

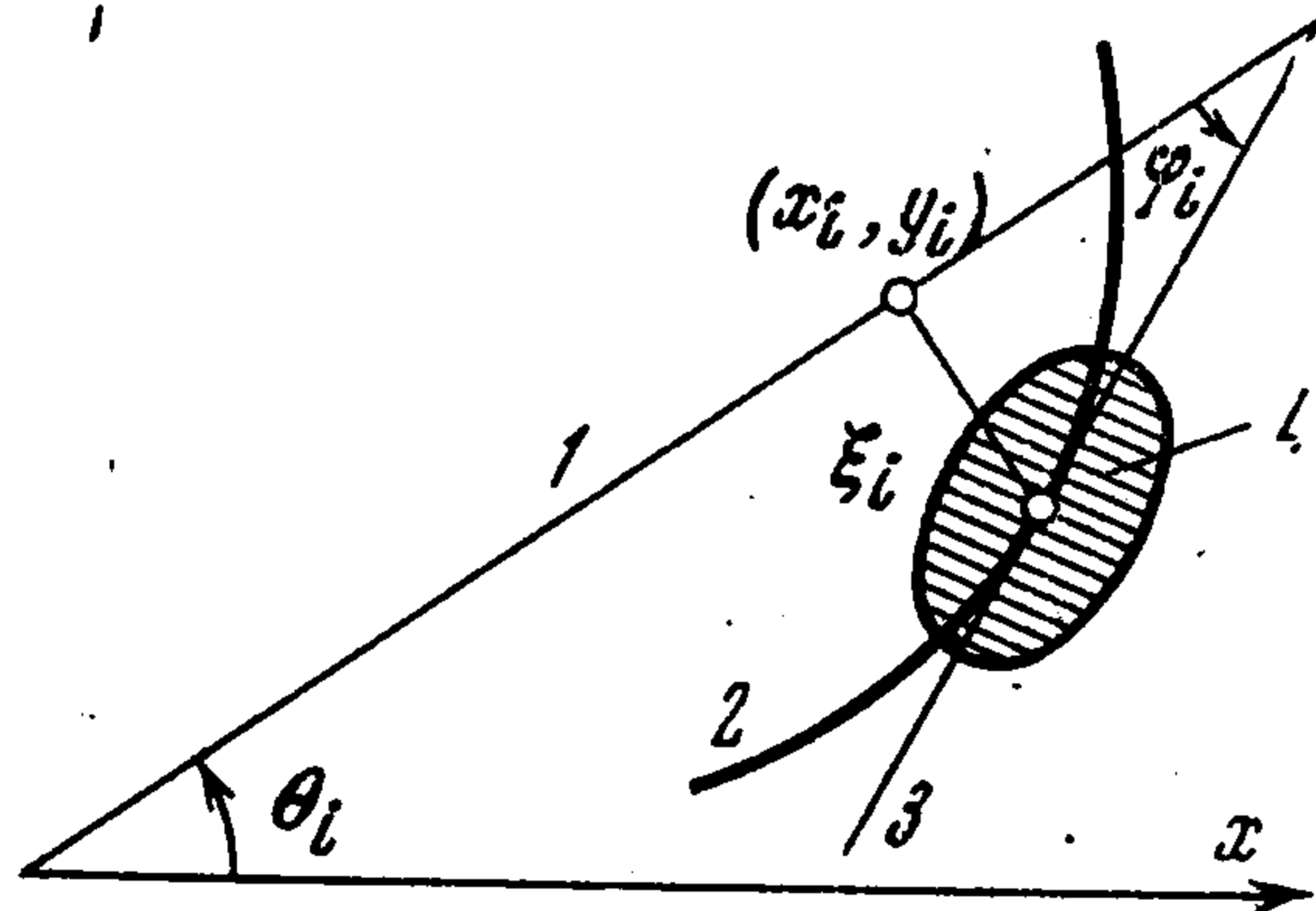
УСТОЙЧИВОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭКИПАЖА НА БАЛЛОННЫХ КОЛЕСАХ

Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев

(Горький)

Общий подход [1] к изучению устойчивости движения экипажа на баллонных колесах в случае прямолинейного невозмущенного движения распространяется на случай криволинейного движения по пути достаточно малой кривизны.

1. Постановка задачи. Предположим, что выполняются условия, при которых справедлива теория качения упругого пневматика, разработанная М. В. Келдышем [2]. Согласно этой теории, качение колеса осуществляется без проскальзывания, а деформация пневматика является малой и характеризуется тремя параметрами: величиной ξ бокового смещения центра площадки контакта относительно следа средней плоскости колеса на плоскости дороги, углом χ наклона средней плоскости колеса и углом φ скручивания пневматика. Малость деформации пневматика и условие качения без проскальзывания накладывают определенные ограничения на класс изучаемых движений. В частности, кривизна пути должна быть достаточно малой, а скорость движения не должна быть слишком большой.



Фиг. 1

Обозначим через q_1, q_2, \dots, q_n обобщенные координаты экипажа на m -баллонных колесах и введем величины, определяющие положение i -го колеса ($i = 1, 2, \dots, m$). Пусть x_i, y_i — декартовы координаты точки K_i встречи прямой наибольшего наклона, проведенной в средней плоскости колеса через его центр, с плоскостью дороги; θ_i — угол, образуемый следом средней плоскости колеса на дороге и осью Ox неподвижной системы координат $Oxyz$, плоскость xOy которой совпадает с плоскостью дороги, а ось Oz направлена вверх; χ_i — угол между осью Oz и средней плоскостью колеса. Введенные величины $x_i, y_i, \theta_i, \chi_i$ представляют собой известные функции обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n .

