Асимптотические представления плотности и давления примут вид

$$\rho = 6\rho_1 (5 - 4\lambda)^{-5/2} [1 - 7.26 \cdot 10^2 \tau^{4/5} (5 - 4\lambda)^{-2}] \qquad (4.11)$$
$$p = {}^3/_{10} p_1 \tau^{-4/5} (5 - 4\lambda)^{-3/2} [1 - 5.66 \cdot 10^2 \tau^{4/5} (5 - 4\lambda)^{-2}]$$

Поправочные члены из разностей, заключенных в квадратные скобки в правых частях соотношений (4.11), становятся как угодно малыми при $\lambda \to -\infty$ и фиксированном значении времени. Следовательно, автомодельное решение задачи о коротком ударе дает главные члены разложения газовых параметров и в области за предельной характеристикой.

Поступила 4 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
2. Адамский В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе по холодному газу. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
3. Weizsäcker C. F. Genäherte Darstellung starker instationärer Stoßwellen durch Homologie-Lösungen. Z. Naturforsch. 1954, Bd 9a, H. 4, S. 269—275.
4. Häfele W. Zur Analytischen Behandlung ebener, starker, instationärer Stoβwellen. Z. Naturforsch. 1955, Bd. 10a, H. 12, S. 1006—1016.
5. Hoerner S. Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit linearem Verlauf der Geschwindigkeit. Z. Naturforsch., 1955, Bd 10a, H. 9, S. 687—692.
6. Жуков А. И., Каждан Я. М. О движении газа под действием кратковременного импульса. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 4.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
8. Лидов М. Л. Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных адиабатических движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 103, № 1.
9. Коробейников В. П. Об интегралах уравнений неустановившихся адиабатических движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 4.
10. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higner Transcendental Functions, Based in part on notes left by H. Bateman, vol. 1, New York — Toronto — London, McGraw — Hill, 1953.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости М., «Мир», 1967.
12. Cole J. D. Perturbation methods in applied mathematics. Waltham, Massachusetts, Blaisdell, 1968.

О ПРИВЕДЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

Полученные ранее представления общего решения осесимметричной задачи через две аналитические функции [1,2] преобразуются таким образом, что под знаком интеграла остается лишь одна из этих функций, и открывается возможность использовать при решении осесимметричных задач те же методы, что и при решении плоской задачи. Близкие по существу преобразования в частном случае плоской границы производились в работах [3-5].

В качестве примера рассмотрено решение в рядах для полой сферы при различных условиях на поверхности.

1. Как показано в работе [2], компоненты упругого перемещения при осесимметричной деформации тела вращения могут быть представлены в форме

$$2Gw(z, r) = \frac{1}{\pi i}\int_{\bar t}^{t}[\varkappa\varphi(\zeta) - (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) - \psi(\zeta)]\frac{d\zeta}{g(t,\zeta)}\cdot$$

$$2Gu(z, r) = -\frac{1}{2\pi i r}\int_{\bar t}^{t}[\varkappa\varphi(\zeta) + (2z-\zeta)\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)]\, g_1(t,\zeta)\, d\zeta \qquad (1.1)$$

$$g(t,\zeta) = \sqrt{(\zeta - t)(\zeta - \bar t)}, \qquad g_1(t,\zeta) = (2\zeta - t - \bar t)/g(t,\zeta)$$

Здесь z, r — цилиндрические координаты (z — ось симметрии), w, u — аксиальное и радиальное перемещения точки; $\varkappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, φ и ψ — аналитические функции комплексного переменного $\zeta = x + iy$, голоморфные в симметричной плоской области D, занятой меридиональным сечением тела; x, y — прямоугольные координаты в плоскости этого сечения (ось x совпадает с z); точки $t = z + ir$ и $\bar t = z - ir$ лежат в той же плоскости внутри D. Путь интегрирования в (1.1) произволен. Аналитические функции удовлетворяют условию

$$\varphi(\zeta) = \overline{\varphi(\bar\zeta)}, \qquad \psi(\zeta) = \overline{\psi(\bar\zeta)} \qquad (1.2)$$

Область D будем считать односвязной, а ее границу L — кусочно-гладким симметричным контуром без точек возврата, состоящим из дуг непрерывной кривизны.

Предполагая, что функции $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ непрерывны вплоть до контура L, устремим t и $\bar t$ к соответствующим контурным точкам и примем за путь интегрирования в (1.1) дугу контура между этими точками.

