

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНИКА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ УЧАСТОК СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА

Ю. С. Федосенко, М. И. Фейгин

(Горький)

Исследуется новый для систем с соударениями тип периодических движений, включающих участок траектории, который состоит из бесконечной последовательности ударно-безударных участков. Вопрос о существовании в динамических системах с ударными взаимодействиями такой последовательности, названной по аналогии с другими кусочно-непрерывными системами скользящим режимом, рассматривался в работе ¹ [1]. Случай бесконечной последовательности соударений, имеющий место в динамической модели часового хода, был изучен в работе [2], а возникающий в процессе ударного торможения при наличии сил сухого трения, исследован в работе [3] и назван квази-пластическим ударом.

Решается задача построения в фазовом пространстве границ области скользящих движений, а также задача выделения области существования устойчивых периодических движений с участком скользящего режима в пространстве параметров одномассового виброударника.

Результаты численных расчетов приводятся для практически наиболее важных колебаний с периодом внешней силы.

В многочисленных исследованиях динамических моделей систем с ударными взаимодействиями было доказано существование режимов различной сложности, характеризующей кратностью периода движения периоду возмущающей силы и числом ударов за период движения. При этом выявилась тенденция к значительному сужению в пространстве параметров областей существования и устойчивости режима по мере его усложнения.

Выделенные в пространстве параметров виброударника, а также простейшей системы с двумя ударными парами [4] области существования устойчивых периодических движений с бесконечной сходящейся последовательностью соударений оказались такого же порядка, что и соответствующие области одноударных режимов.

Это обстоятельство указывает на практическую значимость движений с участком скользящего режима для систем с соударениями. Именно наличием таких движений можно объяснить в рамках гипотезы Ньютона ряд оригинальных экспериментальных результатов: конечное время удара вибромолота при отличном от нуля коэффициенте восстановления скорости [5-7]; характер взаимодействия ходового колеса морского хронометра с импульсным камнем в виде первого не вполне упругого удара и второго неупругого с последующим движением в кинематической связи [8].

1. Построение в фазовом пространстве границ области скользящих движений. Принимаемая для рассмотрения модель виброударника представляет собой массу m , закрепленную на пружине с линейной характеристикой k и подверженную влиянию внешнего возмущающего воздействия в виде суммы $F \sin \omega t$ и некоторой постоянной силы P .

¹ Приведенное в [1] доказательство, справедливое в случае отсутствия при соударениях скачков ускорений, легко распространяется на случай скачков ускорений, вызванных силами линейного трения [4].

Перемещение x массы m ограничено неподвижной преградой, при соприкосновении с которой происходит мгновенное ударное взаимодействие с коэффициентом восстановления скорости R . В недеформированном состоянии упругой связи зазор между массой m и неподвижной преградой характеризуется параметром D .

При обычных предположениях [9], выбирая в качестве безразмерных переменных $y = F^{-1} \omega^2 mx$, $\tau = \omega t$ приходим к следующим уравнениям: безударных движений

$$y'' + \lambda^2 y = -\lambda^2 d + \sin \tau, \quad y > 0 \quad (1.1)$$

ударных взаимодействий

$$y_+^{\cdot} = -R y_-^{\cdot}, \quad y = 0 \quad (1.2)$$

возможного состояния кинематической связи между массой и преградой

$$y = y^{\cdot} = 0, \quad \sin \tau - \lambda^2 d < 0 \quad (1.3)$$

Здесь за начало отсчета $y = 0$ принято положение фазовой точки на поверхности ударных взаимодействий Π . Через y_-^{\cdot} , y_+^{\cdot} обозначены скорости массы m соответственно до и после удара. Безразмерные собственная частота виброударника λ и зазор d выражаются через исходные параметры по формулам

$$\lambda^2 = km^{-1} \omega^{-2}, \quad d = -F^{-1} (m \omega^2 D + P \lambda^{-2})$$

