Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СОДЕРЖАНИИ ПРИНЦИПА ВОЛЬТЕРРА В ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В. Г. Громов

(Ростов-на-Дону)

Дается прямое обоснование принципа Вольтерра посредством сведения граничной задачи однородной вязкоупругости к решению соответствующей упругой задачи и некоторого операторного уравнения. Условия применимости символического метода формулируются как условия эквивалентности реализации функций операторов вязкоупругости, вытекающих из упругой задачи и решения операторного уравнения. Отмечается, что вторая процедура является более общей и может быть использована в задачах вязкоупругости, к построению решений которых принцип Вольтерра неприменим.

При построении решения граничной задачи линейной однородной вязкоупругости широко используется принцип Вольтерра [1—5]. Основанием для его применения служит независимость операций по координатам и времени в основной полной системе уравнений квазистатики вязко-упругого тела. В результате задача разделяется на решение соответствующей граничной задачи для упругого тела и расшифровку операторных функций. Последние получаются из упругого решения формальной заменой механических модулей вязко-упругими операторами.

Однако само по себе разделение пространственных и временных операций в уравнениях вязкоупругости не является достаточным критерием применимости операторно-символического метода уже хотя бы потому, что при этом не учитываются условия на границе.

В связи с этим вопрос о рациональном использовании принципа Вольтерра нуждается в изучении. Попытка математического обоснования принципа Вольтерра содержится в работе [6]. Для случая инвариантных по времени вязко-упругих свойств методами операционного исчисления установлена тождественность первой и второй форм принципа соответствия [7].

Символический метод обоснован путем построения изоморфизма между множествами функций операторов вязкоупругости и функций комплексного переменного. Условия применимости принципа Вольтерра определяются возможностью преобразования по Лапласу уравнений и граничных условий задачи вязкоупругости.

§ 1. Две схемы построения решения граничной задачи. Пусть вязкоупругое тело занимает область Ω, ограниченную поверхностью S евклидова пространства, x — точка пространства, x_i — ее координаты, t — время. Обозначим через $\mathbf{u}(x, t)$ — вектор смещений, u_i — его составляющие, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ — соответственно компоненты тензоров деформаций и напряжений в вязко-упругом теле. Основная полная система уравнений квазистатики вязко-упругого тела имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \qquad \sigma_{ij} = \mathcal{E}^{\circ}{}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.1}$$

$$\mathcal{E}^{\circ}{}_{ijkl} = E_{ijkl} - \mathcal{E}^{*}{}_{ijkl} = E_{ijkl} - \int_0^t \mathcal{E}_{ijkl}(t, \tau)(\cdots)\,d\tau \tag{1.2}$$

Здесь $f_i(x, t)$ — заданные объемные силы, $\overset{\circ}{Э}_{ijkl}$ — тензор-оператор анизотропной вязкоупругости, E_{ijkl} — упругие постоянные, $Э_{ijkl}(t, \tau)$ — ядра наследственности. Напомним, что индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующим координатам, а по повторяющемуся индексу суммировать от единицы до трех.

Для простоты рассмотрим граничную задачу вязкоупругости в перемещениях. Уравнения для перемещений получаем из (1.1) путем исключения напряжений

$$Э^\circ_{ijkl}u_{k,lj} + f_i = 0 \qquad (x \in \Omega,\ 0 \leqslant t < \infty) \tag{1.3}$$

Здесь использована симметрия тензор-оператора

$$Э^\circ_{ijkl} = Э^\circ_{jikl} = Э^\circ_{ijlk} \tag{1.4}$$

Граничные условия формулируем в виде

$$u_i(x, t) = 0 \qquad (x \in S,\ 0 \leqslant t < \infty) \tag{1.5}$$

Произвольные, но достаточно гладкие граничные условия приводятся к виду (1.5) введением вспомогательной дважды непрерывно дифференцируемой функции в области Ω. Итак, задача состоит в том, чтобы найти вектор смещений $\mathbf{u}(x, t)$, удовлетворяющий при всяком $t \in [0, \infty)$ уравнениям (1.3) внутри области ($x \in \Omega$) и условиям (1.5) на границе ($x \in S$).