Предположим сначала, что движение экипажа задано. Это означает, что величины $x_i, y_i, \theta_i, \chi_i$ — известные функции времени. Тогда, согласно теории М. В. Келдыша, можно в каждый момент времени определить деформацию пневматиков, исходя из следующих условий: 1) касательная к линии качения пневматика совпадает с осью площадки контакта; 2) кривизна линии качения однозначно определяется деформацией пневматика.

В соответствии с обозначениями на фиг. 1 (1 — след средней плоскости колеса, 2 — линия качения, 3 — ось площадки контакта, 4 — центр площадки контакта) эти условия приводят к соотношениям

$$dx_i^* \sin(\theta_i + \varphi_i) - dy_i^* \cos(\theta_i + \varphi_i) = 0 \quad (1.1)$$

$$R_i^{-1} = \alpha_i \xi_i - \beta_i \varphi_i - \gamma_i \chi_i \quad (1.2)$$

Здесь x_i^* , y_i^* — координаты центра площадки контакта, связанные с x_i , y_i при помощи формул

$$x_i^* = x_i + \xi_i \sin \theta_i, \quad y_i^* = y_i - \xi_i \cos \theta_i \quad (1.3)$$

где R_i — радиус кривизны линии качения, α_i , β_i , γ_i — постоянные коэффициенты, называемые кинематическими параметрами i -го пневматика и определяемые экспериментально.

Используя (1.3) и отбрасывая малые величины второго порядка и выше, вместо (1.1) получаем

$$dx_i \sin(\theta_i + \varphi_i) - dy_i \cos(\theta_i + \varphi_i) + d\xi_i = 0 \quad (1.4)$$

По определению кривизна плоской кривой $R_i^{-1} = d(\theta_i + \varphi_i) / ds_i$, где ds_i — элемент дуги линии качения i -го пневматика. Подставляя в (1.2), находим

$$d\theta_i + d\varphi_i - ds_i (\alpha_i \xi_i - \beta_i \varphi_i - \gamma_i \chi_i) = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4), (1.5) представляют собой искомые соотношения для определения деформаций ξ_i , φ_i , если известно движение баллонного колеса.

Зная деформацию пневматика, можно найти силы, действующие на i -е колесо. Согласно теории М. В. Келдыша, они эквивалентны поперечной силе F_i , приложенной к точке K_i , моменту M_{θ_i} относительно вертикальной оси и моменту M_{χ_i} относительно горизонтальной оси, параллельной средней плоскости колеса, причем

$$F_i = a_i \xi_i + \sigma_i N_i \chi_i, \quad M_{\theta_i} = b_i \varphi_i, \quad M_{\chi_i} = -\sigma_i N_i \xi_i - \rho_i N_i \chi_i \quad (1.6)$$

Здесь N_i — нагрузка на i -е баллонное колесо; a_i , b_i , σ_i , ρ_i — постоянные коэффициенты, определяемые экспериментально.

2. Кинематические и динамические уравнения движения. Разделим уравнения (1.4) и (1.5) на dt . Исключая s_i^* при помощи соотношения

$$\begin{aligned} s_i^* &= x_i^* \cos(\theta_i + \varphi_i) + y_i^* \sin(\theta_i + \varphi_i) = \\ &= x_i \cos(\theta_i + \varphi_i) + y_i \sin(\theta_i + \varphi_i) - \xi_i \sin \varphi_i + \theta_i \xi_i \cos \varphi_i \end{aligned}$$

и отбрасывая малые члены второго порядка и выше, получим искомые кинематические уравнения движения экипажа на баллонных колесах по

криволинейному пути

$$\begin{aligned} x_i^{\circ} \sin(\theta_i + \varphi_i) - y_i^{\circ} \cos(\theta_i + \varphi_i) + \xi_i^{\circ} &= 0 \\ \theta_i^{\circ} + \varphi_i^{\circ} - (\alpha_i \xi_i - \beta_i \varphi_i - \gamma_i \chi_i) [x_i^{\circ} \cos(\theta_i + \varphi_i) + y_i^{\circ} \sin(\theta_i + \varphi_i)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В частном случае малых отклонений от прямолинейного перемещения со скоростью $V = \text{const}$ вдоль оси Oy эти уравнения переходят в известные уравнения М. В. Келдыша [2].

Пусть теперь $T = T(q, \dot{q}, t)$ — кинетическая энергия экипажа, положение которого определяется n -обобщенными координатами q_j ($j = 1, 2, \dots, n$), $Q_j = Q_j(q, \dot{q}, t)$ — заданные обобщенные силы, приложенные к системе, $R_j = R_j(\xi, \varphi, \chi)$ — обобщенные силы, обусловленные деформацией пневматиков. Для отыскания функций R_j вычислим виртуальную работу сил деформации

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^m [F_i (\delta x_i \sin \theta_i - \delta y_i \cos \theta_i) + M_{\theta_i} \delta \theta_i + M_{\chi_i} \delta \chi_i] = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left[F_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \sin \theta_i - \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \cos \theta_i \right) + M_{\theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} + M_{\chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

Отсюда

$$R_j = \sum_{i=1}^m \left[F_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \sin \theta_i - \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \cos \theta_i \right) + M_{\theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} + M_{\chi_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial q_j} \right] \quad (2.2)$$

Здесь силы F_i и моменты M_{θ_i} , M_{χ_i} определяются выражениями (1.6). После учета всех сил, действующих на систему, включая силы взаимодействия пневматиков с дорогой, искомые уравнения динамики экипажа записываются в обычной форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + R_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

где обобщенные силы R_j определяются выражением (2.2). Уравнения (2.3) вместе с (2.1) составляют уравнения движения экипажа на баллонных колесах по криволинейному пути.

3. Устойчивость движения по окружности. Для изучения устойчивости движения экипажа на баллонных колесах по окружности составим уравнения его малых отклонений от стационарного движения.