Формулы (1.1) запишем в виде одного комплексного выражения

$$2G(w - iu) = \frac{\varkappa}{\pi r}\int_{\bar t}^{t}\varphi(\sigma)\, U(\bar t, \sigma)\, d\sigma + \frac{1}{\pi r}\int_{\bar t}^{t}[(2z-\sigma)\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)]\, U(t,\sigma)\, d\sigma$$

$$U(t,\sigma) = \sqrt{(\sigma - \bar t)/(\sigma - t)}$$

Это выражение после преобразования представим в форме

$$2G(w - iu) = S[\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - \bar\sigma\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma)] + \int_{\bar t}^{t}\varphi(\sigma)\, Q(t,\sigma)\, d\sigma \qquad (1.3)$$

где точки t, $\bar t$, σ, $\bar\sigma$ принадлежат L, $\bar\sigma$ и $\bar t$ рассматриваются как функции соответственно от σ и t.

$$Q(t,\sigma) = \frac{2\varkappa}{\pi|t - \bar t|}\left[U(\bar t,\sigma) - U(t,\bar\sigma)\frac{d\bar\sigma}{d\sigma}\right] + \frac{2}{\pi|t-\bar t|}\frac{\partial}{\partial\sigma}[(\sigma + \bar\sigma - t - \bar t)\, U(t,\sigma)] \qquad (1.4)$$

а под S понимается оператор на L

$$S(f) = -\frac{2}{\pi|t - \bar t|}\int_{\bar t}^{t} f(\sigma)\, U(t,\sigma)\, d\sigma \qquad (1.5)$$

При преобразованиях было учтено, что вследствие (1.2) имеет место равенство

$$\int_{\bar t}^{t}\overline{\varphi(\sigma)}\, U(t,\sigma)\, d\sigma = -\int_{\bar t}^{t}\varphi(\sigma)\, U(t,\bar\sigma)\, d\bar\sigma$$

Когда на поверхности тела заданы перемещения, равенство (1.3) является интегральным условием, которому должны удовлетворять граничные значения аналитических функций. Хотя левая часть (1.3) определена лишь при $r > 0$, будем считать ее определенной везде на L, полагая в соответствии с (1.2) функцию w четной, а функцию u нечетной относительно r.

2. Рассмотрим случай, когда на поверхности тела заданы внешние силы. Несколько видоизменяя формулы статьи [2], запишем выражения для p_z и p_r — интенсивности внешних сил — через граничные значения аналитических функций

$$p_z(s) = -\frac{1}{2\pi i r}\frac{d}{ds}\int_{\bar t}^{t}[\varphi(\sigma) - (2z - \sigma)\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma)]\,g_1(t, \sigma)\,d\sigma$$

$$p_r(s) = -\frac{1}{\pi i}\frac{d}{ds}\int_{\bar t}^{t}[\varphi(\sigma) + (2z - \sigma)\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)]\frac{d\sigma}{g(t, \sigma)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i r^2}\frac{dz}{ds}\int_{\bar t}^{t}[\varkappa\varphi(\sigma) + (2z - \sigma)\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)]\,g_1(t, \sigma)\,d\sigma \qquad (2.1)$$

Здесь $r > 0$, точки σ и t лежат на контуре L, s — дуговая абсцисса точки t. Введем обозначения

$$Z(s) = \int_0^s p_z(s')\,r'ds', \qquad R(s) = \int_0^s\left[p_r(s') + \frac{1}{r'^2}\frac{dz'}{ds'}Z(s')\right]ds' \qquad (2.2)$$

где за начальную принята точка z_0 пересечения L с осью симметрии.

Подставим (2.1) в (2.2) и произведем интегрирование по s. После таких же преобразований, как и в п. 1, получим

$$R + \frac{i}{r}Z = -S[\overline{\varphi(\sigma)} + \bar\sigma\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)] + \int_{\bar t}^{t}\varphi(\sigma)\,Q_0(t, \sigma)\,d\sigma + V(t) + C \qquad (2.3)$$

Здесь C — некоторая вещественная постоянная, функция Q_0 определяется формулой (1.4) при $\varkappa = -1$

$$V(t) = -\frac{\varkappa + 1}{\pi}\frac{t - \bar t}{|t - \bar t|}\int_{\bar t}^{t}\left[\int_{\bar t'}^{t'}\varphi(\sigma)\,g_1(t', \sigma)\,d\sigma\right]\frac{dt}{|t' - \bar t'|^2} \qquad (2.4)$$

Выражения R и Z будем считать определенными везде на L, продолжая их в область отрицательных r как четные функции.