Первая схема построения решения задачи (1.3), (1.5), связанная с принципом Вольтерра, состоит в том, что вначале решается упругая граничная задача

$$E_{ijkl}u_{k,lj} + f_i = 0 \quad (x \in \Omega), \qquad u_i = 0 \quad (x \in S,\ 0 \leqslant t < \infty) \tag{1.6}$$

Время фигурирует в качестве параметра. Пусть найдено решение задачи (1.6), т. е. найден оператор E^{-1} такой, что

$$\mathbf{u} = E^{-1}\mathbf{f} \qquad (x \in \Omega + S,\ 0 \leqslant t < \infty) \tag{1.7}$$

и удовлетворяются соотношения (1.6). Ясно, что оператор будет зависеть от числовых параметров, входящих в задачу (1.6). К ним относятся, в первую очередь, тензор упругих постоянных E_{ijkl} и быть может время t

$$E^{-1} = F(E_{1111}, E_{1122} \ldots E_{3333}, t) \tag{1.8}$$

Равенство (1.8) определяет абстрактную функцию многих числовых аргументов [8]. Получение решения вязко-упругой задачи (1.3), (1.5) состоит в реализации (расшифровке) этой функции, когда упругие постоянные E_{ijkl} заменяются соответствующими вязко-упругими операторами $Э^\circ_{ijkl}$. Процедура реализации состоит в формальном разложении функции (1.8) в абстрактный ряд Тейлора в окрестности числовой части операторов $Э^\circ_{ijkl}$

$$F(Э^\circ_{1111}, Э^\circ_{1122} \cdots Э^\circ_{3333}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(Э^*_{ijkl}\partial_{ijkl})^n E^{-1} \tag{1.9}$$

Символ ∂_{ijkl} в (1.9) означает дифференцирование по параметру E_{ijkl}, причем

$$\partial_{ijkl}E^{-1} = \lim_{\Delta E_{ijkl}\to 0} \frac{F(E_{1111}, \ldots E_{ijkl} + \Delta E_{ijkl}, \ldots E_{3333}) - F(E_{1111}, \ldots E_{ijkl}, \ldots E_{3333})}{\Delta E_{ijkl}} \tag{1.10}$$

и предел понимается в смысле нормы многопараметрического пространства операторов, порожденного оператором E^{-1}. Под степенью оператора $\text{Э}^*_{ijkl}\partial_{ijkl}$ нужно понимать его повторное действие.

В силу некоммутативности операторов Э^*_{ijkl} между собой, для n-й степени этого оператора нельзя указать сокращенного представления подобного тому, которое имеет место для числовых функций. Наконец, смешанная производная есть последовательная смешанная производная k-го порядка от абстрактной функции по соответствующей совокупности числовых параметров [8].

Вторая схема решения граничной задачи вязкоупругости отличается от предыдущей тем, что в ней процедура реализации заменяется решением операторного уравнения. Введем два оператора E и Э_t выражениями

$$(E\mathbf{u})_i = -E_{ijkl}u_{k,lj}, \qquad (\text{Э}_t\mathbf{u})_i = -\text{Э}^*_{ijkl}u_{k,lj} \tag{1.11}$$

После этого задача (1.3), (1.5) может быть представлена в векторной форме

$$E\mathbf{u} - \text{Э}_t\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (x\in\Omega), \qquad \mathbf{u} = 0 \quad (x\in S,\ 0\leqslant t<\infty) \tag{1.12}$$

Для составления операторного уравнения введем вспомогательный вектор $\mathbf{g}\,(x,\,t)$ и рассмотрим для него упругую задачу

$$E\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (x\in\Omega), \qquad \mathbf{u} = 0 \quad (x\in S) \tag{1.13}$$

В результате решения этой задачи получаем вектор смещений

$$\mathbf{u} = E^{-1}\mathbf{g} \qquad (x\in\Omega+S) \tag{1.14}$$

который удовлетворяет граничным условиям исходной задачи (1.12). Теперь вектор $\mathbf{g}$ подбираем так, чтобы выполнялись уравнения (1.12) внутри области. Для этого он должен удовлетворять уравнению

$$\mathbf{g} - A_t\mathbf{g} = \mathbf{f} \qquad (x\in\Omega,\ 0\leqslant t<\infty) \tag{1.15}$$

где $A_t = \text{Э}_t E^{-1}$ — произведение операторов. Формальное решение уравнения (1.15) представляется итерационным рядом Неймана [8]

$$\mathbf{g} = (I - A_t)^{-1}\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{\infty} A_t^n\mathbf{f} \tag{1.16}$$

Решение граничной задачи (1.12) принимает вид

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} E^{-1}A_t^n\mathbf{f} = V_t^{-1}\mathbf{f} \tag{1.17}$$

Дальнейшее сводится к выяснению условий, при которых разложение (1.9), полученное по схеме Вольтерра, эквивалентно оператору V_t^{-1}, и обоснованию этого разложения посредством представления (1.17).

