Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕД

Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин

(Ленинград)

Получены уравнения движения нематических жидкокристаллических сред в магнитном поле, а также уравнение теплопроводности. Наряду с условием неразрывности и уравнением состояния эти соотношения определяют поля девяти величин, характеризующих нематическую жидкость — плотности, давления, температуры, орта локальной оси анизотропии, скорости коллективного вращения молекул около своих «длинных» осей и вектора поступательной скорости. Сформулированы начальные и граничные условия. Рассмотрены частные случаи: равновесие среды в однородном магнитном и температурном полях, дисинклинации, ориентационной погранслой, а также течение в плоском капилляре в магнитном поле и увлечение жидкости вращающимся магнитным полем. На основе полученных результатов дано объяснение ряда эффектов, обнаруженных ранее на опыте.

Жидкие кристаллы занимают на термодинамической шкале состояний промежуточное (мезофазное) положение между анизотропным кристаллом и изотропной жидкостью. Существуют две основных разновидности мезофаз: смектическая и нематическая. В жидкокристаллической среде смектического типа сохраняется одномерный дальний координационный порядок — молекулы организованы в регулярно расположенные параллельные монослои. В среде нематического типа вовсе отсутствует дальний порядок в пространственном расположении молекул, как в обычной жидкости, но в отличие от жидкости и подобно твердому кристаллу сохраняется дальний ориентационный порядок «длинных» молекулярных осей. Ориентационный порядок характеризуется в каждой точке среды осью среднемолекулярной ориентации, которая одновременно является локольной осью симметрии среды.

По механическим свойствам нематические среды весьма близки к жидкостям. Поведение нематических жидкостей в силовом, термическом, магнитном и электрическом полях обладает, как показывает опыт [1, 2], рядом аномалий (анизотропия вязкости, масштабный эффект, ориентация в гидродинамическом потоке, увлечение среды вращающимся магнитным полем и др.).

Своеобразный комплекс механических свойств делает жидкокристаллические среды интересным объектом исследования с точки зрения механики сплошных сред. В настоящее время наиболее развита гидростатическая теория [3–9]. В работах [10–12] рассматривается линейная гидростатика с учетом теплопроводности и эффектов вращательной вязкости. Гидродинамическая теория с учетом упругих и тепловых явлений в магнитном поле только еще развивается [13,14]. Некоторые результаты имеются в [9].

Жидкие кристаллы относятся [15] к так называемым моментным средам или средам с вращательными степенями свободы. На феноменологическом уровне эти степени свободы учитываются в асимметрической механике сплошных сред. В работах [13, 14] на основе идей асимметрической механики [16, 17] развита общая гидродинамическая теория нематических жидкостей с учетом упругих, термических и магнитных эффектов. Цель настоящей работы — получить отсюда замкнутую систему уравнений движения, сформулировать граничные и начальные условия, выяснить наиболее существенные особенности уравнений и рассмотреть простейшие случаи движения нематических жидкостей.

Законы сохранения импульса и собственного момента количества движения, массы и локального момента инерции, а также уравнение баланса энтропии имеют вид

$$\rho v_i^{\cdot} = \frac{\partial \sigma_{in}}{\partial x_n} + \rho f_i, \qquad \rho (I_{in}\alpha_n)^{\cdot} = \frac{\partial \mu_{in}}{\partial x_n} - \sigma_{nm}\, \epsilon_{imn} + \rho m_i \tag{0.1}$$

$$\rho^{\cdot} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \qquad I_{in}^{\cdot} - (\delta_{ri}\, \epsilon_{mpn} + \delta_{rn}\, \epsilon_{mpi})\, w_m I_{pr} = 0 \tag{0.2}$$

$$(\rho s)^{\cdot} + \operatorname{div}(\mathbf{q}/T) = \Theta, \qquad \Theta \geqslant 0 \tag{0.3}$$

Здесь σ_{in} и μ_{in} — несимметричные тензоры напряжений и моментных напряжений, ρf_i и ρm_i — объемные плотности внешних сил и моментов, v_i — скорость поступательного движения малого участка среды, α_i — угловая скорость собственного вращения в этом участке, I_{in} — локальный момент инерции, ρ, T — плотность среды и абсолютная температура, ϵ_{inm} — тензор Леви-Чивита, w_i — угловая скорость вращения триедра главных осей тензора I_{nm}, s — энтропия, отнесенная к единице массы, q_i — тепловой поток, Θ — производство энтропии в необратимом процессе, рассматриваемое как заданная функция. Точкой обозначена субстанциональная производная.

Для нематической среды локальный момент инерции I_{nm} выражается [13] через главные значения тензора инерции молекулы (i_1, i_2, i_3), ее массу m, структурный параметр j, характеризующий локальную степень ориентации длинных молекулярных осей, и орт L_i оси нематического молекулярного порядка (эквивалентной оси анизотропии среды)

$$I_{nm} = I_{\perp}\delta_{nm} + (I_{\parallel} - I_{\perp})\, L_n L_m$$

$$I_{\perp} = \frac{i_1 + i_2}{2m} + \frac{2i_3 - i_2 - i_1}{6m}(1 - j), \qquad I_{\parallel} = \frac{i_3 + i_2}{2m} + \frac{2i_3 - i_2 - i_1}{6m}(1 + 2j) \tag{0.4}$$

Собственная угловая скорость α_i для нематической среды имеет вид

$$\alpha_i = w_i + L_i \psi, \qquad w_i = L_n L_m^{\cdot}\, \epsilon_{inm}, \qquad \psi = \lim_{\Delta N \to dN} \frac{1}{\Delta N} \sum_{\alpha=1}^{\Delta N} \psi^{\alpha} \tag{0.5}$$

Здесь w_i — скорость вращения оси анизотропии L, являющейся одновременно главной осью тензора I_{nm}; $L_i\psi$ — средняя скорость вращения молекул вокруг своих центральных осей, параллельных оси L; ψ^{α} — молекулярная угловая скорость, ΔN — число молекул в малом участке среды. Если выполняются условия $I_{\perp}^{\cdot} = I_{\parallel}^{\cdot} = 0$ и первое из соотношений (0.4), что в дальнейшем и принимается, то закон сохранения локального момента инерции выполняется тождественно.

Перейдем теперь к определяющим соотношениям, полученным в [13].