Таким образом, поведение системы (1.1) — (1.3) зависит от трех существенных параметров λ , d , R , изменяющихся в пределах

$$0 \leq \lambda < \infty, \quad |d| < \infty, \quad 0 \leq R < 1$$

Фазовое пространство системы, образованное координатами y , y^{\cdot} , τ , трехмерно. В соответствии с [1] на поверхности Π в окрестности границы

$$y = 0, \quad y^{\cdot} = 0, \quad y'' < 0$$

располагается область Π_s — пластинка скользящих движений. При попадании изображающей точки M (y , y^{\cdot} , τ) на Π_s дальнейшее ее движение происходит по фазовой траектории, состоящей из бесконечной последовательности ударно-безударных участков и заканчивается в «точке схода» M_0 , координаты которой определяются из условий

$$y = y^{\cdot} = y'' = 0, \quad y''' > 0$$

Для изучаемой математической модели виброударника координаты точки схода равны

$$y_0 = 0, \quad y_0^{\cdot} = 0, \quad \tau_0 = \arcsin \lambda^2 d \quad (1.4)$$

При дальнейшем движении изображающая точка по выходящей из точки M_0 фазовой траектории покидает область Π_s и уходит в полупространство $y > 0$.

Обозначим через T точечное отображение поверхности Π в себя, порожаемое последовательностью из двух участков движения: ударного взаимодействия и безударного движения. Тогда точка схода M_0 является пределом сходящейся последовательности преобразований T^i области Π_s в себя при $i \rightarrow \infty$.

Задача отыскания точной границы пластинки скользящих движений заключается в выделении некоторого предельного многообразия, в окрестности которого с одной стороны находятся только точки, преобразуемые последовательностью отображений T^i в точку схода M_0 , а с другой стороны таких точек нет. Искомая граница области Π_s состоит из отрицательной] полуоси y'' и некоторой кривой W , выходящей из точки M_0 и располагающейся в области [1] $y = 0, y' < 0, y'' < 0$.

Отсюда следует простой метод выделения граничной кривой W при помощи итерационной процедуры T^{-i} — обратных точечных преобразований: достаточно построить последовательность приближений $W_i = T^{-i}(W_0)$, для которой

$$W = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{-i}(W_0)$$

Здесь W_0 — начальное приближение. Процесс W_i сходится к предельному многообразию W внутри области Π_s , если $W_0 \in \Pi_s$, и сходится извне, в случае $W_0 \notin \Pi_s$. Заметим, что в качестве исходного приближения W_0 может быть принят исходящий из точки M_0 и расположенный в полуплоскости $y = 0, y' < 0$ участок произвольной кривой.

В системе (1.1) — (1.3) величина ускорений при соударениях сохраняется. Поэтому для задания начального приближения $W_0 \in \Pi_s$ воспользуемся условиями принадлежности к пластинке скользящих движений следующей кривой [1]:

$$\begin{aligned} 0 < Y_* < y'''(\tau) < Y, & \quad \frac{9R-5}{12R} < \frac{Y_*}{Y} \\ 0 < -y''(\tau) < \frac{2Y\tau_*}{3 - \sqrt{4+5R}}, & \quad 0 < \frac{-y'(\tau)}{[y''(\tau)]^2} < \frac{5(1-R)}{24RY} \end{aligned}$$