Пусть $\theta_i = \theta_i^{\circ} + \theta_i'$, где θ_i° — величина угла θ_i на траектории невозмущенного движения, θ_i' — малое отклонение θ_i от величины θ_i° . Вместо величин x_i° , y_i° введем u_i , V_i посредством соотношений

$$x_i^{\circ} = V_i \cos \theta_i^{\circ} + u_i \sin \theta_i^{\circ}, \quad y_i^{\circ} = V_i \sin \theta_i^{\circ} - u_i \cos \theta_i^{\circ} \quad (3.1)$$

Здесь $V_i = \text{const}$ — скорость продольного перемещения i -го колеса при движении экипажа по окружности, u_i — скорость поперечного смещения i -го колеса (величина порядка остальных малых величин). Подставляя соотношения (3.1) в (2.1), после линеаризации относительно малых величин получаем кинематические уравнения экипажа на баллонных коле-

сах при его малых отклонениях от движения по окружности

$$\begin{aligned} u_i + \xi_i^\circ + V_i \theta_i' + V_i \varphi_i &= 0 \\ \theta_i^\circ + \varphi_i^\circ - \alpha_i V_i \xi_i + \beta_i V_i \varphi_i + \gamma_i V_i \chi_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Динамические уравнения движения в рассматриваемом случае сохраняют форму (2.3).

Как и в случае прямолинейного стационарного движения, уравнения малых отклонений от движения по окружности можно упростить при достаточно больших скоростях движения V_i или при достаточно больших значениях кинематических параметров, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Случай больших скоростей движения. Согласно общей теории [1], скорости V_i считаются большими, если выполняются неравенства

$$\tau \gg \tau_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.3)$$

Здесь τ — наименьшее время переходных процессов по переменным q_1, q_2, \dots, q_n , а τ_i определяется выражениями

$$\tau_i = 2 \operatorname{Re} [\beta_i V_i (1 + \sqrt{1 - 4\alpha_i / \beta_i^2})]^{-1}$$

В случае криволинейного движения величины скоростей V_i должны быть также ограничены сверху, что вытекает из требования малости деформаций ξ_i, φ_i, χ_i .

Предполагая, что все эти условия выполнены и проведя рассуждения, аналогичные изложенным в [1], обнаружим, что область медленных движений определяется уравнениями

$$\theta_i' + \varphi_i + d\pi_i / ds_i = 0, \quad \alpha_i \xi_i - \beta_i \varphi_i - \gamma_i \chi_i - d\theta_i / ds_i = 0 \quad (3.4)$$

где π_i — квазиордината, соответствующая переменной $u_i \equiv \pi_i^\circ$. Исключая величины ξ_i, φ_i из (1.7) при помощи соотношений (3.4), находим

$$F_i = \frac{a_{1i}}{V_i} \theta_i^\circ - a_{2i} \theta_i' - \frac{a_{3i}}{V_i} u_i + a_{3i} \chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.5)$$

$$M_{\theta_i} = - \frac{b_{1i}}{V_i} u_i - b_{2i} \theta_i',$$

$$M_{\chi_i} = - \frac{b_{1i}}{V_i} \theta_i^\circ + b_{2i} \theta_i' + \frac{b_{2i}}{V_i} u_i - b_{3i} \chi_i$$

Здесь положительные коэффициенты a_{ki}, b_{ki} связаны с параметрами пневматика соотношениями

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \frac{a_i}{\alpha_i}, & a_{2i} &= \frac{a_i \beta_i}{\alpha_i}, & a_{3i} &= \frac{a_i \gamma_i}{\alpha_i} + \sigma_i N_i \\ b_{1i} &= \frac{\sigma_i N_i}{\alpha_i}, & b_{2i} &= \frac{\sigma_i N_i \beta_i}{\alpha_i}, & b_{3i} &= N_i \left(\frac{\sigma_i \gamma_i}{\alpha_i} + \rho_i \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя найденные выражения сил и моментов (3.5) в формулы (3.1), получим выражения R_j .

Случай больших значений кинематических параметров. Величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ считаются достаточно большими [1], если выполняются неравенства (3.3), где τ_i определяются выражениями $\tau_i = (\beta_i V_i)^{-1}$.

Введем малый параметр μ так, что выполняются соотношения

$$\mu\alpha_i = \alpha_i^\circ, \quad \mu\beta_i = \beta_i^\circ, \quad \mu\gamma_i = \gamma_i^\circ, \quad \mu\Omega_i = \Omega_i^\circ \quad (\Omega_i^\circ \equiv \theta_i^\circ)$$

где $\alpha_i^\circ, \beta_i^\circ, \gamma_i^\circ$ — конечные величины, а Ω_i° — малые величины порядка малых величин деформации. Запишем вторую группу кинематических уравнений (3.2) в виде

$$\mu(\theta_i'' + \varphi_i') = \alpha_i^\circ V_i \xi_i - \beta_i^\circ V_i \varphi_i - \gamma_i^\circ V_i \chi_i - \Omega_i^\circ$$

При достаточно малой величине μ имеем систему дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. В рассматриваемом случае быстрыми переменными являются суммы $\theta_i' + \varphi_i$. При $\mu \rightarrow 0$ в фазовом пространстве появляется поверхность медленных движений, устойчивая относительно быстрых движений, для которой

$$\varphi_i = \kappa_{1i} \xi_i - \kappa_{2i} \chi_i - (\beta_i V_i)^{-1} \Omega_i \quad (\kappa_{1i} = \alpha_i / \beta_i, \quad \kappa_{2i} = \gamma_i / \beta_i) \quad (3.7)$$

где κ_{1i} и κ_{2i} — коэффициенты увода.