Упругие явления в нематических средах, связанные с изменением удельного объема и возникновением градиентов направлений оси L, описываются законами упругости

$$p = p^{\circ} + \alpha(\vartheta - \vartheta^{\circ}) \tag{0.6}$$

$$\begin{gathered} T_{in} = -p\delta_{in} - d_{1122} R_{ni} R_{mm} - d_{1212} R_{\alpha n} R_{\alpha i} - \\ - d_{1221} R_{n\alpha} R_{\alpha i} - (d_{1313} - d_{1212})\, R_{\alpha\beta} R_{\alpha i} L_{\beta} L_n \end{gathered} \tag{0.7}$$

$$\begin{gathered} M_{in} = M_{in}^{\circ} + d_{1212}(R_{in} - R_{i\alpha} L_{\alpha} L_n) + d_{1122}(\delta_{in} - L_i L_n)\, R_{mm} + \\ + d_{1221}(R_{ni} - R_{n\alpha} L_{\alpha} L_i) + d_{1313}\, R_{i\alpha} L_{\alpha} L_n, \quad R_{in} = L_{\alpha} \frac{\partial L_{\beta}}{\partial x_n}\, \epsilon_{i\alpha\beta}, \quad R_{in}^{\circ} = 0 \end{gathered} \tag{0.8}$$

Здесь p — давление, ϑ—удельный объем T_{in}, M_{ni} — упругие напряжения и упругие моментные напряжения, R_{in} — тензор ориентационных градиентов. Нулевым верхним индексом отмечены значения величин в недеформированном состоянии. Зависящие от температуры материальные коэффициенты α и d_{1122}, d_{1212}, d_{1221}, d_{1313} представляют сжимаемость среды и упругость континуума направлений.

С необратимыми процессами внутреннего трения связано вязкое течение, локальное вращение оси анизотропии L относительно окружающего участка среды, а также молекулярное вращение вокруг осей, параллельных L. Диссипативная функция и следующие из нее реологические соотношения [13] имеют вид

$$T\Theta = -q_i T^{-1} \partial T / \partial x_i + \Pi_{(in)} v_{(in)} + \Pi_{[in]} (\omega - \alpha)_m \epsilon_{imn} + N_\alpha n_\alpha \quad (0.9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(in)} &= a_1 v_{(in)} + {}^1/_2 a_2 (v_{(i\alpha)} L_\alpha L_n + v_{(\alpha n)} L_\alpha L_i) + \\ &+ (a_3 L_i L_n + a_4 \delta_{in}) L_\alpha L_\beta v_{(\alpha\beta)} + (a_4 L_i L_n + a_5 \delta_{in}) v_{(mm)} + \\ &+ {}^1/_2 a_6 (L_n L_\alpha \epsilon_{mi\alpha} + L_i L_\alpha \epsilon_{mn\alpha}) (\omega - \alpha)_m \end{aligned} \quad (0.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{[in]} &= {}^1/_2 a_6 (v_{(n\alpha)} L_\alpha L_i - v_{(i\alpha)} L_\alpha L_n) - \\ &- {}^1/_2 [2a_7 \epsilon_{min} + a_8 (L_n L_\alpha \epsilon_{mi\alpha} + L_i L_\beta \epsilon_{m\beta n})] (\omega - \alpha)_m \end{aligned} \quad (0.11)$$

$$N_i = (a_9 \delta_{i\alpha} + a_{10} L_i L_\alpha) n_\alpha - bT^{-1} L_\alpha \partial T / \partial x_\beta \epsilon_{i\alpha\beta} \quad (0.12)$$

$$n_i = L_n \partial \alpha_n / \partial x_i; \quad \omega_i = {}^1/_2 \operatorname{rot}_i \mathbf{v}, \quad v_{(in)} = {}^1/_2 (\partial v_i / \partial x_n + \partial v_n / \partial x_i)$$

Здесь $\Pi_{(in)}$ и $\Pi_{[in]}$ — симметричная и антисимметричная части вязкого тензора напряжений, $L_i N_n$ — тензор вязких моментных напряжений, $v_{(in)}$ — симметричный тензор градиентов скоростей. Материальные коэффициенты с a_1 по a_8 ответственны за объемную, сдвиговую и вращательную вязкость, а a_9 и a_{10} — коэффициенты «моментной» вязкости, b—гиротермический коэффициент, характеризующий возникновение вязких моментных напряжений в поле температурных градиентов. Полный тензор напряжений и моментных напряжений есть сумма соответствующих упругих и вязких составляющих

$$\sigma_{in} = T_{in} + \Pi_{in}; \qquad \mu_{in} = M_{in} + L_i N_n$$

Необратимые процессы в жидких кристаллах связаны также с теплопроводностью. Закон теплопроводности имеет вид [13]

$$q_i = -[\lambda_\perp \delta_{in} + (\lambda_\parallel - \lambda_\perp) L_i L_n] \partial T / \partial x_n + b L_n n_m \epsilon_{inm} \quad (0.13)$$

Здесь $\lambda_\parallel$ и $\lambda_\perp$ — коэффициенты теплопроводности в продольном и поперечном к L направлениях.

Все материальные коэффициенты в (0.10)—(0.13) зависят от температуры. Они могут зависеть также и от напряженности магнитного поля, однако можно показать, что этой зависимостью (в силу слабой намагничиваемости жидких кристаллов) можно пренебречь.

§ 1. Уравнения движения в кинематической форме и уравнение теплопроводности. Перейдем теперь к выводу уравнений движения. Примем, что в (0.8) начальные моментные напряжения отсутствуют: $M_{in}^\circ = 0$. Это имеет место, если при однородной ориентации направлений L в пространстве оказываются строго параллельными также и молекулярные оси.

