$, $T(C)$, $\Psi(n(C) + \Delta_2)$, $y = n(C)$ (см. фигуру). Замкнутые области плоскости xy, ограниченные кривыми $\omega(C)$, обозначаем через $\Omega(C)$. Из (9) следует, что для $|x| \geqslant a$ функции $m(C)$ и $n(C)$ непрерывны, а потому семейство кривых $\omega(C)$ также непрерывно и заполняет область $\Omega(C^*) \setminus \Omega(C_5)$ для $C^* \geqslant C_5$



Траектория, выйдя из произвольной точки (x_0, y_0), через конечный отрезок времени попадает в полосу $-b \leqslant y \leqslant b$, т. е. оказывается в некоторой области $\Omega(C)$. Действительно, пусть для определенности $y_0 > b$. Так как $G(x) + \alpha_0 x \to \infty$ при $x \to \infty$, то кривая $\Gamma(^1/_2 y_0^2 + G(x_0) + \alpha_0 x_0;\ \alpha_0)$ при $x > x_0$ пересекает прямую $y = b$, а тогда в силу (3) и неравенства $b > E_{20}$ траектория также пересекает эту прямую и попадает в полосу $-b \leqslant y \leqslant b$.

Из неравенств (8), (10), (11) и $|E_2(t)| \leqslant E_{20}$ следует, что траектории пересекают кривые $\omega(C)$ снаружи внутрь области $\Omega(C)$ для любого $C \geqslant C_5$. Следовательно, в области $\Omega(C^*) \setminus \Omega(C_5)$ $(C^* \geqslant C_5)$ величина C монотонно убывает вдоль траекторий. Если при этом допустить существование предела $C^+ \geqslant C_5$, то это будет означать, что траектория навивается снаружи на кривую $\omega(C^+)$. В частности, в области $x \geqslant a$, $-E_{20} > y > -b$ функция $x^{\cdot}|_{(2)}$ становится как угодно близкой к нулю. Однако это противоречит первому уравнению системы (2) и неравенству $|E_2(t)| \leqslant E_{20}$.

Итак, все траектории системы (2) с течением времени попадают в область $\Omega(C_5)$ и в дальнейшем остаются в ней. Этим доказательство теоремы завершается.

Замечание. В условиях теоремы требование $|g(x)| \leqslant g_0 < \infty$ существенно. Так, для уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + \operatorname{sign} x^{\cdot} + x = \sin t$$

утверждение теоремы несправедливо [3].

Поступила 2 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.— Л., «Наука», 1964.
2. Reissig R., Sansone G., Conti R. Qualitative theorie nichtlineare differentialgleichungen. Roma, Edizioni cremoneze, 1963.
3. Иориш Ю. И. Измерение вибраций М., Машгиз, 1956.

О БИФУРКАЦИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ «СШИТОГО ФОКУСА»

Н. А. Губарь (Горький)

Приводятся условия существования и бифуркаций особой точки типа «сшитого фокуса», сшиваемого из обыкновенных траекторий в предположении, что известны общие интегралы обеих систем, образующих «сшитую систему».

При аппроксимациях аналитических характеристик в уравнениях движения динамических систем кусочно-линейными или релейными функциями на линиях сшивания могут возникать особые точки, сшитые из обыкновенных или особых траекторий сшиваемых систем. При изменении параметров системы здесь возникают аналоги бифуркаций, известных для систем с аналитическими правыми частями (рождение предельных циклов из сшитого фокуса, от сшитой петли сепаратрисы и т. д.).

Пусть линия сшивания будет $x = 0$ и в плоскости xy определена система

$$\frac{dx}{dt} = P_i(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_i(x, y) \quad (i = 1,2) \tag{1}$$

$$i = 1 \text{ для } x < 0, \quad i = 2 \text{ для } x > 0$$

Нетрудно показать, что расположение траекторий в окрестности начала координат будет таким, как на фиг. 1 ($Q_1(0, 0) > 0$) или фиг. 2 ($Q_1(0, 0) < 0$), и начало координат будет особой точкой типа «сшитого фокуса», если потребовать выполнение следующих условий:

$$P_1(0, 0) = P_2(0, 0) = 0$$

$$\frac{P_{1y}'(0, 0)}{Q_1(0, 0)} > 0, \quad \frac{P_{2y}'(0, 0)}{Q_2(0, 0)} < 0, \quad Q_1(0, 0)\, Q_2(0, 0) < 0 \tag{2}$$

Условия, при которых сшитый фокус является устойчивым или неустойчивым будут получены далее. Пусть

$$F_1(x, y) = C_1 \quad (x < 0), \qquad F_2(x, y) = C_2 \qquad (x > 0)$$