О РАЗРЫВАХ НАПРЯЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ СЖИМАЕМОГО ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

И. С. Дегтярев

(Свердловск)

Рассматриваются сильные разрывы напряжений и скоростей деформации в сжимаемом жестко-пластическом теле.

Для произвольного условия пластичности, зависящего от первого инварианта тензора напряжений, получены видоизменения соотношений [1] на поверхности разрыва напряженного состояния.

В качестве приложения полученных соотношений рассмотрено обобщенное условие предельного равновесия Губера — Мизеса [2].

Определены ограничения на разрывы компонент тензора скоростей деформации.

1. Рассмотрим трехмерное жестко-пластическое тело, предельное состояние которого определено в виде

$$f(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3) = 0 \qquad (\sigma = {}^1/_3\sigma_{ii}) \tag{1.1}$$

Здесь σ — первый инвариант тензора напряжений, Σ_2, Σ_3 — соответственно второй и третий инварианты девиатора напряжений.

Ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda\partial f / \partial\sigma_{ij} \qquad (\lambda \geqslant 0) \tag{1.2}$$

Здесь λ — неопределенный множитель, $u_{i,j}$ — частная производная от проекции скорости перемещения по координате x_j.

Из (1.2) следует [3]

$$\varepsilon_{ii} = \lambda\partial f / \partial\sigma \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) определяет «ассоциированную» сжимаемость материала.

Предположим, что в изотропном жестко-пластическом теле существует поверхность S, которая является поверхностью разрыва напряженного состояния.

Контактирующие напряжения на поверхности S должны быть непрерывны. Тогда из условий равновесия следует

$$[\sigma_{ij}]\nu_j = 0 \qquad ([\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \tag{1.4}$$

Здесь верхние индексы плюс и минус есть значения напряжений на различных сторонах поверхности S; единичная нормаль к этой поверхности ν_j.

Напряженное состояние на каждой из сторон поверхности S должно удовлетворять условию предельного состояния (1.1). Откуда следует, что

$$[f(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3)] = f(\sigma^+, \Sigma_2^+, \Sigma_3^+) - f(\sigma^-, \Sigma_2^-, \Sigma_3^-) = 0 \tag{1.5}$$

Допустим, что компоненты тензора ε_{ij} претерпевают разрыв при переходе через поверхность S. Тогда геометрические условия совместности на поверхности разрыва примут вид [1]

$$[\varepsilon_{ij}] = {}^1/_2(\lambda_i\nu_j + \lambda_j\nu_i) = [\lambda P_{ij}], \qquad \lambda_i = [u_{i,j}]\nu_j, \qquad P_{ij} = \partial f / \partial\sigma_{ij} \tag{1.6}$$

Покажем, следуя [4], что для выпуклых условий текучести на поверхности разрыва напряжений в сжимаемом теле скорости пластической деформации обращаются в нуль.

Для этого определим в точке поверхности S локальную систему координат такую, что нормаль ν_j к S совпадает с направлением оси x_3, тогда

$$\nu_1 = \nu_2 = 0, \qquad \nu_3 = 1 \tag{1.7}$$

В локальной системе координат (1.7) соотношения (1.4) и (1.6) соответственно дают равенства

$$[\sigma_{13}] = [\sigma_{23}] = [\sigma_{33}] = 0, \qquad [\varepsilon_{11}] = [\varepsilon_{12}] = [\varepsilon_{22}] = 0 \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.8) следует, что на поверхности S имеет место равенство

$$[\sigma_{ij}]\,[\varepsilon_{ij}] = 0 \tag{1.9}$$

С другой стороны, для выпуклых поверхностей текучести из принципа максимума скорости диссипации механической энергии следует

$$[\sigma_{ij}]\,[\varepsilon_{ij}] > 0 \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.9) и (1.10), заключаем, что на поверхности разрыва напряжений справедливы равенства

$$\varepsilon_{ij}^{+} = \varepsilon_{ij}^{-} = 0 \tag{1.11}$$

В работе [1] показано, что в этом случае $[u_{i,j}] = 0$ и на поверхности S выполняются соотношения

$$[a_{ij}] = {}^1/_2\,(c_i\nu_j + c_j\nu_i) = [\psi P_{ij}]$$

$$a_{ij} = \varepsilon_{ij,k\ldots l}\nu_k\ldots\nu_l, \quad c_i = [u_{i,jk\ldots l}]\,\nu_j\nu_k\ldots\nu_l, \quad \psi = \lambda_{,k\ldots l}\nu_k\ldots\nu_l \tag{1.12}$$

Для определения величин c_i умножим соотношения (1.12) на ν_j и просуммируем по повторяющимся индексам. Тогда будем иметь

$$c_i = 2\,[\psi P_{ij}]\,\nu_j - [\psi P_{kk}]\,\nu_i, \qquad [\psi P_{kk}] = [a_{kk}] = c_k\nu_k \tag{1.13}$$

Так как материал предполагается пластически сжимаемым, то величина $[\psi P_{kk}]$ не должна обращаться в нуль на поверхности разрыва S.