3. Введем на L оператор

$$S^{-1}(F) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\int_{\bar\tau}^{\tau}F(t)\,U(t, \tau)\,h(t, \tau)\,dt \qquad (3.1)$$

$$h(t, \tau) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} t \cdot \operatorname{Im}\tau)$$

Операторы (1.5) и (3.1) взаимно обратны. В самом деле, вводя обозначения

$$I_1(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{\bar\tau}^{\tau}\left[\int_{\bar t}^{t}f(\sigma)\,U(t, \sigma)\,d\sigma\right]U(t, \tau)\,h(t, \tau)\frac{dt}{|t' - \bar t'|^2}$$

$$I_2(t) = -\frac{1}{\pi|t - \bar t|}\int_{\bar t}^{t}\left[\int_{\bar\tau}^{\tau}F(\sigma)\,U(\sigma, \tau)\,h(\tau, \sigma)\,d\sigma\right]U(t, \tau)\,d\tau \qquad (3.2)$$

и изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$I_1(\tau) = -\frac{1}{\pi}\int_{\bar\tau}^{\tau} f(\sigma)\left[\int_l U(t,\sigma)\, U(t,\tau)\frac{dt}{|t-\bar t|}\right]d\sigma \tag{3.3}$$

$$I_2(t) = -\frac{1}{\pi|t-\bar t|}\int_{\bar t}^{t} F(\sigma)\left[\int_{l_0} U(\sigma,\tau)\, U(t,\tau)\, d\tau\right] h(t,\sigma)\, d\sigma \tag{3.4}$$

Здесь под $l = l(\sigma, \tau)$ понимается совокупность дуг $\overline{\tau\sigma_*}$ и $\sigma_*\tau$, где $\sigma_* = \sigma$, если точки σ и τ лежат по одну сторону от оси симметрии, и $\sigma_* = \bar\sigma$ в противном случае (см. фиг. 1; двойной линией показана линия разветвления радикала); $l_0 = l(\sigma, t)$.

Вычислим внутренний интеграл в (3.3), что легко сделать, перейдя к интегрированию по дуге $\sigma_*\tau$

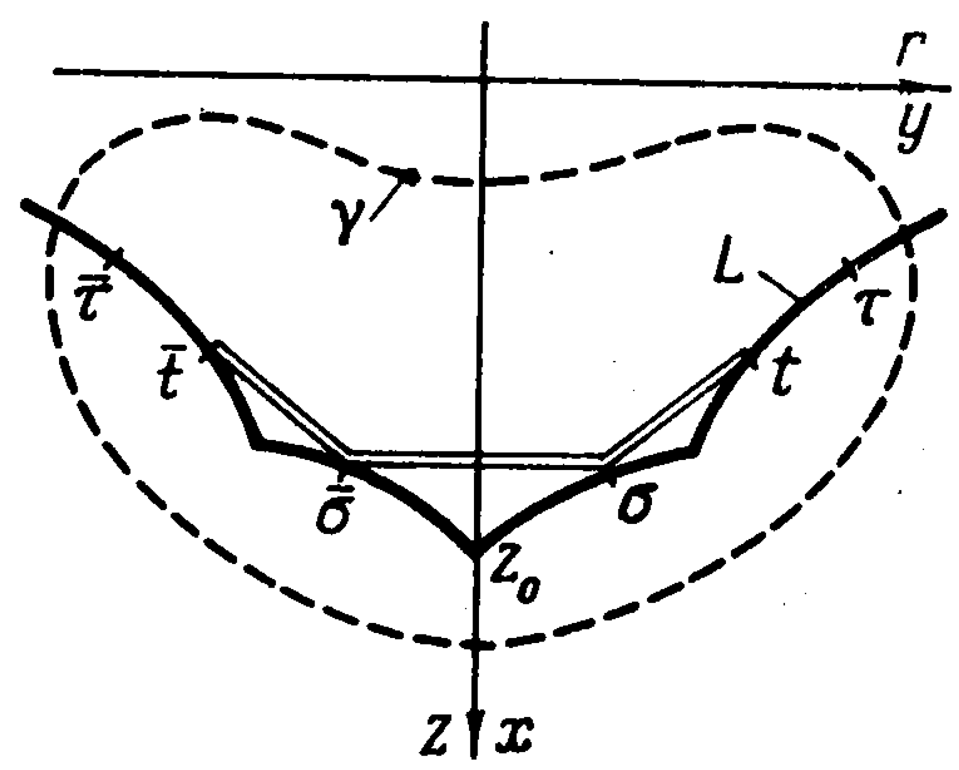
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_*}^{\tau} U(t,\sigma)\, U(t,\tau)\frac{dt}{|t-\bar t|} - U(\bar t,\sigma)\, U(\bar t,\tau)\frac{d\bar t}{|t-\bar t|} =$$