Уравнения движения нематической среды можно получить, если законы упругости (0.6), (0.7) и реологические законы (0.10) — (0.12) подставить в (0.1) и учесть соотношение (0.4). Так, подставляя (0.10), (0.11) в первое уравнение (0.1), получим уравнение, описывающее движение континуума центров инерции

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v}^\bullet &= \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p_+ + {}^1/_2 (a_1 + 2a_5 - a_7) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + {}^1/_2 (a_1 + a_7) \Delta \mathbf{v} - \mathbf{M} \times \\ &\times \operatorname{rot} \mathbf{L} - (\mathbf{M}\nabla) \mathbf{L} + a_3 \{(\mathbf{L}\mathbf{V}) (\mathbf{L}\nabla) \mathbf{L} + \mathbf{L} \operatorname{div} [\mathbf{L} (\mathbf{L}\mathbf{V})]\} + \\ &+ a_4 \{\operatorname{grad} (\mathbf{L}\mathbf{V}) + (\mathbf{L}\nabla) \mathbf{L} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{L} \operatorname{div} (\mathbf{L} \operatorname{div} \mathbf{v})\} + \\ &+ a_6 \{(\mathbf{L}^\bullet\nabla) \mathbf{L} + \mathbf{L} \operatorname{div} \mathbf{L}^\bullet - (\mathbf{L}\nabla) \mathbf{V} - \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{L}\} + a_7 \operatorname{rot} (\mathbf{L}\psi) + \\ &+ {}^1/_4 (a_2 + a_6) \{\mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{L} + (\mathbf{L}\nabla) \mathbf{D} + (\mathbf{D}\nabla) \mathbf{L} + \mathbf{L} \operatorname{div} \mathbf{D}\} - \\ &- {}^1/_4 (a_8 + a_6) \operatorname{rot} [(\mathbf{L} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{L}] + {}^1/_2 (a_8 + a_7 - a_6) \operatorname{rot} (\mathbf{L} \times \mathbf{L}^\bullet) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(p_+ = p + {}^1/_2 M_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \ \mathbf{V} = (\mathbf{L}\nabla) \mathbf{v}, \ \mathbf{D} = 2\mathbf{V} + \mathbf{L} \times \operatorname{rot} \mathbf{v})$$

Далее, подставляя (0.6). (0.7), (0.12), а также (0.4) во второе уравнение (0.1), получим уравнения движения континуума направлений

$$\rho\,[I_\perp(\mathbf{L}\times\mathbf{L}^{\cdot\cdot}+I_\parallel(\mathbf{L}^\cdot\psi+\mathbf{L}\psi^\cdot)]=\rho\mathbf{m}+\mathbf{L}\times\mathbf{M}+{}^1\!/_2a_6\mathbf{D}\times\mathbf{L}+$$
$$+(a_8+2a_7)\,[\omega-\mathbf{L}\times\mathbf{L}^\cdot-\mathbf{L}\psi]+a_8\mathbf{L}\,(\psi-\mathbf{L}\omega)+a_9\,[(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{L}+\mathbf{L}\operatorname{div}\mathbf{n}]+$$
$$+a_{10}\,[(\mathbf{Ln})\,(\mathbf{L}\nabla)\,\mathbf{L}+\mathbf{L}\operatorname{div}\mathbf{L}(\mathbf{Ln})]-b\,\{[(\mathbf{L}\times T^{-1}\operatorname{grad}T)\nabla]\mathbf{L}+$$
$$+\mathbf{L}\operatorname{div}(\mathbf{L}\times T^{-1}\operatorname{grad}T)\}\qquad(1.2)$$

В уравнениях (1.1), (1.2)

$$\mathbf{M}=d_{1313}\Delta\mathbf{L}-(d_{1313}-d_{1212})\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{L}+$$
$$+(d_{1313}-d_{1122}-d_{1212}-d_{1221})\,\{(\mathbf{L}\operatorname{rot}\mathbf{L})\operatorname{rot}\mathbf{L}+\operatorname{rot}[\mathbf{L}\,(\mathbf{L}\operatorname{rot}\mathbf{L})]\}\qquad(1.3)$$

Первые четыре члена справа в (1.1) те же, что и в уравнении Навье — Стокса обычной жидкости. Уравнение (1.2) вырождается для обычной жидкости в соотношение

$$(a_8+2a_7)\,[\omega-\mathbf{L}\times\mathbf{L}^\cdot-\mathbf{L}\psi]+a_8\mathbf{L}\,(\psi-\mathbf{L}\omega)=0$$

что эквивалентно тривиальному соотношению $\omega=\mathbf{L}\times\mathbf{L}^\cdot+\mathbf{L}\psi$.

Уравнения (1.1), (1.2) образуют систему шести уравнений для девяти неизвестных функций: v_i, L_i, ψ, ρ, p и T. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, к уравнениям (1.1), (1.2) следует присоединить уравнение сохранения массы (0.2), соотношение (0.6) и уравнение теплопроводности. Последнее получается путем подстановки выражения для диссипативной функции (0.9) в уравнение баланса энтропии (0.3). Учитывая законы теплопроводности (0.13), получим

$$\rho Ts^\cdot=\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{[\lambda_\perp\delta_{in}+(\lambda_\parallel-\lambda_\perp)\,L_iL_n]\,\frac{\partial T}{\partial x_n}+bL_\alpha n_\beta\,\epsilon_{i\alpha\beta}\right\}+$$
$$+\Pi_{(in)}v_{(in)}+\Pi_{[in]}\,(\omega-\alpha)_m\,\epsilon_{imn}+N_\alpha n_\alpha\qquad(1.4)$$

Из уравнения (1.4) видно, что изменение энтропии связано с теплопроводностью и рассеянием механической энергии при движении центров инерции молекул и их вращении. Если

$$T=\text{const},\ v_i=\text{const},\ L^\cdot=0,\ \psi=0$$

то из (1.4) следует, что $s^\cdot=0$.

В общем случае $s=s\,(T,\ \vartheta,\ M_i,\ R_{in})$ (M_i — намагниченность среды). Поэтому

$$s^\cdot=T^\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\vartheta,R,M}+\vartheta^\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial\vartheta}\right)_{T,R,M}+M_i^\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial M_i}\right)_{T,R,\vartheta}+R^\cdot_{in}\left(\frac{\partial s}{\partial R_{in}}\right)_{T,\vartheta,M}$$

Последние два члена справа описывают магнитокалорический и градиентноориентационный тепловой эффекты. Оба они ничтожно малы по сравнению с первыми двумя из-за весьма малой намагничиваемости жидких кристаллов и малой энергии термодинамического перехода нематического жидкого кристалла в изотропную жидкость. Следовательно

$$s^\cdot\simeq T^\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\vartheta+\vartheta^\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial\vartheta}\right)_T$$

В силу термодинамического тождества $(\partial s / \partial\vartheta)_T \equiv (\partial p / \partial T)_\vartheta$ получим

$$s^{\bullet} \approx T^{-1} T^{\bullet} c_\vartheta - \vartheta^{\bullet} (\partial p / \partial T)_\vartheta$$