Соотношения (1.12) после подстановки в них величин c_i, определенных в (1.13), принимают вид

$$[\psi P_{ik}]\,\nu_k\nu_j + [\psi P_{jk}]\,\nu_k\nu_i - [\psi P_{kk}]\,\nu_i\nu_j = [\psi P_{ij}] \tag{1.14}$$

Среди всех соотношений (1.14) только три линейно независимы.

Присоединяя к (1.14) соотношения (1.4) и (1.5), получим замкнутую систему из семи уравнений для определения неизвестных σ_{ij}^- и ψ^-.

В локальной системе координат (1.7) система (1.4), (1.5), (1.14) принимает вид

$$[f(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3)] = 0, \quad [\sigma_{i3}] = 0, \quad [\psi P_{11}] = [\psi P_{12}] = [\psi P_{22}] = 0 \tag{1.15}$$

2. Исследуем соотношения (1.14) для распространенного в механике грунтов обобщенного условия предельного равновесия Губера — Мизеса

$$S_{ij}S_{ij} = 2\,(\beta - \alpha\sigma)^2 \qquad (S_{ij} = \sigma_{ij} - {}^1/_3\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad \sigma \leqslant \beta/\alpha) \tag{2.1}$$

Здесь S_{ij} — девиатор напряжений, δ_{ij} — символ Кронеккера, α и β — физические постоянные.

Соотношения (1.15) в данном случае предельного равновесия принимают вид

$$[S_{ij}S_{ij} - 2\,(\beta - \alpha\sigma)^2] = 0 \tag{2.2}$$

$$[\psi\,(3S_{11} + 2\alpha\beta - 2\alpha^2\sigma)] = 0, [\psi\,(3S_{22} + 2\alpha\beta - 2\alpha^2\sigma)] = 0, \quad [\psi S_{12}] = 0 \tag{2.3}$$

$$[\sigma_{i3}] = 0 \tag{2.4}$$

Пользуясь равенством (2.4) и свойством $S_{kk} = 0$ для диагональных компонент девиатора напряжений, соотношение (2.2) представим в виде

$$[S_{11}^2 + S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + S_{12}^2 + 2\alpha\beta\sigma - \alpha^2\sigma^2] = 0 \qquad (2.5)$$

Определяя из (2.3) компоненты σ_{ij}^- и подставляя их значения в (2.5), после преобразований получим равенство

$$(\psi^- / \psi^+)^2 = 1 \qquad (2.6)$$

Из соотношений (2.3) следует, что разрыв напряженного состояния возможен только при $\psi^- / \psi^+ = -1$, а на поверхности разрыва S выполняются соотношения

$$\sigma_{11}^- = 2\sigma_{33}^+\gamma_1 - \gamma_2 - \sigma_{11}^+, \qquad \sigma_{22}^- = 2\sigma_{33}^+\gamma_1 - \gamma_2 - \sigma_{22}^+ \qquad (2.7)$$

$$\sigma_{33}^- = \sigma_{33}^+, \qquad \sigma_{12}^- = -\sigma_{12}^+, \qquad \sigma_{13}^- = \sigma_{13}^+, \qquad \sigma_{23}^- = \sigma_{23}^+ \qquad (2.8)$$

$$\gamma_1 = (3 + 2\alpha^2) / (3 - 4\alpha^2), \qquad \gamma_2 = 12\alpha\beta / (3 - 4\alpha^2)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} могут быть выражены через три главных напряжения σ_j по формулам преобразования

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j \qquad (2.9)$$

Здесь l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы главных осей, которые между собой связаны равенствами

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \qquad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в соотношения (2.7) и учитывая равенства (2.10), получим систему из двенадцати уравнений относительно σ_1^-, σ_2^-, σ_3^-, l_i^-, m_i^-, n_i^-. Решение этой системы представляется в виде

$$\sigma_1^- = 2\sigma_{33}\gamma_1 - \gamma_2 - \sigma_1^+, \qquad \sigma_2^- = 2\sigma_{33}\gamma_1 - \gamma_2 - \sigma_2^+, \qquad \sigma_3^- = 2\sigma_{33}\gamma_1 - \gamma_2 - \sigma_3^+$$

$$\begin{aligned} &l_1^- = \pm l_1^+, && m_1^- = \pm m_1^+, && n_1^- = \mp n_1^+ \\ &l_2^- = \pm l_2^+, && m_2^- = \pm m_2^+, && n_2^- = \mp n_2^+ \\ &l_3^- = \mp l_3^+, && m_3^- = \mp m_3^+, && n_3^- = \pm n_3^- \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Таким образом, из [1] и соотношений (2.11) следует, что пластическая сжимаемость материала оказывает влияние только на величины напряжений, одноименные же главные оси остаются равнонаклонными к поверхности разрыва S и лежащими в плоскостях, проходящих через нормаль к S.