$$= \frac{t-\bar t}{\pi|t-\bar t|}\left\{2\ln\left[U(\bar t,\tau) + U(\bar t,\sigma)\right] + \ln\frac{(\tau-\bar t)(\sigma-\bar t)}{t-\bar t}\right\}\Bigg|_{t=\sigma_*}^{t=\tau} = \frac{1}{2}\left[1 + h(\sigma,\tau)\right]$$

Подынтегральная функция внутреннего интеграла в (3.4) при замене τ на ζ голоморфна в плоскости переменного ζ, разрезанной вдоль l_0, причем ее значения на разных берегах разреза отличаются лишь знаком. Поэтому (при введении множителя $1/2$) за путь интегрирования можно принять любой замкнутый контур γ, охватывающий l_0, (фиг. 1). Вычисляя интеграл по γ при помощи теоремы о вычетах, имеем

$$-\frac{1}{\pi}\int_{l_0} U(\sigma,\tau)\, U(t,\tau)\, d\tau = -$$

$$-\frac{i|t-\bar t|}{2\pi(t-\bar t)}\int_{\gamma} U(\sigma,\zeta)\, U(t,\zeta)\, d\zeta = \frac{|t-\bar t|}{2}\left(1 + \frac{\sigma-\bar\sigma}{t-\bar t}\right)$$



Фиг. 1

Таким образом

$$I_1(\tau) = \int_{z_0}^{\tau} f(\sigma)\, d\sigma, \qquad I_2(t) = \frac{1}{2}\int_{\bar t}^{t} F(\sigma)\left(1 + \frac{\sigma-\bar\sigma}{t-\bar t}\right) h(t,\sigma)\, d\sigma \tag{3. 5}$$

Используя эти равенства, получим нужные тождества (см. также [6])

$$S^{-1}[S(f)] = \frac{d}{d\tau} I_1(\tau) = f$$

$$S[S^{-1}(F)] = \frac{d}{dt} I_2(t) + \frac{1}{2(t-\bar t)}\left(1 - \frac{d\bar t}{dt}\right)\left[I_2(t) - I_2(\bar t)\right] = F \tag{3.6}$$

Приведенное здесь доказательство остается корректным, когда L — простая кусочно-гладкая дуга без точек возврата, функция $f(\sigma)$ принадлежит классу H^*, а функция $F(t)$ такова что оператор (3.1) является интегрируемой функцией. Для этого достаточно, чтобы $F(t)$ принадлежала классу $H(\mu)$ при $\mu > 0.5$.

4. Применим оператор S^{-1} к обеим частям равенства (1.3). Изменяя порядок интегрирования с учетом (3.6), будем иметь

$$\varkappa\overline{\varphi(\tau)} - \bar\tau\varphi'(\tau) - \psi(\tau) + \frac{d}{d\tau}\int_{\bar\tau}^{\tau}\varphi(\sigma)\, K(\tau,\sigma)\, d\sigma = 2GS^{-1}(w - iu) \tag{4.1}$$

$$K(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\int_l Q(t,\sigma)\, U(t,\tau)\, dt \tag{4.2}$$

где ядро K и его производная по τ непрерывны на любой гладкой части L кроме точки $\sigma = z_0$, где возможна интегрируемая особенность. Значения $K(\tau, \tau)$ и $K(\tau, \bar{\tau})$ легко вычисляются, после чего последнее слагаемое в (4.1) можно представить в форме

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\tau}}^{\tau} \varphi K d\sigma = -\frac{1}{2}\varphi(\tau)\left(1+\frac{d\bar{\tau}}{d\tau}\right) - \varkappa\overline{\varphi(\tau)}\left(1 - i\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right) + \int_{\bar{\tau}}^{\tau}\varphi\frac{\partial K}{\partial \tau}d\sigma \qquad (4.3)$$

Аналогичным путем, отправляясь от (2.3), получим

$$\overline{\varphi(\tau)} + \bar{\tau}\varphi'(\tau) + \psi(\tau) - \frac{d}{d\tau}\int_{\bar{\tau}}^{\tau}\varphi(\sigma) K_0(\tau, \sigma)\, d\sigma + \int_{\bar{\tau}}^{\tau}\varphi(\sigma) K_1(\tau, \sigma)\, d\sigma =$$

$$= -S^{-1}\left(R + \frac{i}{r}Z\right) + C \qquad (4.4)$$

$$K_1(\tau, \sigma) = \frac{\varkappa+1}{2\pi}\int_l \frac{g_1(t, \tau)\, g_1(t, \sigma)}{(t - \bar{t})\,|t - \bar{t}|}\, dt \qquad (4.5)$$

где K_0 определяется формулой (4.2) при замене Q на Q_0 ($\varkappa$ на -1).