Если пренебречь влиянием градиентов ориентаций на удельный объем (это влияние второго порядка малости по $\partial L_i / \partial x_n$), то можно написать

$$\vartheta^{\bullet} = T^{\bullet} \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial T}\right)_p, \quad s^{\bullet} = T^{-1} T^{\bullet} c_p, \qquad c_p = c_\vartheta - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\vartheta \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial \Gamma}\right)_p, \tag{1.5}$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Учитывая (0.10) — (0.12), (1.5), получим

$$\begin{aligned} c_p T^{\bullet} &= \lambda_{\perp} \Delta T + (\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}) [\mathbf{L} \operatorname{grad} T \operatorname{div} \mathbf{L} + \mathbf{L} \operatorname{grad} (\mathbf{L} \operatorname{grad} T)] + \\ &+ b \operatorname{grad} \psi \operatorname{rot} \mathbf{L} + a_1 v_{(nm)} v_{(nm)} + a_2 L_i v_{(in)} L_m v_{(mn)} + a_3 (L_i L_n v_{(in)})^2 + \\ &+ 2a_4 (L_i L_n v_{(in)}) v_{(mm)} + a_5 v_{(nn)} v_{(mm)} + 2a_6 (L_i v_{(in)} L_q \epsilon_{mnq}) (\omega - \alpha)_m + \\ &+ 2a_7 (\omega - \alpha)_n (\omega - \alpha)_n + a_8 \{(\omega - \alpha)^2 - [\mathbf{L} (\omega - \alpha)]^2\} + a_9 n_i n_i + a_{10} (L_i n_i)^2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Это есть уравнение теплопроводности, обобщенное на случай движения анизотропной нематической среды. Если $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel} = \lambda$ и среда покоится ($v_i = 0$, $\alpha_i = 0$), то (1.6) переходит в обычное уравнение теплопроводности изотропного тела. Уравнение (1.6) представляет собой то соотношение, которое нужно присоединить к (1.1), (1.2), закону сохранения массы (0.2) и соотношению (0.6), чтобы получить замкнутую систему уравнений.

Уравнения (1.1), (1.2) существенно упрощаются, если среда находится в покое ($v_i = 0$, $\alpha_i = 0$), и соответственно принимают вид

$$\rho \mathbf{f} = \operatorname{grad} p_+ - \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{L} - (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{L} \tag{1.7}$$

$$\rho \mathbf{m} = \mathbf{M} \times \mathbf{L} \tag{1.8}$$

Система (1.7), (1.8) описывает статику нематических жидкокристаллических сред. Это система шести уравнений для трех функций: давления p и орта L_i. Тем не менее, система (1.7), (1.8) оказывается совместной при некоторых ограничениях, наложенных на ρf_i, ρm_i. Действительно, если образовать свертку вектора ρm_i с тензором R_{in} и полученное уравнение сложить с (1.7), то получим

$$\rho f_i + \rho m_\alpha R_{\alpha i} = \operatorname{grad} p_+ \tag{1.9}$$

т. е. система (1.7), (1.8) оказывается эквивалентной системе (1.8), (1.9). Последняя будет разрешима, если

$$m_i L_i = 0, \qquad \rho f_i + \rho m_\alpha R_{\alpha i} = \operatorname{grad}_i U \tag{1.10}$$

Это есть необходимые условия равновесия нематической жидкокристаллической среды.

Наиболее важным является случай равновесия под действием объемных сил, имеющих потенциал

$$\rho \mathbf{f} = -\operatorname{grad} g$$

и объемных моментов, источником которых является однородное магнитное поле H. Тогда из-за анизотропии магнитной восприимчивости $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp} \neq 0$ ($\chi_{\parallel}, \chi_{\perp}$ —

магнитная восприимчивость в параллельном и перпендикулярном L направлениях

$$\rho \mathbf{m} = \Delta\chi (\mathbf{LH}) [\mathbf{L} \times \mathbf{H}] \tag{1.11}$$

Можно показать, что для данного случая условия (1.10) удовлетворяются, причем

$$U = -g - {}^1/_2 \Delta\chi (\mathbf{LH})^2, \qquad g + {}^1/_2 \Delta\chi (\mathbf{LH})^2 + p_+ = \mathrm{const}$$

Последнее равенство представляет собой интеграл уравнений (1.9).

Таким образом, если имеют место условия (1.10), то решение уравнений статики нематических жидкокристаллических сред сводится, по существу, к отысканию решения уравнения (1.8), которое совпадает с уравнениями Озина [3, 5].

§ 2. Начальные и граничные условия. Уравнения (1.1), (1.2), (1.6) и (0.2) содержат первую производную по времени от поступательной скорости v_i, угловой скорости ψ, плотности ρ и температуры T и вторую производную от орта преимущественной ориентации молекул L_i, поэтому в начальный момент времени должны быть заданы

$$v_i (\mathbf{r}, 0), \quad \psi (\mathbf{r}, 0), \quad w_i (\mathbf{r}, 0), \quad \rho (\mathbf{r}, 0), \quad T (\mathbf{r}, 0) \tag{2.1}$$

и, кроме того, поле самого орта L_i, т. е. начальная ориентационная структура среды $L_i(\mathbf{r}, 0)$. Здесь рассматривается случай однородной начальной ориентации, т. е. $L_i (\mathbf{r}, 0) = \mathrm{const}$.

Для вектора поступательной скорости v_i наиболее просто реализуются на опыте кинематические граничные условия. В соответствии с гипотезой прилипания к твердой непроницаемой для жидкости поверхности

$$v_i (\mathbf{r}, t) |_\sigma = v_i^\sigma (t) \tag{2.2}$$

Здесь v_i^σ — скорость граничной поверхности.

Задание вектора L_i на поверхности σ практически вполне достижимо за счет специальной обработки граничной поверхности, поэтому физически оправданными являются граничные условия

$$L_i (\mathbf{r}, t) |_\sigma = L_i^\sigma (t) \tag{2.3}$$

Смысл граничного условия для ψ физически не ясен из-за неизученности взаимодействия вращающихся вдоль длинных осей молекул среды с твердой стенкой. Поэтому для формулировки этого условия прибегнем, как и в [17], к гипотезе о вращательном трении молекул о твердую стенку. Полагая, что этим обуславливаются диссипативные моментные напряжения $L_i N_n$ на границе σ, имеем

$$L_i N_m \nu_m |_\sigma = \beta_{im} L_m (\psi - \mathbf{L}\omega) |_\sigma \tag{2.4}$$

Здесь β_{im} — симметричный тензор вращательного поверхностного трения, характеризующий взаимодействие среды с твердой границей, ν_m — внешняя нормаль к граничной поверхности σ. Вспоминая, что у тензора $L_i N_n$ отлична от нуля лишь L-компонента и что в силу (0.12) N_n может быть представлен через n_i, запишем окончательно

$$a_9(\mathbf{vn}) + a_{10}(\mathbf{vL})(\mathbf{Ln}) - \beta\psi|_\sigma = \mathfrak{b}T^{-1}(\mathbf{v}\times\mathbf{L})\,\mathrm{grad}\,T - \beta\mathbf{L}\omega|_\sigma \qquad (2.5)$$

Здесь константа $\beta = \beta_{im}L_iL_m$ должна находиться из опыта.