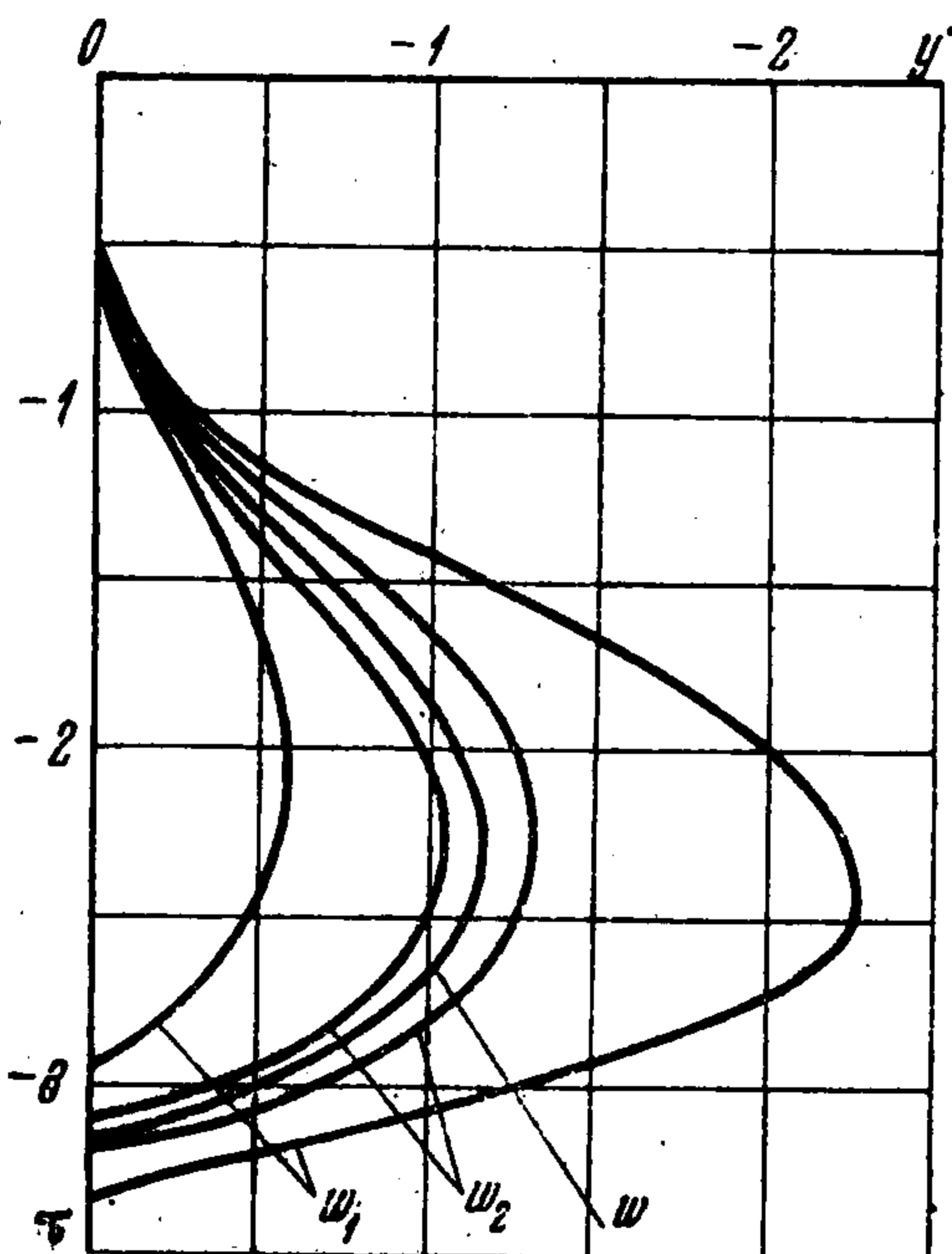
В точке] схода (1.4) величина $y'''(\tau) = \cos \tau$ и, следовательно, ограничена сверху значением $Y = 1$. Решение $y(\tau)$ уравнения безударного движения (1.1) записывается через функции, ряды Тейлора для которых имеют неограниченные радиусы сходимости τ_* . В результате получаем начальное приближение в виде

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{5(1-R)}{24R} (\lambda^2 d - \sin \tau)^2 \\ -\frac{\pi}{2} < \tau < \arcsin \lambda^2 d, & \quad \cos \tau > \frac{9R-5}{12R} \end{aligned}$$