Исключая переменные φ_i при помощи (3.7) из первой группы кинематических уравнений, получим

$$u_i + \xi_i'' + V_i \theta_i' + \kappa_{1i} V_i \xi_i - \kappa_{2i} V_i \chi_i - \beta_i^{-1} \Omega_i = 0 \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7) в выражения (1.6), находим

$$F_i = a_i \xi_i + \sigma_i N_i \chi_i, \quad M_{\chi_i} = -\sigma_i N_i \xi_i - \rho_i N_i \chi_i \quad (3.9)$$

$$M_{\theta_i} = \kappa_{1i} b_i \xi_i - \kappa_{2i} b_i \chi_i - b_i (\beta_i V_i)^{-1} \Omega_i$$

Таким образом, в рассматриваемом случае больших значений кинематических параметров уравнениями движения будут уравнения (2.3) и (3.8), в которых при вычислении R_j следует использовать выражения (3.9).

Уравнения (2.2), (2.3), (3.5) и соответственно (2.2), (2.3), (3.8) можно рассматривать как распространение обобщенной гипотезы увода [1] на случай криволинейного движения.

4. Примеры. 1°. Устойчивость качения баллонного колеса по окружности. Рассмотрим случай, когда угловая скорость ω собственного вращения колеса поддерживается постоянной, т. е. на движение колеса наложена дополнительная (реономная) связь $\omega = \text{const}$. Функция Лагранжа имеет вид

$$2L = m(x^2 + y^2) + A(\theta^2 + \chi^2) + 2\omega C\chi\theta + rN\chi^2$$

Здесь $N = mg$ — вес колеса, A, C — диаметральный и осевой моменты инерции, x, y — декартовы координаты центра колеса, r — расстояние от центра колеса до точки $K(x_1, y_1)$, координаты которой определяются соотношениями

$$x_1 = x - r\chi \sin \theta, \quad y_1 = y + r\chi \cos \theta \quad (4.1)$$

Пусть обобщенные силы $Q_x = Q_y = Q_\theta = Q_\chi = 0$. В соответствии с формулами (1.6), (2.2), (4.1) обобщенные силы R_j определяются выражениями

$$R_x = (a\xi + \sigma N\chi) \sin \theta, \quad R_y = -(a\xi + \sigma N\chi) \cos \theta \\ R_\theta = b_\varphi, \quad R_\chi = -(ar + \sigma N)\xi - (\rho + r\sigma)N\chi$$

Уравнения динамики колеса имеют вид

$$mx'' - (a\xi + \sigma N\chi) \sin^2 \theta = 0, \quad my'' + (a\xi + \sigma N\chi) \cos \theta = 0 \quad (4.2) \\ A\theta'' + \omega C\chi' - b\varphi = 0, \quad A\chi'' - \omega C\theta' + (ar + \sigma N)\xi - (r - r\sigma - \rho)N\chi = 0$$

Используя (4.1), от переменных x, y , перейдем к u, V посредством соотношений (3.1). Отбрасывая малые величины второго порядка и выше, находим

$$\begin{aligned} x \cos \theta^\circ + y \sin \theta^\circ &= V, & x \sin \theta^\circ - y \cos \theta^\circ &= u + r\chi \\ x'' \cos \theta^\circ + y'' \sin \theta^\circ &= 0, & x'' \sin \theta^\circ - y'' \cos \theta^\circ &= u' + r\chi' - V\Omega \end{aligned}$$

где $\Omega = \theta'^{\circ} = \text{const}$ — значение угловой скорости θ' при движении баллонного колеса по окружности. Вместо (4.2) получаем уравнения

$$\begin{aligned} mu' + mr\chi'' - mV\Omega - a\xi - \sigma N\chi &= 0, & A\theta'' + \omega C\chi' - b\varphi &= 0 \\ A\chi'' - \omega C\theta' + (ar + \sigma N)\xi - (r - r\sigma - \rho)N\chi &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

которые вместе с кинематическими уравнениями

$$u + \xi + V\theta' + V\varphi = 0, \quad \Omega + \theta'' + \varphi' - \alpha V\xi + \beta V\varphi + \gamma V\chi = 0 \quad (4.4)$$

образуют полную систему уравнений для определения $u, \theta, \chi, \xi, \varphi$. Стационарные значения $u_0, \chi_0, \xi_0, \varphi_0$ ($\theta^\circ = \Omega t$) при качении колеса по окружности радиуса $[R = V/\Omega = \omega r/\Omega$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} mV\Omega + a\xi_0 + \sigma N\chi_0 &= 0, & \Omega - \alpha V\xi_0 + \gamma V\chi_0 &= 0 \\ \omega C\Omega - (ar + \sigma N)\xi_0 + (r - r\sigma - \rho)N\chi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Условие существования нетривиальных решений уравнений (4.5) выполняется при единственном значении скорости $V = V_0$, где

$$V_0^2 = \frac{gr[a(r - \rho) + \sigma^2 N]}{(a\gamma + \alpha\sigma N)(d^2 + r^2) - rN[\alpha(r - \rho) - \gamma\sigma]} \quad (4.6)$$

Здесь d — радиус инерции колеса.

При значении $V = V_0$ получаем многообразие круговых движений колеса. Наклон χ_0 колеса и боковая деформация ξ_0 пневматика выражаются через радиус $R = V_0/\Omega$ описываемой окружности при помощи соотношений

$$\xi_0 = \frac{\Omega(\sigma N - m\gamma V_0^2)}{V_0(a\gamma + \alpha\sigma N)}, \quad \chi_0 = -\frac{\Omega(a + \alpha m V_0^2)}{V_0(a\gamma + \alpha\sigma N)} \quad (4.7)$$

Числитель выражения (4.6) всегда положителен. Знаменатель его в случае $a\gamma > \alpha N(1 - \sigma)$ положителен всегда, а в случае $a\gamma < \alpha N(1 - \sigma)$, что может случиться при больших значениях произведения αN (обычно величина $\sigma \approx 0.5 - 0.7$) знаменатель обращается в нуль при $r = r_*$. Поскольку используемая теория применима лишь при малых деформациях, следует ограничиться значениями $r \ll r_*$. При указанных условиях величина ξ_0 , как следует из предположения о положительности Ω, V_0 и из выражения (4.7), всегда положительна. Величина χ_0 , как следует из (4.7), всегда отрицательна.