При выводе (4.4) было учтено, что $V(t)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию (1.2), и сделано преобразование

$$S^{-1}(V) = -\frac{1}{4}\int_{\bar{\tau}}^{\tau}\frac{dV}{dt} g_1(t, \tau)\, h(\tau, t)\, dt \qquad (4.6)$$

После этого сюда подставлено значение V согласно (2.4) и произведено изменение порядка интегрирования.

Полученные равенства (4.1) и (4.4) эквивалентны (1.3) и (2.3), ибо обращаются в эти последние при помощи оператора S. Они выражают условия, которым должны удовлетворять граничные значения аналитических функций в случае первой и второй основных осесимметричных задач теории упругости.

Если интегралы в левой части опустить, то получающиеся равенства будут выражать граничные условия, которые налагаются на φ и ψ в случае плоской задачи.

Функция ψ не входит под знак интеграла. Поэтому открывается возможность использовать при решении осесимметричных задач те же методы, что и при решении плоской задачи (разложение в степенные ряды, применение конформного отображения, приведение к интегральным уравнениям типа Н. И. Мусхелишвили и Д. И. Шермана и т. д.).

В случае плоской границы $K = K_0 = K_1 \equiv 0$, а операторы (1.5) и (3.1) путем несложных преобразований могут быть приведены к операторам, использовавшимся в [3–5] при установлении зависимостей между осесимметричными и плоскими состояниями.

Укажем также выражения ядер для случая сферической границы

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} = \frac{(2\varkappa+1)\tau + \bar{\sigma}}{4\tau\sqrt{\sigma\tau}}, \quad \frac{\partial K_0}{\partial \tau} - K_1 = \frac{(2\varkappa+1)\tau + \bar{\sigma}}{4\tau\sqrt{\sigma\tau}} - \frac{\varkappa+1}{2|\tau|}[1 - h(\tau, \sigma)] \qquad (4.7)$$

5. Приведенные выше рассуждения применимы и в случае тел вращения, обладающих внутренними полостями, но являющихся односвязными. Область D при этом многосвязна. Ее граница L состоит из внешнего контура L_0 и внутренних контуров L_k ($k = 1, 2, \ldots n$), которые будем нумеровать в том порядке, в каком они пересекают ось симметрии.