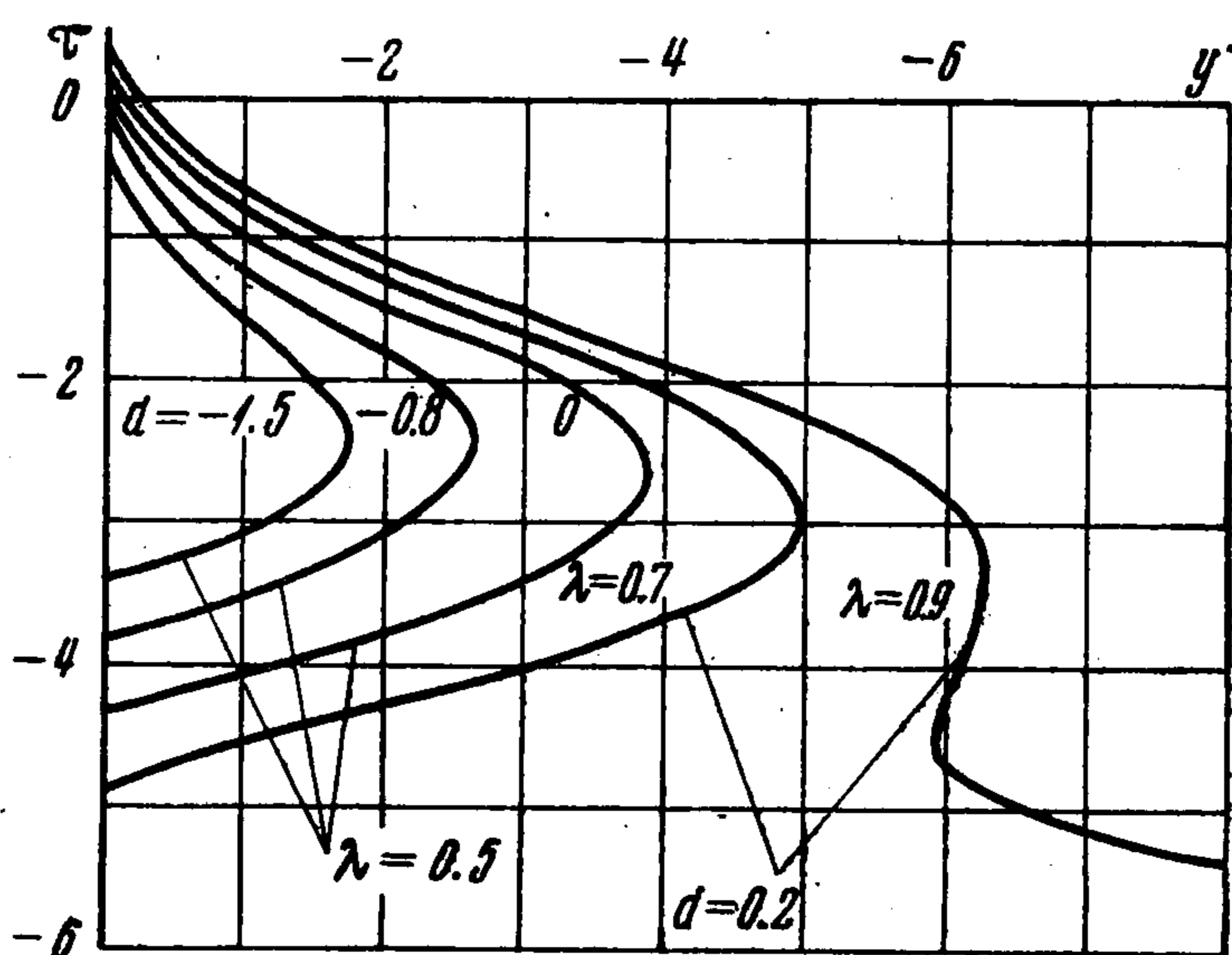
С другой стороны, в качестве начального приближения W_0 можно принять примыкающий к точке схода отрезок полуоси

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' > 0$$

Такое начальное приближение позволяет реализовать процесс выделения области скользящего режима построением последовательности итераций W_i , расположенных вне пластинки Π_s .



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения точечного отображения T^{-i} поверхности Π в себя, определяемое системой уравнений (1.1), (1.2), запишем в виде

$$\lambda^{-1} (y_i^* - \alpha \cos \tau_i) \sin \lambda (\tau_i - \tau_{i-1}) + d + (\alpha \sin \tau_i - d) \cos \lambda (\tau_i - \tau_{i-1}) - \alpha \sin \tau_{i-1} = 0 \quad (1.5)$$

$$\lambda (\alpha \sin \tau_{i-1} - d) \sin \lambda (\tau_i - \tau_{i-1}) - y_i^* + \alpha \cos \tau_i - (Ry_{i-1}^* + \alpha \cos \tau_{i-1}) \cos \lambda (\tau_i - \tau_{i-1}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\alpha = (\lambda^2 - 1)^{-1}$$

При помощи рекуррентных соотношений (1.5), (1.6)¹ определяются координаты последующей точки M_{i-1} , если известны координаты предыдущей M_i . Задавая последовательно точки M_i на кривых W_0, W_1, W_2, \dots , получаем точки M_{i-1} , принадлежащие кривым W_1, W_2, W_3, \dots

На фиг. 1 приведены результаты расчета последовательности итераций W_i при следующих значениях параметров: $R = 0.2$, $\lambda = 0.3$, $d = -5.3$.