§ 2. Эквивалентность двух схем. Продолжим пока формальное рассмотрение вопроса. Удобно ввести оператор

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} A_t^n \tag{2.1}$$

Теперь обратный оператор вязко-упругой задачи представляется произведением

$$V_t^{-1} = E^{-1} B_t \tag{2.2}$$

Доказательство эквивалентности разложения (1.9) оператору V_t^{-1} сводится к проверке коммутативности операторов E^{-1} и B_t

$$E^{-1} B_t = B_t E^{-1} \tag{2.3}$$

и справедливости тождества

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} E\, (\mathcal{E}^*_{ijkl} \partial_{ijkl})^n E^{-1} \tag{2.4}$$

где по-прежнему оператор E определяется граничной задачей (1.13).

Лемма 2.1. Для оператора A_t имеет место представление

$$A_t = \mathcal{E}^*_{ijkl} \partial_{ijkl} E E^{-1} \tag{2.5}$$

где оператор $\partial_{ijkl} E$ означает производную оператора E по параметру E_{ijkl}.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_i$ — координатные векторы. Учитывая (1.11), получаем явные представления для оператора упругой задачи

$$E = -\mathbf{e}_i E_{ijkl} (\cdots)_{k,\, lj} \tag{2.6}$$

и рассматриваемого оператора

$$A_t = -\mathbf{e}_i\, \mathcal{E}^*_{ijkl} (E^{-1} (\cdots))_{k,\, lj} \tag{2.7}$$

Дифференцируя (2.6) по параметру E_{ijkl}, имеем

$$\partial_{ijkl} E = -\partial_{ijkl} [\mathbf{e}_m E_{mnpq} (\cdots)_{p,\, qn}] = -\mathbf{e}_i (\cdots)_{k,\, lj} \tag{2.8}$$

так как оператор E является линейной функцией параметров E_{ijkl} и, следовательно, при дифференцировании отличным от нуля будет только то слагаемое, индексы которого совпадают с индексами дифференцирования. Используя это в (2.7), получаем требуемое представление (2.5).

Лемма 2.2. На множестве векторов, реализующем коммутативность операторов E и E^{-1}, операторы $\partial_{ijkl} E$ и E^{-1} так же коммутативны.

Доказательство. Оператор E представляет собой линейную комбинацию операторов $\partial_{ijkl} E$

$$E = E_{ijkl}\, \partial_{ijkl} E \tag{2.9}$$

с коэффициентами E_{ijkl}, среди которых в силу свойств симметрии (1.4) независимых будет только 36. Выражая (2.9) через независимые коэффициенты ε_{ijkl}, получаем

$$E = \varepsilon_{ijkl}\, \partial_{ijkl} E \tag{2.10}$$

где отличными от нуля будут только 36 из 81. Эти коэффициенты можно выписать, но здесь это не существенно. В условиях коммутативности и линейности операторов E и

E^{-1} имеем

$$EE^{-1} \to E^{-1}E = \varepsilon_{ijkl} (\partial_{ijkl} EE^{-1} - E^{-1} \partial_{ijkl} E) = 0 \tag{2.11}$$

Поскольку ε_{ijkl} независимы, равенство (2.11) означает, что на любом векторе из упомянутого множества

$$(\partial_{ijkl} EE^{-1} - E^{-1}\partial_{ijkl} E) (\cdots) = 0 \tag{2.12}$$

т. е. операторы E^{-1} и ∂_{ijkl} E коммутативны.