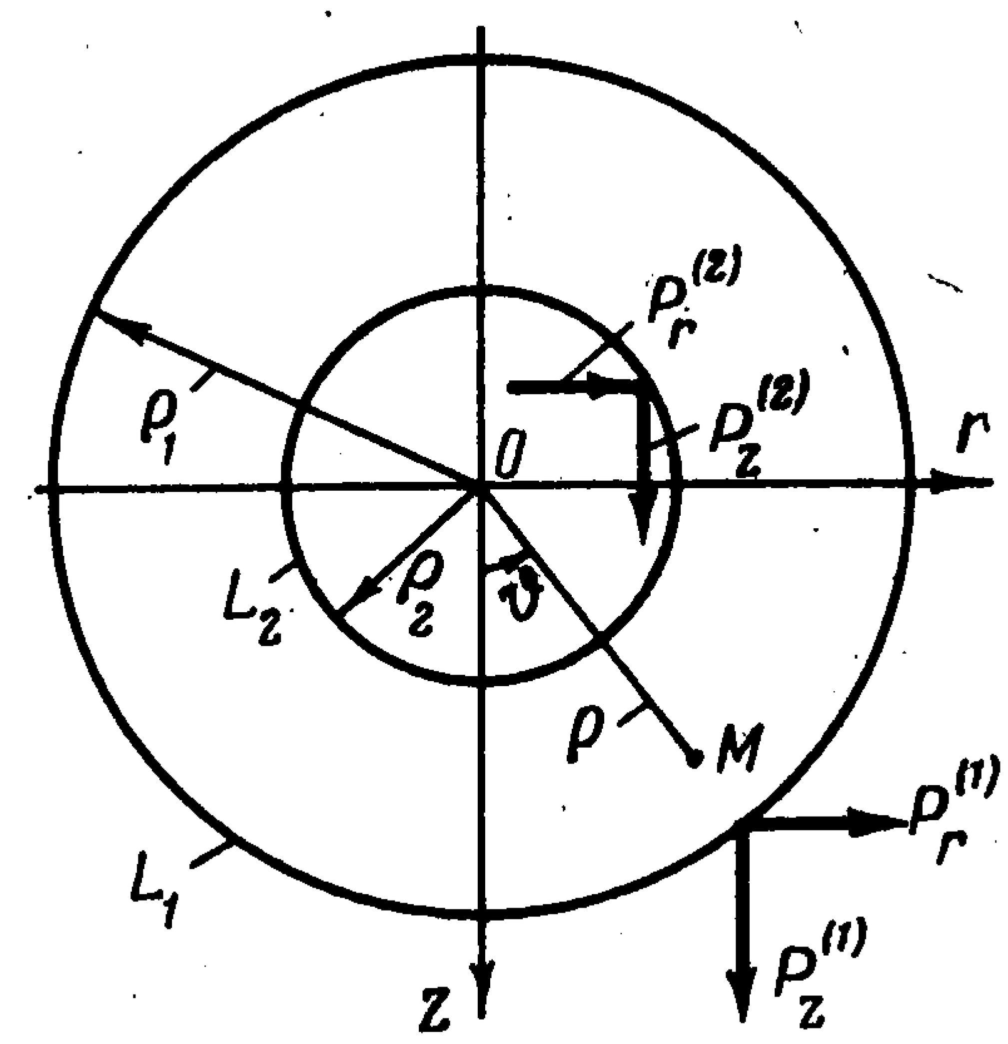
Голоморфная в D функция φ (или ψ) может быть представлена в виде суммы функций φ_k (или ψ_k) ($k = 0, 1, \ldots, n$), где функции φ_0 и ψ_0 голоморфны везде внутри L_0, функции φ_k и ψ_k ($k \geqslant 1$) голоморфны везде вне соответствующего контура L_k и исчевают на бесконечности, причем

$$\lim_{\zeta\to\infty} \zeta\,[(\varkappa+1)\,\varphi_k(\zeta)+\psi_k(\zeta)]=0 \qquad (k=1,2,\ldots n) \tag{5.1}$$

Линия интегрирования в (1.1) может пересекать ось симметрии в любой точке внутри D. Однако изменение положения этой точки сопровождается изменением вида функций φ и ψ. А именно, если линия интегрирования пересекает ось симметрии в точке, лежащей между контурами L_j и L_{j+1}, то во всех формулах следует полагать

$$\varphi(\zeta)=\varphi_0(\zeta)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\zeta)\,\mathrm{sign}\,(k-j-0.5)$$

$$\psi(\zeta)=\psi_0(\zeta)+\sum_{k=1}^{n}\psi_k(\zeta)\,\mathrm{sign}\,(k-j-0.5) \tag{5.2}$$



Фиг. 2

При этом условии равенства (4.1) и (4.4) имеют место для каждого из контуров L_k в отдельности.

6. Рассмотрим осесимметричную задачу для упругой полой сферы, ограниченной поверхностями $\rho=\rho_1$ и $\rho=\rho_2$ (фиг. 2). По этим поверхностям заданы перемещения

$$2Gw^{(j)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}P_n(\mu), \qquad 2Gu^{(j)}=\sqrt{1-\mu^2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(j)}P_n{}'(\mu) \qquad (j=1;2) \tag{6.1}$$

или внешние силы

$$p_z^{(j)}=\frac{(-1)^{(j)}}{\rho_j}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(j)}P_n(\mu), \qquad p_r^{(j)}=(-1)^j\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\rho_j}\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{(j)}P_n{}'(\mu) \tag{6.2}$$

$$(\mu=\cos\vartheta)$$

где $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра, ϑ — полярный угол. В последнем случае при помощи формул (2.2) получим

$$Z^{(j)}=(-1)^{j+1}Z_0^{(j)}\frac{1-\mu}{2}+\rho_j(1-\mu^2)\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(j)}P_n{}'(\mu)$$

$$R^{(j)}=(-1)^{j+1}\frac{1}{2\rho_j}Z_0^{(j)}\ln\frac{1+\mu}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}P_n(\mu) \tag{6.3}$$