Вид катящегося баллонного колеса показан на фиг. 2.

Для исследования устойчивости движения составим уравнения малых отклонений колеса от стационарного движения. Обозначая штрихом малые отклонения, из уравнений (4.3) — (4.5) получаем

$$\begin{aligned} mu'' + mr\chi'' - a\xi' - \sigma N\chi' &= 0, & A\theta''' + \omega C\chi'' - b\varphi' &= 0 \\ A\chi''' - \omega C\theta'' + (ar + \sigma N)\xi' - (r - r\sigma - \rho)N\chi' &= 0 \\ u' + \xi'' + V\theta' + V\varphi' &= 0, & \theta' + \varphi'' - \alpha V\xi' + \beta V\varphi' + \gamma V\chi' &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полученные уравнения (4.8) представляют собой также и уравнения малых отклонений колеса от прямолинейного движения, рассматриваемого как частный случай кругового.

Характеристическое уравнение системы (4.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} pP(p) &= 0 \\ P(p) &= p^6 + \beta V p^5 + [\alpha_0 + b_0 + (\alpha_1 + 1)\tau]p^4 + \beta V(\alpha_0 + \tau)p^3 + \\ &+ (\alpha_0 b_0 - \beta_0 + \gamma_1 \tau + \alpha_1 \tau^2)p^2 + \beta V(\gamma_0 \tau - \beta_0)p + \beta_1 b_0(\tau - \tau_0) \\ \alpha_0 &= a_0 + re - e_1, \quad \alpha_1 = \alpha k^{-2}, \quad \tau = k^2 V^2, \quad \tau_0 = k^2 V_0^2 = \beta_0 \beta_1^{-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\beta_0 = a_0 e_1 + g \sigma e, \quad \beta_1 = \gamma \gamma_0 k^{-1} + \alpha_1 (k g \sigma - e_1)$$

$$\gamma_0 = a_0 + e k^{-1}, \quad \gamma_1 = a_0 + \alpha_1 (b_0 - r k b_0 - e_1) + \gamma k^{-1} (b_0 + e k^{-1})$$

$$a_0 = \frac{a}{m}, \quad b_0 = \frac{b}{A}, \quad k = \frac{C}{rA}, \quad e = \frac{ar + \sigma N}{A}, \quad e_1 = \frac{N(r - r_0 \sigma)}{A}$$

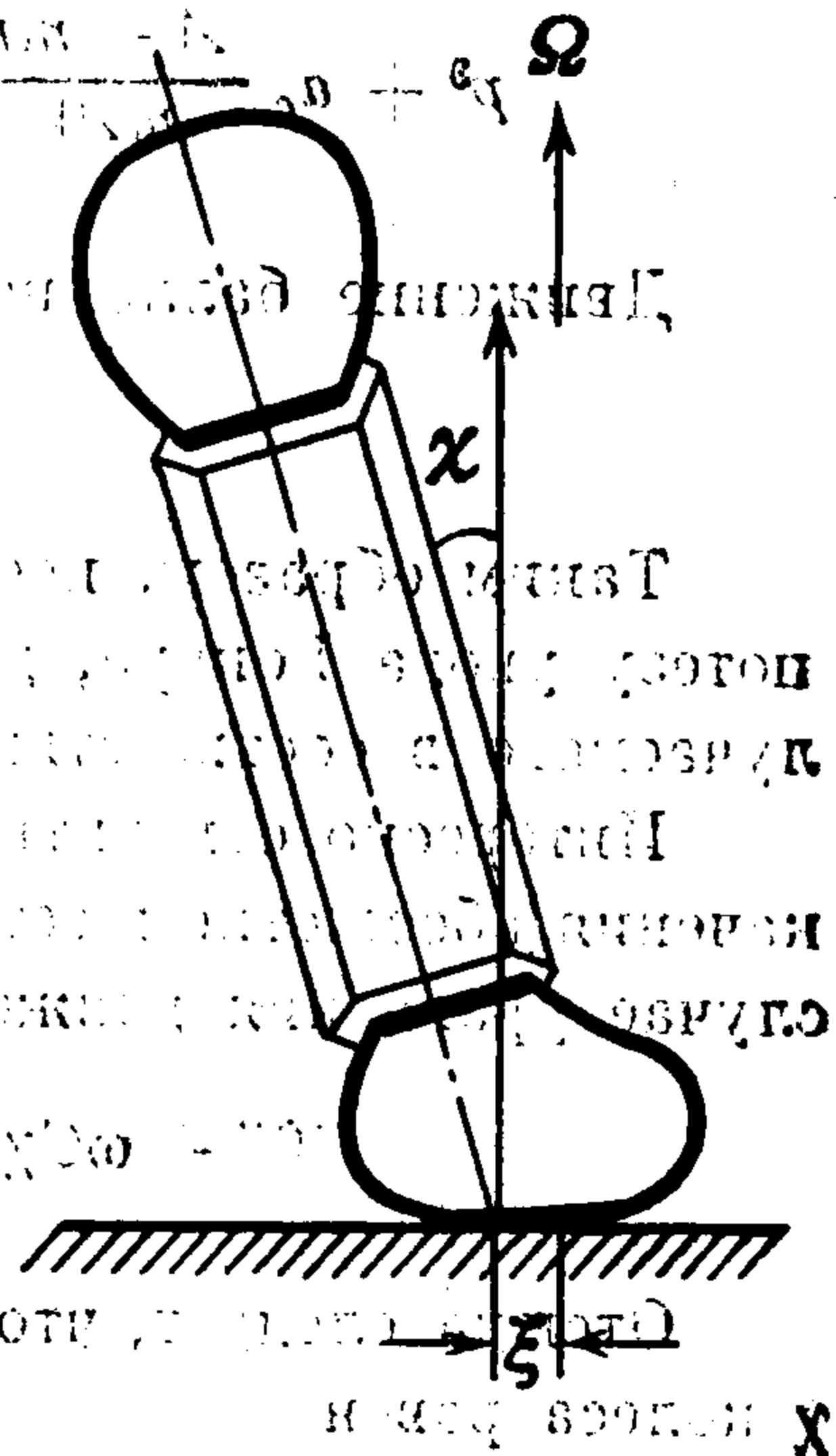
Нулевой корень характеристического уравнения (4.9) обусловлен многообразием стационарных движений баллонного колеса. В самом деле, установившиеся значения переменных в уравнениях (4.8) удовлетворяют соотношениям:

$$u_0' + V\theta_0' = 0, \quad \xi_0' = \varphi_0' = \chi_0' = 0$$

откуда следует, что стационарные движения образуют одномерное многообразие. Его физический смысл состоит в том, что движение колеса может установиться вдоль прямой произвольного направления. Устойчивость многообразия прямолинейных движений определяется корнями характеристического уравнения $P(p) = 0$.

При значении $V = V_0$ (т. е. $\tau = \tau_0$) свободный член полинома $P(p)$ обращается в нуль. Появляющийся при этом дополнительный нулевой корень характеристического уравнения обусловлен тем, что при $V = V_0$ рождается многообразие круговых движений баллонного колеса. Устойчивость этого многообразия определяется корнями характеристического уравнения

$$p^5 + \beta V_0 p^4 + [\alpha_0 + b_0 + (\alpha_1 + 1) \tau_0] p^3 + \beta V_0 (\alpha_0 + \tau_0) p^2 + (\alpha_0 b_0 - \beta_0 + \gamma_1 \tau_0 + \alpha_1 \tau_0^2) p + \beta V_0 (\gamma_0 \tau_0 - \beta_0) = 0$$



Фиг. 2

Многообразие круговых движений баллонного колеса устойчиво при выполнении неравенства

$$a_1 \beta_0^2 + a_2 \beta_0 \beta_1 + a_3 \beta_1^2 + b_0^2 \beta_1^3 > 0 \quad (4.10)$$

$$a_1 = \alpha_1 (b_0 + e k^{-1}) [\alpha_1 (k r - 1) + 1 - \gamma k^{-1}]$$

$$a_2 = (\gamma_1 - \gamma_0) (\alpha_0 \alpha_1 + b_0 + \gamma_0 - \gamma_1) + \alpha_1 (\alpha_1 \beta_0 - 2 b_0 \gamma_0)$$

$$a_3 = b_0 [\alpha_0 (\alpha_0 \alpha_1 + b_0 + \gamma_0 - \gamma_1) + 2 \alpha_1 \beta_0 - \gamma_0 b_0]$$

Для колеса с параметрами

$$N = 100 \text{ кг} \quad \alpha = 20 \text{ м}^{-2} \quad a = 2 \cdot 10^4 \text{ кг м}^{-1}$$

$$r = 0.5 \text{ м} \quad \beta = 10 \text{ м}^{-1} \quad b = 10^3 \text{ кг м рад}^{-1}$$

$$\rho = 0.1 \text{ м} \quad \gamma = 1 \text{ м}^{-1} \quad A = 0.5 \text{ кг м сек}^2$$

$$\sigma = 0.6 \quad m = 10 \text{ кг м}^{-1} \text{ сек}^2 \quad C = 1 \text{ кг м сек}^2$$

неравенство (4.10) выполняется, а величина $V_0 = 2.2 \text{ м/сек}$. Таким образом, качение баллонного колеса по окружности происходит при определенной скорости $V = V_0$, причем след средней плоскости колеса всегда параллелен касательной к окружности.

Для сравнения рассмотрим эту задачу, используя гипотезу увода Рокара [3]. Согласно этой гипотезе, при наличии увода на колесо действует боковая сила сопротивления уводу, равная $F = -a_c V^{-1} u - a_c \theta'$, где a_c — коэффициент сопротивления уводу. Используя эти выражения, получаем уравнения движения баллонного колеса:

$$m u' + m r \chi'' - m V \Omega + a_c V^{-1} u + a_c \theta' = 0, \quad A \theta'' + \omega C \chi' = 0$$

$$A \chi'' - \omega C \theta' - r N \chi - a_c r V^{-1} u - a_c r \theta' = 0$$

При стационарном режиме значения переменных u_0, χ_0 равны

$$u_0 = \frac{m V^2 \Omega}{a_c}, \quad \chi_0 = - \frac{\Omega V (C + m r^2)}{r^2 N} \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что в соответствии с гипотезой Рокара движения баллонного колеса по окружности возможны с любой скоростью V , причем след средней плоскости колеса образует с касательной к окружности постоянный угол

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{u_0}{V} = \operatorname{arctg} \frac{mV\Omega}{a_c}$$

Устойчивость движения колеса определяется корнями характеристического уравнения

$$p^3 + a_c \frac{A + mr^2}{mAV} p^2 + \frac{C^2V^2 - r^3NA}{r^2A^2} p + a_c \frac{C(C + mr^2)V^2 - r^3NA}{mr^2VA} = 0$$

Движение баллонного колеса устойчиво при выполнении неравенства

$$V^2 > r^3NA/C(C - A) \quad (4.12)$$

Таким образом, исследование движения баллонного колеса, опирающееся на гипотезу увода Рокара, дает результат, качественно отличающийся от результата, получаемого в соответствии с теорией М. В. Келдыша.