Теорема 2.1. **Если выполнены условия леммы 2.2 и операторы $Э^*_{ijkl}$, E и E^{-1} коммутативны, то справедливо тождество (2.4).**

Доказательство. Для доказательства тождества (2.4) нужно показать, что

$$E (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl})^n E^{-1} = (-1)^n n! (Э^*_{ijkl} \partial_{ijkl} \ EE^{-1})^n \tag{2.13}$$

т. е. имеет место тождественность общих членов рядов (2.1) и (2.4). Проделаем это методом индукции. Пользуясь тем, что правила дифференцирования абстрактных функций числового аргумента формально во многом сходны [8] с правилами обычного дифференцирования, находим

$$Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} (EE^{-1}) = Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} \ EE^{-1} + Э^*_{ijkl} \ E\partial_{ijkl} \ E^{-1} = 0 \tag{2.14}$$

Здесь использовано, что операторы E и E^{-1} взаимно обратные. По предположению операторы $Э^*_{ijkl}$ и E коммутативны, поэтому

$$EЭ^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} \ E^{-1} = - Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} \ EE^{-1} \tag{2.15}$$

Это равенство является доказательством (2.13) при $n = 1$. Предположим теперь, что тождество (2.13) справедливо для $n = N$ и проверим его для $n = N + 1$.

Опираясь на предполагаемую коммутативность операторов $Э^*_{ijkl}$, E и E^{-1}, правило дифференцирования (2.14) запишем через оператор $Э^*_{ijkl}$ ∂_{ijkl}:

$$(Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl}) (EE^{-1}) = E (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl}) E^{-1} + E^{-1} (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl}) E \tag{2.16}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для степеней оператора $Э^*_{ijkl}\partial_{ijkl}$, действующих на произведение, будет справедлив абстрактный аналог формулы Лейбница:

$$\begin{gathered}(Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl})^{N+1} (EE^{-1}) = E (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl})^{N+1} E^{-1} + \\ + (N+1) (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl}) E (Э^*_{mnpq} \ \partial_{mnpq})^N E^{-1} = 0\end{gathered} \tag{2.17}$$

Остальные слагаемые пропадают из-за равенств

$$(Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl})^n E = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots,) \tag{2.18}$$

которые являются следствием линейности оператора E, как функции параметров E_{ijkl}. Последнее слагаемое в (2.17) преобразуем так:

$$\begin{gathered}(N+1) (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} \ E) (E^{-1}E) (Э^*_{mnpq} \ \partial_{mnpq})^N \ E^{-1} = \\ = (N+1) (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} \ EE^{-1}) E (Э^*_{mnpq} \ \partial_{mnpq})^N E^{-1}\end{gathered} \tag{2.19}$$

При $n = N$ тождество (2.13) предполагается справедливым, поэтому из соотношений (2.17) и (2.19) находим

$$E (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl})^{N+1} E^{-1} = (-1)^{N+1} (N+1)! \ (Э^*_{ijkl} \ \partial_{ijkl} \ EE^{-1})^{N+1} \tag{2.20}$$

Совместно с (2.15) равенство (2.20) доказывает тождество (2.13), а вместе с ним утверждение теоремы 2.1.

§ 3. Обоснование принципа Вольтерра. Пусть X_T и Y_T — некоторые однопараметрические банаховы пространства векторов с нормами соответственно $\|\cdots\|_X$ и $\|\cdots\|_Y$. Будем говорить, что $\mathbf{f}(x,t) \in X_T(\Omega \times [0, \infty))$, если при всяком фиксированном $t \in [0, T]$ вектор $\mathbf{f}(x, t) \in X_t(\Omega + S)$, кроме того, он непрерывен по t в смысле нормы этого пространства, т. е.

$$\|\mathbf{f}(x, t') - \mathbf{f}(x, t)\|_X \to 0 \quad \text{при } t' \to t \tag{3.1}$$

Из условия (3.1) следует, что норма является непрерывной функцией параметра t. Кроме того, ее всегда можно считать неубывающей функцией этого параметра

$$\|\mathbf{f}(x, t')\|_X \geqslant \|\mathbf{f}(x, t)\|_X \quad \text{при } t' > t, \ x \in \Omega + S \tag{3.2}$$

Предполагаем далее, что $Y_T \subset X_T$, т. е. что пространство Y_T вложено в пространство X_T и имеют место неравенства

$$\|\mathbf{f}\|_X \leqslant C\|\mathbf{f}\|_Y, \quad \|\mathbf{f}_{,i}\|_X \leqslant C_i\|\mathbf{f}\|_Y, \quad \|\mathbf{f}_{,ij}\|_X \leqslant C_{ij}\|\mathbf{f}\|_Y \tag{3.3}$$

типичные для вложенных пространств [9] с аддитивными нормами. Постоянные C, C_i, C_{ij} не зависят от t.