где $2\pi Z_0{}^{(j)}$ — равнодействующая сил, приложенных к соответствующей поверхности

$$A_n^{(j)}=C_n^{(j)}-B_n^{(j)}, \qquad B_n^{(j)}=\frac{D_n^{(j)}}{n(n+1)} \qquad (n\geqslant 1)$$

$$A_0^{(j)}=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(j)}, \qquad Z_0^{(j)}=2\rho_jC_0^{(j)} \qquad (j=1,2) \tag{6.4}$$

Подставляя (6.1) и (6.3) в (4.1) — (4.4), представим полученные равенства в форме

$$\lambda_j\overline{\varphi(\tau_j)}\,\frac{\bar\tau_j}{\rho_j}-\bar\tau_j\varphi'(\tau_j)-\psi(\tau_j)-\frac{1}{2}\,\varphi(\tau_j)\left(1-\frac{\bar\tau_j^2}{\rho_j^2}\right)+\int_{\bar\tau_j}^{\tau_j}\varphi K_*d\sigma_j=$$

$$=(-1)^{j+1}\frac{\varkappa-\lambda_j}{2\rho_j(\varkappa+1)}Z_0^{(j)}\ln\frac{\tau_j}{\rho_j}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}F_n^{(j)}\tau_j{}^n \qquad (j=1;2) \tag{6.5}$$

$$K_*(\tau_j\sigma_j)=\frac{(2\varkappa+1)\tau_j+\bar{\sigma}_j}{4\tau_j\sqrt{\sigma_j\tau_j}}-\frac{\varkappa-\lambda_j}{2\rho_j}[1-h(\tau_j,\sigma_j)]$$

$$F_n^{(j)}=(A_n^{(j)}-nB_n^{(j)})\rho_j^{-n}\qquad(n\neq 0),\qquad F_0^{(j)}=A_0^{(j)}-(\varkappa-\lambda_j)C^{(j)}\tag{6.6}$$

Здесь $C_n^{(j)}$ — некоторая постоянная. При отрицательном n следует полагать $A_n = A_{-n-1}$, $B_n = B_{-n-1}$.

Равенство (6.5) имеет место как для поверхности, где заданы перемещения ($\lambda_j = \varkappa$), так и для поверхности, где заданы внешние силы ($\lambda_j = -1$).

Аналитические функции будем искать в форме рядов

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\qquad \psi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\zeta^n\tag{6.7}$$

Коэффициенты a_n и b_n — вещественны. При этом

$$\int_{\bar{\tau}_j}^{\tau_j}\varphi K_* d\sigma_j=\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n\tau_j^n}{2n+1}+\frac{1}{2}\rho_j^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n\tau_j^{n-2}}{2n-1}-\frac{1}{2\rho_j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\varkappa+1}{2n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n-1}\right)a_n\bar{\tau}_j^{n+1}+\frac{\varkappa-\lambda_j}{\rho_j}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq-1)}}^{\infty}\frac{a_n\bar{\tau}_j^{n+1}}{n+1}-a_{-1}\ln\frac{\tau_j}{\rho_j}+\mathrm{const}\right)\tag{6.8}$$

Легко видеть, что

$$a_{-1}=-\frac{1}{2(\varkappa+1)}Z_0^{(1)}=\frac{1}{2(\varkappa+1)}Z_0^{(2)}\tag{6.9}$$

а постоянную в (6.8) можно включить в состав $C^{(j)}$.

Умножим обе части равенства (6.5) на $d\tau\,/\,(\tau-\zeta)$ и проинтегрируем по совокупности контуров L_1 и L_2. Когда точка ζ расположена вне D, функция ψ исключается, и получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n-1}{2n-3}\alpha_n a_n\zeta^{n-2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n}{2n-1}\beta_n a_{-n}\zeta^{n-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\Delta_n\zeta^n\tag{6.10}$$

где

$$\beta_n=\left(2\lambda_1+\frac{2}{2n+1}-\frac{\varkappa-\lambda_1}{n-1}\right)\rho_1^{-2n+1}-\left(2\lambda_2+\frac{2}{2n+1}-\frac{\varkappa-\lambda_2}{n-1}\right)\rho_2^{-2n+1}\qquad(n\neq 1)$$

$$\beta_1=(\lambda_1+{}^2/_3+\varkappa)\rho_1^{-1}-(\lambda_2+{}^2/_3+\varkappa)\rho_2^{-1}$$

$$\alpha_n=2n\frac{2n-3}{2n-1}(\rho_2^2-\rho_1^2),\qquad \Delta_n=F_n^{(1)}-F_n^{(2)}\tag{6.11}$$

Из (6.10) легко получить

$$a_n=\frac{\alpha_{-n+1}\Delta_{n-2}-\beta_{n-1}\Delta_{-n-1}}{\alpha_n\alpha_{-n+1}-\beta_{n-1}\beta_{-n}}\qquad(n\neq 0)\tag{6.12}$$

Коэффициент a_0 остается неопределенным.