Интересно отметить, что аналогичный результат получается и при рассмотрении качения абсолютно жесткого колеса с классическими неголономными связями. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$A\theta'' + \omega C\chi' = 0, \quad (A + mr^2)\chi'' - \omega(C + mr^2)\theta' - rN\chi = 0$$

Отсюда следует, что при движении жесткого колеса по окружности угол наклона χ колеса равен

$$\chi_0 = -\omega\Omega(C + mr^2)/rN$$

что совпадает с выражением (4.11). Устойчивость многообразия круговых движений колеса определяется корнями характеристического уравнения

$$A(A + mr^2)p^2 + \omega^2C(C + mr^2) - rNA = 0$$

Следовательно, качение жесткого колеса обладает консервативной устойчивостью при выполнении неравенства $V^2 > r^3NA/C(C + mr^2)$ которое несущественно отличается от неравенства (4.12).

2°. *Устойчивость движения автомобиля по окружности.* Исследуем движение простейшей модели автомобиля на одинаковых баллонных колесах. Пусть колеса представлены эквивалентными передним и соответственно задним колесом, причем передние колеса повернуты влево на постоянный угол ψ .

Рассмотрим случай больших скоростей движения, когда для вычисления сил и моментов можно использовать выражения (3.5). В соответствии с обозначениями на фиг. 3 получаем уравнения движения автомобиля

$$\begin{aligned} mu_1' + 2a_2 uV^{-1} - ml_1\theta'' - mV\Omega + 2a_2\theta' - cV^{-1}\theta' &= -a_2\psi \\ c_1V^{-1}u_1 + mk^2\theta'' + c_2V^{-1}\theta' + c_1\theta' &= (a_2l_2 - b)\psi \\ c = 2a_1 + a_2l, \quad c_1 = a_2(l_1 - l_2) + 2b, \quad c_2 = a_1(l_2 - l_1) + l(a_2l_2 - b) \end{aligned}$$

Здесь k — радиус инерции автомобиля относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс.

При движении автомобиля по окружности стационарные значения u_1° , Ω переменных u_1 , θ' удовлетворяют уравнениям

$$2a_2u_1^\circ - (c + mV^2)\Omega = -a_2V\psi, \quad c_1u_1^\circ + c_2\Omega = (a_2l_2 - b)V\psi$$

Отсюда находим

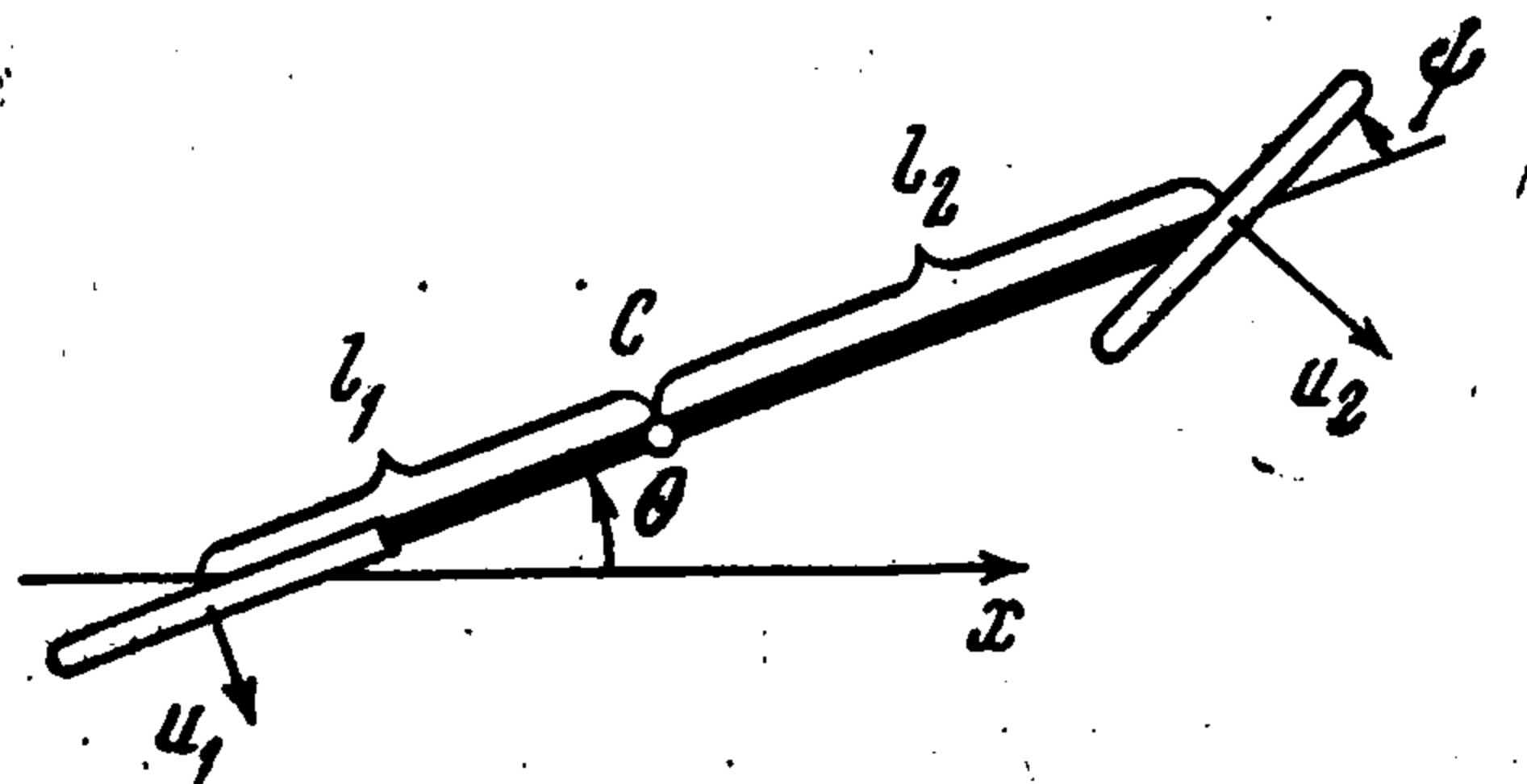
$$u_1^\circ = MV\psi [a_1(a_2l - 2b) + mV^2(a_2l_2 - b)], \quad \Omega = a_2^2lMV\psi \quad (4.13)$$