Граничные условия для температуры сформулированы в теории теплопроводности [18]: на границе должна быть задана температура или тепловой поток (возможны и смешанные граничные условия).

Сформулированные начальные и граничные условия позволяют определить девять функций v_i, L_i, ρ, p, ψ, T из девяти уравнений (1.1), (1.2), (1.6), (0.6) и первого уравнения (0.2).

Так как отыскание общих решений полученных уравнений представляет собой трудную задачу, целесообразно рассмотреть простые случаи движения. Анализ этих случаев позволит не только выяснить наиболее существенные особенности общих уравнений, но и сделать сравнение с результатами экспериментального изучения механического поведения нематических сред.

§ 3. **Дисинклинации.** Если $\rho f_i = 0$, $\rho m_i = 0$, то условия статики (1.10) удовлетворяются, и равновесие нематической среды описывается уравнением (1.8) с учетом (1.3). Этому уравнению удовлетворяет $L_i = \mathrm{const}$, т.е. однородная ориентация осей L. Однако возможны нарушения однородной ориентации. Это случается, если, например, в жидкокристаллическую среду попадает микропримесь, вокруг которой образуется неоднородное поле направлений L. При движении эта примесь, увлекаемая движущимся фронтом кристаллизации, оставляет след — линию сингулярности поля L, называемую дисинклинацией.

Ограничиваясь случаем плоской деформации осей L считаем, что

$$L_r = \cos\Phi, \qquad L_\varphi = \sin\Phi, \qquad L_z = 0,\ \Phi = \Phi(\varphi) \qquad (3.1)$$

Учитывая (3.1) в уравнении (1.8) и (1.3), получим

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{(1 - d_*\cos 2\Phi)\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 + d_*\cos 2\Phi\right\} = 0, \quad d_* = \frac{d_{1313} - d_{1212}}{d_{1313} + d_{1212}} \qquad (3.2)$$

Интеграл этого уравнения должен удовлетворять граничным условиям

$$\Phi = \Phi_0 \ \text{при}\ \varphi = \varphi_0, \quad \Phi = \Phi_0 + k\pi \ \text{при}\ \varphi = \varphi_0 + 2\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots) \qquad (3.3)$$

Смысл первого условия очевиден, а второе — это условие периодичности азимута Φ с учетом физической неразличимости L_i и $-L_i$.

Если принять $d_* = 0$, то решение уравнения (3.2), удовлетворяющее граничным условиям (3.3), и уравнение векторных линий поля L соответственно имеют вид

$$\Phi = {}^1/_2\, k\varphi + \Phi_0, \qquad r = r_0\,\{\sin({}^1/_2\, k\varphi - \Phi_0)\}^{2/k} \qquad (3.4)$$

Этот случай рассматривали Озин [4] и Франк [6]. Анализу случая $d_* \neq 0$ посвящена работа [19]. В указанных работах уравнения, описывающие дисинклинации, были получены из условия минимума упругого потенциала. Они совпадают с (3.2), которое представляет собой частный случай уравнений движения (1.1), (1.2).

Картины конфигураций поля длинных осей молекул, предсказываемые уравнениями (3.2), хорошо совпадают с наблюдаемыми на опыте оптическими картинами полученными от дисинклинаций в нематических средах.

§ 4. Статический градиент направлений длинных осей молекул. Если жидкокристаллическая среда находится между параллельными поверхностями $x = \pm l$ в постоянном магнитном поле, то на единицу объема среды действует ориентирующий объемный момент ρm_i, определяемый выражением (1.11).

Под действием этого момента возникает статический градиент направлений длинных молекулярных осей при условии, что ориентирующее действие стенки препятствует развороту молекул вдоль магнитного поля H_i. Это явление использовалось при определении упругих модулей континуума направлений d_{ikmn} [20–22]. В этих работах авторы предполагали, что объемный момент ρm_i уравновешивается ориентирующим моментом стенки, который считали равным $A d^2\Phi / dx^2$, т. е.

$$A \partial^2 \Phi / \partial x^2 = \Delta\chi H^2 \sin\Phi\cos\Phi \tag{4.1}$$

Здесь Φ — угол между ортом L_i и вектором напряженности магнитного поля, A — модуль упругости континуума направлений.

Статика нематических сред описывается уравнением (1.8), из которого можно получить уравнения для разных типов деформаций континуума направлений.

Различают три кинематически независимых типа деформаций в зависимости от взаимной ориентации вектора L_i и H_i—продольный изгиб, поперечный изгиб и кручение [21, 22]. Каждому типу деформаций соответствует свое уравнение. Если

$$\mathbf{L} = \cos\Phi\mathbf{e}_x + \sin\Phi\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{H} = H\mathbf{e}_y, \qquad \Phi = \Phi(x)$$

то возникает поперечный изгиб поля направлений L, который характеризуется уравнением

$$d_{1313}\frac{d^2\Phi}{dx^2} - (d_{1313} - d_{1212})\left\{\sin^2\Phi\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \sin\Phi\cos\Phi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2\right\} = \Delta\chi H^2\sin\Phi\cos\Phi \tag{4.2}$$

Если

$$\mathbf{L} = \sin\Phi\mathbf{e}_x + \cos\Phi\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{H} = H\mathbf{e}_x, \qquad \Phi = \Phi(x)$$

то имеет место продольный изгиб

$$d_{1212}\frac{d^2\Phi}{dx^2} + (d_{1313} - d_{1212})\left\{\sin^2\Phi\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \sin\Phi\cos\Phi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2\right\} = \Delta\chi H^2\sin\Phi\cos\Phi \tag{4.3}$$

Наконец, если

$$\mathbf{L} = \cos\Phi\mathbf{e}_y + \sin\Phi\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{H} = H\mathbf{e}_z, \qquad \Phi = \Phi(x)$$

то деформацию кручения континуума направлений будет описывать уравнение

$$(d_{1212} + d_{1221} + d_{1122}) \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \Delta\chi H^2 \sin\Phi\cos\Phi \tag{4.4}$$

Модули d_{1313}, d_{1212}, $d_{1212} + d_{1221} + d_{1122}$ называются модулями упругости соответствующих типов деформаций, которые аналогичны деформациям твердого тела, хотя и не тождественны им [2].