Если по какой-либо из поверхностей заданы внешние силы, то коэффициент a_{-1} удобнее вычислять при помощи (6.9), тогда

$$a_2=(\Delta_{-3}-\alpha_{-1}a_{-1})\,/\,\beta_{-2}\tag{6.13}$$

и постоянные $C^{(j)}$ можно не определять.

Функция $\psi(\zeta)$ определяется тем же путем, но при ζ, расположенном внутри D. Производя выкладки, получим

$$b_n = -\frac{n+1}{2n+1}F_n^{(j)} - \frac{n-\varkappa}{2n+1}a_n - 2\rho_j^2\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}a_{n+2} +$$

$$+\left[\lambda_j + \frac{(2n+3)\varkappa + 2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\right]a_{-n-1}\rho_j^{-2n-1} - \frac{\varkappa - \lambda_j}{n}a_{-n-1}\rho_j^{-2n-1} \qquad (6.14)$$

($j = 1$ при $n \geqslant 0$, $j = 2$ при $n < 0$, при $n = 0$ последнее слагаемое исключается).

Когда функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ известны, перемещения точек тела легко вычисляются по формулам (1.1), если учесть, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\bar t}^{t}\frac{\zeta^n d\zeta}{g(t,\zeta)} = \rho^n P_m(\mu), \qquad -\frac{1}{2\pi i r}\int_{\bar t}^{t}\zeta^n g_1(t,\zeta)\,d\zeta = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{n+1}\rho^n P_m'(\mu) \qquad (6.15)$$

Здесь

$$m = n \text{ при } n \geqslant 0, \qquad m = |n| - 1 \text{ при } n < 0, \quad \rho = \sqrt{z^2 + r^2}, \quad \mu = z/\rho.$$

При действии равномерного давления p_1 по L_1 и p_2 по L_2 (задача Ляме) имеем

$$p_z^{(j)} = (-1)^j p_j \cos\vartheta, \quad p_r^{(j)} = (-1)^j p_j \sin\vartheta, \quad Z^{(j)} = -{}^1/_2(1-\mu^2)\rho_j p_j P_1'(\mu)$$

$$R^{(j)} = {}^1/_2\rho_j p_j[P_1(\mu) - P_0(\mu)], \qquad F_n^{(j)} = \Delta_n = 0 \qquad (n \neq 0, -2)$$

$$F_{-2}^{(j)} = {}^3/_2\rho_j^3 p_j, \qquad \Delta_{-2} = {}^3/_2(\rho_1^3 p_1 - \rho_2^3 p_2), \qquad \lambda_j = -1 \qquad (j = 1; 2)$$

$$a_n = 0 \quad (n \neq 1), \quad b_n = 0 \quad (n \neq 1, -2), \quad b_1 = {}^1/_3(\varkappa - 1)a_1$$

$$a_1 = \frac{\Delta_{-2}}{\beta_{-1}} = \frac{3}{4(1+\nu)}\frac{\rho_1^3 p_1 - \rho_2^3 p_2}{\rho_2^3 - \rho_1^3}, \qquad b_{-2} = {}^1/_2\rho_1^3\rho_2^3\frac{p_1 - p_2}{\rho_1^3 - \rho_2^3}$$

$$2G(w - iu) = [{}^2/_3(\varkappa - 1)a_1 - b_{-2}\rho^{-3}](z - ir)$$

что совпадает с известным решением.

Формулы, аналогичные (6.12) и (6.14), были получены иным путем в работе [7].

Поступила 18 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 4.
2. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
3. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости для бесконечной плиты. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 1.
4. Положій I. М. Про одне інтегральне перетворення узагальнених аналітичних функцій. Вісник Київ. ун-ту. Сер. астрон., матем., механ., 1959, вып. 1.
5. Беленький М. Я. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
6. Соловьев Ю. И. Решение осесимметричной задачи теории упругости для односвязных тел вращения. Инж. ж., 1963, т. 5, вып. 3.
7. Вольперт В. С. Решение основных задач осесимметричной теории упругости для полой сферы. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1967, вып. 62.