Семейство предельных многообразий W , представленное на фиг. 2, построено при $R = 0.2$ и различных значениях параметров λ и d . Во всех случаях рассматривались два процесса последовательных приближений W_i , расположенных соответственно внутри и вне области Π_s . Отметим, что при $i \geq 3$ кривые W_i обеих последовательностей практически сливаются.

Размеры пластинки скользящих движений в отрицательном направлении оси y^* , как следует из уравнений (1.5), (1.6), неограниченно возрастают при $R \rightarrow 0$.

2. Построение в пространстве параметров области существования устойчивых периодических движений с участком скользящего режима. В точке схода скользящий режим заканчивается. Последующее движение осуществляется по выходящей из точки M_0 фазовой траектории безудар-

¹ Исследование этих уравнений возможно также методом, развитым в работе [11].

ных движений до некоторого момента времени $\tau_1 > \tau_0$, соответствующего очередному приходу траектории на поверхность Π в точку M_1 . Соотношения, определяющие движение виброударника на интервале времени $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$, получаем из решения уравнения (1.1) с начальными условиями, равными координатам точки схода (1.4). В результате для определения координат точки $M_1(0, y_1^*, \tau_1)$ имеем систему уравнений:

$$\lambda [d - \alpha \sin \tau_1 + (\alpha \sin \tau_0 - d) \cos \lambda (\tau_1 - \tau_0)] + \alpha \cos \tau_0 \sin \lambda (\tau_1 - \tau_0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\lambda (d - \alpha \sin \tau_0) \sin \lambda (\tau_1 - \tau_0) + y_1^* + \alpha [\cos \tau_0 \cos \lambda (\tau_1 - \tau_0) - \cos \tau_1] = 0 \quad (2.2)$$

Здесь τ_1 — наименьший корень уравнения (2.1), удовлетворяющий условию $\tau_1 > \tau_0$.

Если фазовая точка M_1 располагается в границах области Π_s , дальнейшее движение в течение некоторого времени вновь будет скользким режимом. Период $2\pi n$ таких простейших вынужденных колебаний с участием скользкого режима определяется как промежуток времени между двумя последовательными прохождениями фазовой точки через точку схода M_0 . Через $n = 1, 2, 3, \dots$ обозначена кратность периода вынужденных колебаний периоду внешнего гармонического воздействия.

В пространстве параметров область существования периодических движений с участком скользкого режима расположена между двумя поверхностями. Одна из них C_s соответствует вырождению периодических движений с бесконечной последовательностью соударений в режимы с конечным числом ударов за период. Другая бифуркационная поверхность определяется как граница области существования действительных значений τ_0 , выделяемой неравенством $|\lambda^2 d| \leq 1$.

Очевидно, поверхность C_s представляет такие сочетания значений параметров λ, d, R , которые обеспечивают принадлежность точки M_1 соответствующему граничному многообразию $W(\lambda, d, R)$.

Таким образом, указанные свойства бифуркационных поверхностей позволяют выделить в пространстве параметров изучаемой динамической системы область существования периодических движений с участком скользкого режима.