Уравнение (4.4) точно совпадает с эмпирическим уравнением (4.1), а уравнения (4.2), (4.3) совпадают с (4.1), если $d_{1313} = d_{1212}$.

Хотя уравнения (4.2), (4.3) отличаются от уравнения (4.1), можно показать, что их решение при граничных условиях

$$\Phi(l) = \Phi(-l) = 0$$

которые следуют из (2.3) при $L^\sigma = 0$, приводит к тому же результату, что и решение уравнения (4.1). А именно, слой толщиной Z_0 деформируется магнитным полем, если $H > H^*$, причем

$$z_0 H^* = \text{const} \tag{4.5}$$

Постоянная в правой части (4.5) определяется модулями упругости и магнитными свойствами среды. От d_* зависит лишь характер приближения к ориентации осей по полю, а закон (4.5) сохраняется для всех уравнений (4.1) — (4.4). Соотношение (4.5) неоднократно и разными методами подтверждено экспериментально.

Таким образом, можно считать, что уравнения статики континуума направлений дают правильный ответ для случая разворота длинных молекулярных осей магнитным полем.

§ 5. **Течение в плоском капилляре.** Рассмотрим установившееся течение нематической среды в плоском капилляре. Длина капилляра a, ширина h, высота $2l$. Примем $h \gg l$, тогда краевыми эффектами можно пренебречь и рассмотреть течение между бесконечными параллельными плоскостями. Пусть среда в магнитном поле H_i, перпендикулярном плоскостям $x = \pm l$, движется вдоль оси z, а длинные оси молекул разворачиваются в плоскости xz, т. е.

$$\mathbf{v} = v(x)\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{L} = \cos\Phi\,\mathbf{e}_x + \sin\Phi\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{H} = H\mathbf{e}_x, \quad \Phi = \Phi(x) \tag{5.1}$$

Кроме того, считаем, что $T = \text{const}$, $\psi = 0$, $\rho f_i = 0$, а объемный момент ρm_i дается выражением (1.11). Тогда, подставив (5.1) в (1.1), (1.2), для давления p_+, скорости v_i и азимута Φ получим уравнения

$$\frac{\partial p_+}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Big[({}^1\!/_2 a_2 + a_4 + {}^1\!/_2 a_6 + a_3\cos^2\Phi)\sin\Phi\cos\Phi\frac{dv}{dx} - \\ - {}^1\!/_2 (d_{1313}\cos^2\Phi + d_{1212}\sin^2\Phi)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2\Big] \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial p_+}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_+}{\partial z} = \frac{d}{dx}\Big[(\eta_\perp(\infty) + a_3\sin^2\Phi\cos^2\Phi + a_6\sin^2\Phi)\frac{\partial v}{\partial x}\Big]$$

$$\eta_\perp(\infty) = {}^1\!/_4 (a_8 + a_2 + 2a_1 + 2a_7 - 2a_6)$$

$$\frac{d}{dx}\Big[{}^1\!/_2 (d_{1313}\cos^2\Phi + d_{1212}\sin^2\Phi)\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2\Big] + \\ + \Big[({}^1\!/_2 a_8 + a_7 - {}^1\!/_2 a_6 + a_6\sin^2\Phi)\frac{dv}{dx} - \Delta\chi H^2\sin\Phi\cos\Phi\Big]\frac{d\Phi}{dx} = 0 \tag{5.3}$$

Они должны быть проинтегрированы при граничных условиях (2.2), (2.3), в которых $v^\sigma = 0$, $L^\sigma = e_x$, т. е. предполагается, что на поверхностях $x = \pm l$ оси L не разворачиваются

$$v(l) = v(-l) = 0, \quad \Phi(l) = \Phi(-l) = 0 \tag{5.4}$$

Из (5.2) определим давление p_+ и dv / dx

$$p_+ = [{}^1/_2 a_2 + a_4 + {}^1/_2 a_6 + a_3 \cos^2 \Phi] \sin\Phi \cos\Phi \frac{dv}{dx} -$$
$$- {}^1/_2 [d_{1313} \cos^2 \Phi + d_{1212} \sin^2 \Phi] \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + z\frac{\partial p_+}{\partial z} \tag{5.5}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = x\frac{\partial p_+}{\partial z} [\eta_\perp(\infty) + a_3 \sin^2\Phi \cos^2\Phi + a_6 \sin^2\Phi]^{-1}, \quad \frac{\partial p_+}{\partial z} = \mathrm{const}.$$

Постоянная интегрирования в (5.5) равна нулю в силу симметрии поля скорости $v(x)$.

Подставив $(5.5)_2$ в (5.3), получим дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять азимут Φ

$$\varepsilon \frac{d}{d\xi}\left\{\frac{1}{2}[\cos^2\Phi + d_{1212}/d_{1313}\sin^2\Phi]\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2\right\} + \{\mu\xi[{}^1/_2 a_8 + a_7 - {}^1/_2 a_6 + a_6 \sin^2\Phi] \times$$
$$\times [\eta_\perp(\infty) + a_3 \sin^2\Phi\cos^2\Phi + a_6\sin^2\Phi]^{-1} - \sin\Phi\cos\Phi\}\frac{d\Phi}{d\xi} = 0 \tag{5.6}$$
$$\xi = x/l, \qquad \varepsilon = d_{1313}(\Delta\chi H^2 l^2)^{-1}, \qquad \mu = l\partial p_+/\partial z\,(\Delta\chi H^2)^{-1}$$

При экспериментальном изучении течения нематических сред [24] применялись капилляры с $l \sim 10^{-2}$ *см* и $\partial p_+ / \partial z\, 10^{-2}$ *дин / см*^{3}. Учитывая, что модули упругости d_{1313}, $d_{1212} \sim 10^{-6}$ *дин* и $\Delta\chi \sim 10^{-6}$ *см*^{3} / *г*, получаем, что в магнитном поле напряженностью в несколько тысяч эрстед при обычных экспериментальных условиях имеют место $|\varepsilon| \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, $|\varepsilon| \ll |\mu|$. Таким образом, уравнение (5.6) совместно с условиями (5.4) для Φ—это нелинейная краевая задача с малым параметром при старшей производной. Относительно данной краевой задачи доказаны [23] теоремы существования, единственности и равномерного стремления решения к решению вырожденного уравнения (при $\varepsilon = 0$).