3. Предположим, что на некоторой поверхности Σ терпят разрыв скорости деформации ε_{ij}.

Выше было показано, что при выпуклых условиях текучести на поверхности разрыва напряжений в сжимаемом жестко-пластическом теле скорости деформации обращаются в нуль, т. е. непрерывны.

Следовательно, поверхность разрыва напряжений S не совпадает с поверхностью разрыва скоростей деформации Σ.

Допустим, что на поверхности Σ скорости перемещений непрерывны.

Определим ограничения на величины разрывов компонент тензора ε_{ij}, при которых система (1.6) имеет решения.

Для этого умножая соотношения (1.6) на ν_j, находим

$$\lambda_i = 2\,[\varepsilon_{ij}]\,\nu_j - [\varepsilon_{kk}]\,\nu_i \qquad (3.1$$

где ν_i — единичная нормаль к поверхности Σ.

Из условия пластической сжимаемости следует, что сумма $[\varepsilon_{kk}]$ не обращается в нуль.

Тогда система уравнений (1.6) может быть представлена в виде

$$[\varepsilon_{ij}] = [\varepsilon_{ik}]\, \nu_k\nu_j + [\varepsilon_{jk}]\, \nu_k\nu_i - [\varepsilon_{kk}]\, \nu_i\nu_j \tag{3.2}$$

В локальной системе координат (1.7) соотношения (3.2) примут вид

$$[\varepsilon_{11}] = [\varepsilon_{12}] = [\varepsilon_{22}] = 0 \tag{3.3}$$

Компоненты ε_{13}, ε_{23}, ε_{33} терпят разрыв на поверхности Σ

Выбирая оси x_i совпадающими с главными осями тензора скоростей деформации, из соотношений (3.2) получаем

$$\begin{array}{ll} [\varepsilon_{12}] = -[\varepsilon_3]\, \nu_1\nu_2 = 0, & [\varepsilon_1]\,(1 - \nu_1^2) + [\varepsilon_2]\, \nu_1^2 + [\varepsilon_3]\, \nu_1^2 = 0 \\ [\varepsilon_{13}] = -[\varepsilon_2]\, \nu_1\nu_3 = 0, & [\varepsilon_1]\, \nu_2^2 + [\varepsilon_2]\,(1 - \nu_2^2) + [\varepsilon_3]\, \nu_2^2 = 0 \\ [\varepsilon_{23}] = -[\varepsilon_1]\, \nu_2\nu_3 = 0, & [\varepsilon_1]\, \nu_3^2 + [\varepsilon_2]\, \nu_3^2 + [\varepsilon_3]\,(1 - \nu_3^2) = 0 \end{array} \tag{3.4}$$

Из условия сжимаемости и существования разрывов на поверхности Σ следует, что определитель системы из трех уравнений, стоящих справа в соотношениях (3.4), должен быть равен нулю, т. е.

$$\nu_1^2\nu_2^2\nu_3^2 = 0 \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что одна или две из главных осей лежат в плоскости, касательной к Σ.

Из соотношений (3.4), (3.5) для разрывов компонент тензора скоростей деформации получаем различные решения

$$\begin{array}{lllll} \nu_1 = 0, & \nu_2 \neq 0, & \nu_3 \neq 0, & [\varepsilon_1] = 0, & [\varepsilon_2] = (1 - \nu_3^{-2})\,[\varepsilon_3] \\ \nu_1 \neq 0, & \nu_2 = 0, & \nu_3 \neq 0, & [\varepsilon_2] = 0, & [\varepsilon_1] = (1 - \nu_3^{-2})\,[\varepsilon_3] \\ \nu_1 \neq 0, & \nu_2 \neq 0, & \nu_3 = 0, & [\varepsilon_3] = 0, & [\varepsilon_1] = (1 - \nu_2^{-2})\,[\varepsilon_2] \\ \nu_1 = \nu_2 = 0, & \nu_3 = 1, & [\varepsilon_1] = [\varepsilon_2] = 0, & [\varepsilon_3] \neq 0 & \\ \nu_1 = \nu_3 = 0, & \nu_2 = 1, & [\varepsilon_1] = [\varepsilon_3] = 0, & [\varepsilon_2] \neq 0 & \\ \nu_2 = \nu_3 = 0, & \nu_1 = 1, & [\varepsilon_2] = [\varepsilon_3] = 0, & [\varepsilon_1] \neq 0 & \end{array} \tag{3.6}$$

Таким образом, полученные решения (3.6) накладывают ограничения на величины разрывов компонент тензора скоростей деформации, при которых система (1.6) имеет решение.

Поступила 8 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мяснянкин Ю. М. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, вып. 5.
2. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М., «Мир», 1964.
3. Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
4. Hill R. Discontinuity Relations in Mechanics of Solids, Progress in Solid Mechanics, vol. 2, Amsterdam, North - Holland publ. Co., 1961 (Рус. перев.: Механика, Сб. перев. 1963, № 3.).