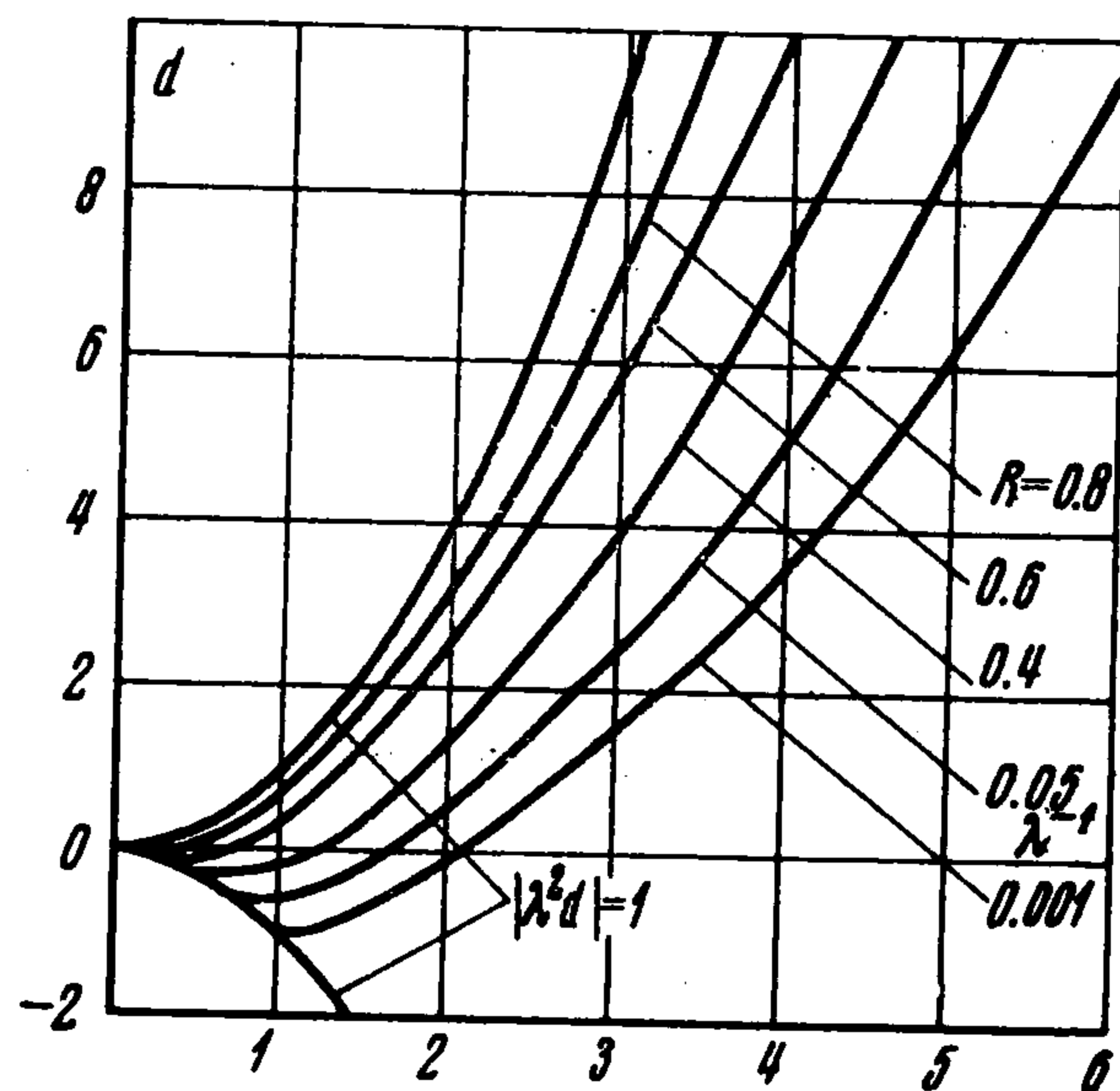
Соответствующие вынужденные колебания устойчивы, так как размерность отображаемого в себя многообразия (точка схода) равна нулю.

Описанный общий подход к построению граничной поверхности C_s сводится к выполнению некоторой вычислительной схемы, хорошо приспособленной по своей структуре к реализации в виде машинного алгоритма. Поэтому дальнейшие исследования проводились при помощи ЭВМ.

На фиг. 3 представлены отдельные сечения D_{s1} области существования устойчивых периодических движений с участком скользкого режима плоскостями $R = \text{const}$. Индекс 1, входящий в обозначение указанных сечений означает, что кратность периодов $n = 1$. Область D_{s1} для некоторого значения R расположена между границей $|\lambda^2 d| = 1$ и соответствующей кривой из приведенного на фигуре семейства.

Из полученных результатов следует, что устойчивые периодические движения с участком скользящего режима могут осуществляться как при положительных, так и при отрицательных зазорах при любых значениях коэффициента восстановления скорости $0 < R < 1$. В случае малых значений этого коэффициента интервалы изменения параметров λ , d весьма широкие.

Сравнение с результатами работы [9] показывает, что при $R \rightarrow 0$ граница области D_{s1} непрерывно переходит в границу области существования и устойчивости простейших одноударных колебаний с остановкой. Таким образом, при достаточно плавном увеличении R от нуля рождение периодических движений с конечным числом ударов за период из одноударных колебаний с остановкой происходит через переход последних в колебания с участком скользящего режима.