Здесь

$$M = [a_2^2 l^2 + 4a_1 b + c_1 m V^2]^{-1} \quad (4.14)$$

Используя (4.13) и очевидное соотношение $u_2 = u_1 - l\theta' + V\psi$, нетрудно найти и величину u_2°

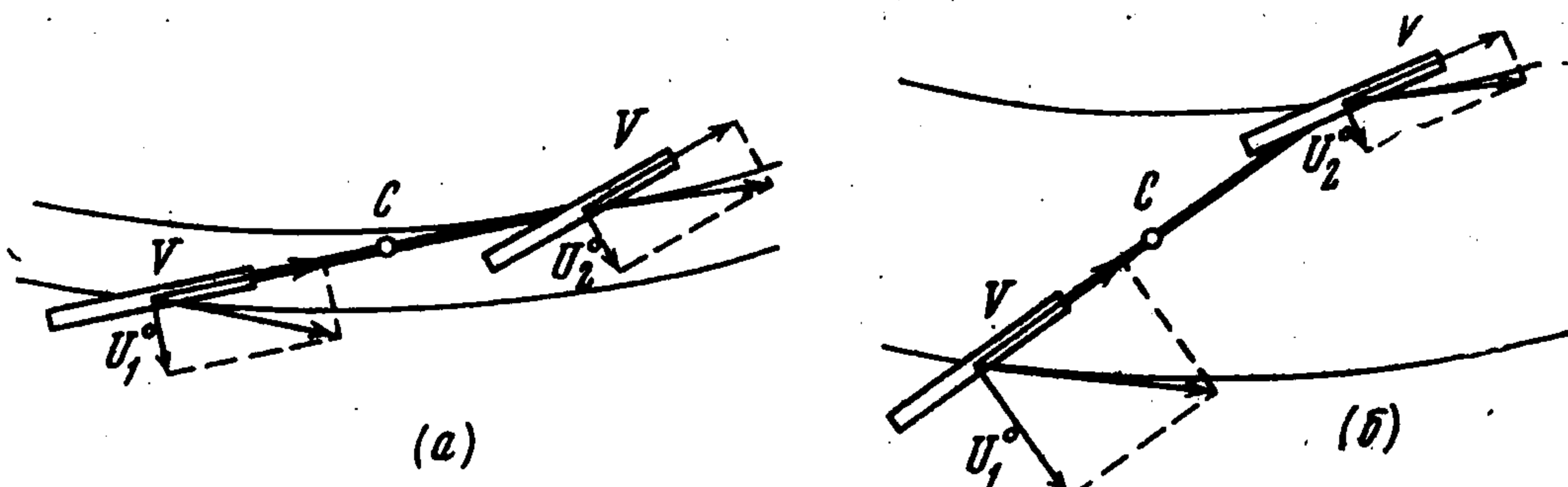
$$u_2^\circ = MV\psi [a_1(a_2 l + 2b) + mV^2 a_2 l_1 + b]$$



Фиг. 3

Пусть $\Omega > 0$, $V > 0$, тогда из второго соотношения (4.13) следует, что должно выполняться неравенство $M\psi > 0$. Таким образом, возможны два случая движения автомобиля по окружности:

- а) $M > 0$, $\psi > 0$ — обычный способ движения (фиг. 4, а);
- б) $M < 0$, $\psi < 0$ — необычный способ движения (фиг. 4, б).



Фиг. 4

Во втором случае передние колеса повернуты в сторону, обратную направлению поворота автомобиля¹. Согласно (4.14), этот случай осуществляется при выполнении неравенств

$$l_2 > l_1 + \frac{2b}{a_2}, \quad V^2 > \frac{a_2^2 l^2 + 4a_1 b}{m [a_2 (l_2 - l_1) - 2b]} \equiv V_*^2$$

когда центр масс автомобиля сдвинут к задним колесам, а скорость движения превышает некоторое критическое значение $V = V_*$.

Устойчивость многообразия движений автомобиля по окружности определяется корнями характеристического уравнения $mk^2 p^2 + m(2a_2 k^2 + c_1 l_1 + c_2) p + M = 0$.

Поскольку коэффициенты при p всегда положительны, движение автомобиля устойчиво при выполнении неравенства $M > 0$. Следовательно, обычный способ движения по окружности автомобиля с закрепленным рулем всегда устойчив, а необычный — всегда неустойчив.

В заключение отметим, что исследование движения рассматриваемой модели при помощи гипотезы увода Рокара дает качественно такой же результат. Это объясняется тем, что если при качении одного баллонного колеса в первом примере момент сил, обусловленный скручиванием пневматика, существен, то во втором примере соответствующие моменты на передних и задних колесах существенного влияния на динамику автомобиля не оказывают.

Поступила 19 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем, М., «Наука», 1967.
2. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Тр. ЦАГИ, 1945, № 564.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М., Изд. иностр. лит., 1959.

¹ Возможность необычного способа движения автомобиля по окружности была обнаружена А. А. Хачатуровым путем расчета на аналоговой ЭВМ.