Удовлетворяясь точностью $O(\varepsilon)$, можно ограничиться решением вырожденного уравнения

$$2\alpha_1\mu\xi = \sin 2\Phi\,(\cos^2 2\Phi + \alpha_1\cos 2\Phi - \alpha_2)(\cos 2\Phi - \alpha_3)^{-1} \tag{5.7}$$
$$\alpha_1 = 2a_6 a_3^{-1},\ \alpha_2 = 1 + [2a_6 + 4\eta_\perp(\infty)]\,a_3^{-1},\ \alpha_3 = 1 + (a_8 + 2a_7 - a_6)a_3^{-1}$$

Количество вытекшей жидкости за единицу времени

$$Q = h\int_{-l}^{l} v(x)\,dx = -2hl\int_0^l \xi\frac{dv}{d\xi}d\xi \tag{5.8}$$

Если (5.5) и (5.7) подставить в (5.8), то получим

$$Q = -{}^1/_4 hl^3 a_3^2 \mu^{-3} a_6^{-3}\frac{\partial p_+}{\partial z} Q_1(\varphi) \tag{5.9}$$

$$Q_1(\varphi) = B_0\varphi + \sum_{n=1}^{4} B_n \sin 2n\varphi + \sin 2\varphi \sum_{n=1}^{3} B_{-n}(\cos 2\varphi - \alpha_3)^{-n} +$$
$$+ 2D(1-\alpha_3^2)^{-1/2}\,\mathrm{Arcth}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha_3}{1-\alpha_3}}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)$$

$$B_0 = (10t + 2r - 4)\ \alpha_3 + {}^1/_4\ (3-2r + 10\alpha_2) - \alpha_3\ (\alpha_1\alpha_2 + {}^9/_2\ \alpha_1)$$
$$B_1 = 5\ t\alpha_3 + {}^1/_8\ [(8r - 5)\ \alpha_3 - 7\alpha_1 - 4\alpha_1\alpha_2]$$
$$B_2 = t + {}^1/_8(r + q + \alpha_2),\ B_3 = {}^1/_{24}\ (3\alpha_1 + 5\alpha_3),\ B_4 = {}^1/_{32}$$
$$B_{-1} = {}^1/_{12}\ t\ (8t + 3q),\ B_{-2} = {}^1/_{12}\ t\ [(10t + 3q)\ \alpha_3 - 6\alpha_3 - 3\alpha_1]$$
$$B_{-3} = -\ {}^1/_6 t^2\ (1 - \alpha_3^2)$$
$$D = t\ (3t + 2q - \alpha_2 - {}^5/_2)\ \alpha_3 - {}^3/_4 t\alpha_1 + {}^1/_2\ (1 - \alpha_3^2)\ \ (\alpha_1 + 2\alpha_3)\ (1 + 2\alpha_3^2 - \alpha_2)$$
$$t = \alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2,\ q = 2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3,\ r = \alpha_1^2 + 3\alpha_2 - 1$$

Параметр φ есть значение азимута Φ при $\xi = 1$, если ограничиться вырожденным решением. Тогда из (5.7) следует зависимость H от параметра φ

$$H = H_* H_1(\varphi), \quad H_* = \left[-2\frac{\partial p_+}{\partial z}\frac{l}{\Delta\chi}\right]^{1/2}$$
$$H_1(\varphi) = \frac{[\alpha_1(\cos 2\varphi - \alpha_3)]^{1/2}}{[\sin 2\varphi\ (\alpha_2 - \alpha_1\cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi]^{1/2}} \tag{5.10}$$

Экспериментально удобнее изучать зависимость времени истечения T фиксированного объема Q° от напряженности магнитного поля H. Очевидно, $T = Q\ /\ Q^\circ$, тогда из (5.9) получим

$$T = T_\infty T_1(\varphi), \quad T_\infty = -\ 3Q^\circ\eta_\perp(\infty)\left(2hl^3\frac{\partial p_+}{\partial z}\right)^{-1}, \quad T_1(\varphi) = \frac{Q_1(\varphi)}{24H_1^3(\varphi)} \tag{5.11}$$

Видно, что T_∞ есть время истечения объема Q° для обычной жидкости с вязкостью $\eta_\perp(\infty)$, а (5.10) совместно с (5.11) представляют заданную в параметрической форме зависимость T от H.

Проанализируем характер этой зависимости.

1. Если $H \to \infty$, то $\varphi \to 0$, $T_1(\varphi) \to 1$, $T \to T\infty$. Это значит, что при $H \to \infty$ кривая $T(H)$ асимптотически приближается к T_∞ и нематическая среда течет как обычная ньютоновская жидкость с вязкостью $\eta_\perp(\infty)$. Отсюда ясен физический смысл коэффициента вязкости $\eta_\perp(\infty)$.

2. Если $H \to 0$, то $\varphi \to {}^1/_2$ arcosα_3, $T_1(\varphi) \to \eta_\perp(0)\ /\ \eta_\perp(\infty)$, $T \to T_0 = -\ 3\,Q^\circ\eta_\perp(0)\ (2hl^3\partial p_+\ /\ \partial z)^{-1}$.

Из этого предельного соотношения ясно, что и при $H \to 0$ нематическая среда ведет себя как обычная ньютоновская жидкость, но уже с коэффициентом вязкости

$$\eta_\perp^{(0)} = {}^1/_4\ (a_2 + a_8 + 2a_1 + 2a_6 + 2a_7) + {}^1/_2\ (1 + \alpha_3)a_6\ [{}^1/_2 a_3 a_6^{-1}\ (1 - \alpha_3) - 1]$$

3. Верхняя асимптота T_∞ и нижняя T_0 обратно пропорциональны градиенту давления $\partial p_+\ /\ \partial z$.

Характер зависимости, предсказываемый уравнениями (1.1), (1.2) и закономерности (1) — (3) совпадают с выводами, сделанными при экспериментальном изучении действия магнитного поля на скорость истечения параазоксианизола из капилляра [24].