Фиг. 3

3. Обсуждение результатов. Моделирование. Известно, что в рамках периодических движений с конечным числом ударов за период поведение рассматриваемой модели дает неудовлетворительное совпадение с экспериментом при малых значениях коэффициента восстановления скорости.

Периодические движения, зарегистрированные в эксперименте [5,6], характеризуются существенно отличной от нуля длительностью ударных взаимодействий, а также расширением, по сравнению с полученной теоретически [9], области существования и устойчивости в пространстве параметров в сторону больших значений λ . Эти результаты не представляется возможным обосновать, рассматривая периодические движения с конечным числом ударов за период: области их существования настолько сужаются, что не перекрывают неизбежного разброса параметров реальных конструкций. Идеализация ударных взаимодействий как абсолютно неупругих также не позволяет построить удовлетворительную расчетную схему.

Результаты данной работы указывают на возможность физически ясного объяснения наблюдаемого несоответствия теории и экспериментальных данных существованием скользящего режима. Действительно, при $R \rightarrow 0$ он может иметь место в неограниченно расширяющейся области фазового пространства, а периодические движения с участком скользящего режима реализуются в значительной области пространства параметров, примыкающей к области одноударных колебаний.

При общей весьма значительной продолжительности скользящего режима длительность отдельных участков безударных движений быстро уменьшается по мере приближения фазовой точки к точке схода. Поэтому, имея в виду ограниченную точность эксперимента, существенную длительность ударных взаимодействий [5-6] можно естественно объяснить в соответствии с гипотезой Ньютона как продолжительность скользящего режима. Опытно наблюдаемое расширение областей существования одно-

ударных периодических движений происходит вследствие плохо распознаваемого отличия их от периодических движений с участком скользящего режима при значениях параметров вблизи границы S_3 .



Фиг. 4

Основные результаты, полученные в этой работе, были подтверждены исследованием уравнений (1.1) — (1.3) на аналоговой машине. Здесь предусматривалось переключение схемы [10] на моделирование движения соударяющихся элементов в кинематической связи (1.3) при достаточной малости относительных послеударных скоростей в скользящем режиме.

На фиг. 4, а, б представлены осциллограммы периодических движений с участком скользящего режима при значениях параметров из D_{s1}

$$(a) \quad R = 0.6, \quad d = 1.6, \quad \lambda = 1.5$$

$$(б) \quad R = 0.15, \quad d = -0.01, \quad \lambda = 0.97$$

В заключение отметим, что несложные исследования особенностей существования скользящего режима в сочетании с машинной реализацией итерационного процесса соответствующих точечных преобразований позволяют для одномассового виброударника провести достаточно полное исследование периодических движений, включающих бесконечную последовательность соударений.

Поступила 11 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгин М. И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
2. Баутин Н. Н. Динамическая модель часового хода без собственного периода. Инженерный сб., 1953, т. 16.
3. Нагаев Р. Ф., Нахамкин Л. А. О квазипластическом ударе. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 1.
4. Фейгин М. И. Особенности динамики систем с ударными взаимодействиями, связанные с существованием скользящих движений. Сб. «Механика машин», М., «Наука», 1971, вып. 31—32.
5. Лукомский С. И. Исследование режимов работы вибромолотов. Тр. ВНИИ-Стройдормаша, М., 1959, вып. 24.
6. Лукомский С. И. Вопросы обоснования расчетной схемы вибромолота. Тр. ВНИИСтройдормаша, М., 1963, вып. 33.
7. Федосенко Ю. С. К обоснованию одного метода расчета динамических систем виброударного погружения. Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т. 13, № 8.
8. Баутин Н. Н., Чернягин Б. М. Теоретическое и экспериментальное исследование зависимости динамических характеристик морского хронометра от положения колодки спирали баланса. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 2.
9. Беспалова Л. В. К теории виброударного механизма. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 5.
10. Фейгин М. И. Результаты изучения на модели системы с ударными взаимодействиями. Тр. Горьковск. ин-та инж. водн. трансп. М., «Высшая школа», 1967, вып. 83.
11. Нагаев Р. Ф. Об аналитическом описании квазипластического удара. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 4.