Таким образом, полученные уравнения движения нематических жидкокристаллических сред не только предсказывают факт анизотропии вязкости, но и приводят (даже в нулевом приближении) к правильной зависимости анизотропии вязкости от напряженности магнитного поля.

Отметим, что рассмотренный режим течения соответствует случаю, когда: а) вектор скорости v_i перпендикулярен вектору L_i° (ориентации осей L в начальном состоянии), а L°_i перпендикулярен вектору $\omega = {}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Аналогично можно рассмотреть два других режима течения: б) v_i параллелен L_i°, а L_i° перпендикулярен ω_i; в) v_i перпендикулярен L_i°, а L_i° параллелен ω_i.

Эти три вискозиметрических течения использовались для экспериментального измерения коэффициентов вязкости нематических жидкокристаллических сред.

§ 6. Эффект «увлечения». Рассмотрим движение жидкокристаллической среды в длинном цилиндрическом сосуде, ось которого oz перпендикулярна направлению однородного магнитного поля $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_x$. Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω. Тогда уравнения (1.1), (1.2) при граничном условии (2.2) для скорости v_i и динамическом условии для L_i

$$v_i\,|_{r=R} = \omega_n R_m \epsilon_{inm}, \qquad \mu_{zr}\,|_{r=R} = 0 \tag{6.1}$$

допускают следующий режим течения:

$$v_i = \omega_n R_m \epsilon_{inm}, \qquad \mathbf{L} = \cos\alpha(t)\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha(t)\,\mathbf{e}_y \tag{6.2}$$

Для этого режима уравнения (1.1), (1.2) принимают вид

$$\rho\mathbf{f} = \operatorname{grad} p, \qquad (a_8 + 2a_7)\left(\frac{d\alpha}{dt} - \omega\right) = -\Delta\chi H^2 \sin 2\alpha \tag{6.3}$$

Второе из уравнений (6.3) было предложено в работах [25–27] для объяснения закономерностей эффекта «увлечения» жидкости вращающимся магнитным полем. Заметим, что оно следует из (1.1), (1.2) при условии, что моментные напряжения у стенок равны нулю, т. е. ориентационное взаимодействие молекул со стенками отсутствует, кроме того, скорость вращения стенок цилиндра ω определяется углом α_0 в стационарном режиме движения, т. е.

$$\omega = (a_8 + 2a_7)^{-1}\,\Delta\chi H^2 \sin 2\alpha_0$$

При несоблюдении этих условий режим движения становится более сложным, что и наблюдается на опыте. Полная количественная теория данного эффекта требует специального рассмотрения уравнений (1.1), (1.2).

В заключение можно сказать, что построенная гидродинамика нематических сред объясняет наиболее важные закономерности, наблюдаемые на опыте, что, видимо, свидетельствует в пользу адекватности полученных уравнений своеобразному механическому поведению жидкокристаллических сред.

Поступила 20 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray G. W. Molecular structure and the properties of Liquid crystals. New York — London, 1962.
2. Чистяков И. Г. Жидкие кристаллы. М., «Наука», 1966.
3. Oseen C. W. Neue grundlegung der theorie. Arkiv Mat., Astron., Fys., 1925, Bd 19A, Nr. 9.
4. Oseen C. W. Die Beziehungen zwischen der molekularen structur und den Dichteschwankungen. Arkiv Mat., Astron., Fys., 1930, Bd 22A, Nr. 12.

5. Oseen C. W. Die anisotropen Flüssigkeiten, Tatsachen und Theorien. Berlin, 1929.
6. Frank F. C. On the theory of liquid crystals. Disc. Faraday Soc. 1958, vol. 25, p. 19.
7. Erickesen J. L. Conservation laws for liquid crystals. Trans. Soc. Rheol. 1961, vol. 5, p. 23.
8. Ericksen J. L. Hydrostatic theory of liquid crystals. Arch. Ration Mech. Anal., 1962, vol. 9, No. 5, p. 371.
9. Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals. Arch. Ration Mech. Anal., 1968, vol. 28, No 4, p. 265.
10. Lee Davison. Linear theory of mechanical equilibrium of liquid crystals of nematic types. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No 11, p. 2333.
11. Lee Davison. Linear theory of heat conduction and dissipation in liquid crystals of nematic type. Phys. Rev., 1969, vol. 180, No 1, p. 232.
12. Lee Davison, Donald E. Dissipation in liquid crystals. Phys. Rev., 1969, vol. 183, No 1, p. 288.
13. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н. Линейная механика жидкокристаллических сред. Физика тв. тела., 1971, т. 13, вып. 6.
14. Аэро Э. Л., Механика жидкокристаллических сред. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
15. Аэро Э. Л. Теория асимметрической механики и ее применение к реальным средам. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
16. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет внутреннего вращения. Физика твердого тела, 1963, т. 5, вып. 9.
17. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметрическая гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
18. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Гостехтеориздат, 1952.
19. Дзялошинский И. Е. К теории дисинклинаций в жидких кристаллах. Ж. эксперим. и теор. физ., 1970, т. 58, вып. 4.
20. Фредерикс В. К., Золина В. О применении магнитного поля к измерению сил, ориентирующих анизотропные жидкости в тонких однородных слоях. Журн. русск. физ.-хим. об-ва, ч. физич., 1930, т. 62, вып. 5, стр. 457.
21. Zwetkoff V. Die einwirkung des magnetfelds und des elektrischen felds auf anistotropflüssige. Mischungen. Acta Phys. URSS, 1937, vol. 6, No. 6.
22. Freedericksz V., Zwetkoff V. Über die einwirkung des elektrischen felds auf anisotrope flüssigkeiten. Acta Phys. URSS, 1934, vol. 3, No 6.
23. Бриш Н. И. О краевых задачах для уравнений $\varepsilon y'' = f(x, y, y')$ при малых ε. Докл. АН СССР, т. 95, № 3.
24. Михайлов Г. М., Цветков В. Н. Действие магнитного и электрического полей на скорость течения анизотропножидкого параазоксианизола в капилляре. Ж. эксперим. и теор. физ., 1935, т. 9, вып. 5.
25. Цветков В. Н. Движение анизотропных жидкостей во вращающемся магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1939, т. 9, вып. 5.
26. Zwetkoff V. Bewegung anisotroper. Flüssigkeiten im rotierenden Magnetfeld. Acta Phys. URSS, 1939, vol. 10, No 4.
27. Цветков В. Н. Оптические свойства анизотропножидких слоев во вращающемся магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1939, т. 9, вып. 8.