Рассмотрим упругую задачу (1.13), (1.14). Пусть эта задача однозначно разрешима на множестве векторов $\mathbf{g}(x, t) \in X_T$, причем обратный оператор E^{-1} является ограниченным оператором из пространства X_T в пространство Y_T

$$\|E^{-1}\mathbf{g}\|_Y \leqslant M\|\mathbf{g}\|_X \tag{3.4}$$

Постоянная M не зависит от параметра t. Оператор E^{-1} отображает пространство X_T на часть пространства Y_T. Обозначим ее через $\mathring{Y}_T$ и будем называть подпространством решений упругой задачи. Очевидно, это будет множество векторов, принадлежащих пространству Y_T и удовлетворяющих в некотором смысле уравнениям упругой задачи и граничным условиям.

Лемма 3.1. На множестве векторов $\mathbf{u} \in \mathring{Y}_T(\Omega \times [0, \infty))$ операторы E и $\partial_{ijkl} E$ являются ограниченными операторами со значениями в пространстве $X_T(\Omega \times [0, \infty))$.

Доказательство следует из неравенств (3.3) и представления (2.6). Например, для оператора E имеем цепь неравенств

$$\|E\mathbf{u}\|_X \leqslant \sum_{i=1}^{3} E_{ijkl}\|\mathbf{u}_{k,lj}\|_X \leqslant \sum_{i=1}^{3} E_{ijkl} C_{klj}\|\mathbf{u}\|_Y = m\|\mathbf{u}\|_Y \tag{3.5}$$

Поскольку $\mathring{Y}_T \subset Y_T$ и пространство Y_T вложено в пространство X_T, заключаем, что операторы E и E^{-1} одновременно ограничены на подпространстве $\mathring{Y}_T$. Кроме того, как взаимно обратные они коммутативны на этом подпространстве. Далее из ограниченности оператора E на $\mathring{Y}_T$ и неравенства (3.5) следует существование нормы $\|E\|_X$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в смысле этой нормы оператор E дифференцируем по параметрам E_{ijkl}, причем

$$\partial_{ijkl}E = -\mathbf{e}_i(\cdots)_{k,lj}, \qquad \partial_{ijkl}^n E = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{3.6}$$

По лемме 2.2 получаем, что на подпространстве $\overset{\circ}{Y}_T$ операторы E, E^{-1}, $\partial_{ijkl}E$ коммутативны.

Перейдем к изучению свойств операторов вязко-упругой задачи.

Лемма **3.2. Если тензор $Э_{ijkl}(t, \tau)$ непрерывен и ограничен по норме пространства $X_T(\Omega \times [0, \infty))$, то оператор B_t действует как ограниченный в этом пространстве.**

Доказательство. Для оператора A_t имеем следующие оценки:

$$\|A_t\mathbf{f}\|_X \leqslant \int_0^t \|Э_{ijkl}(t, \tau)\|_X \|\partial_{ijkl} EE^{-1}\mathbf{f}\|_X d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^t \sum_{i=1}^3 C_{klj}\|Э_{ijkl}(t, \tau)\|_X \|\mathbf{f}\|_X d\tau = M \int_0^t K(t, \tau)\, d\tau \,\|\mathbf{f}\|_X(t) \tag{3.7}$$

Здесь использованы неравенства (3.2), (3.3), (3.4) и введена ограниченная функция:

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^3 C_{klj}\|Э_{ijkl}(t, \tau)\|_X \tag{3.8}$$

Кроме того, для всякого вектора $\mathbf{f} \in X_T$ вектор $A_t\mathbf{f}$ непрерывен по t в смысле нормы X_T. Действительно

$$\|A_{t'}\mathbf{f} - A_t\mathbf{f}\|_X \leqslant \left|\frac{t'}{t} - 1\right| \|A_t\mathbf{f}\|_X +$$

$$+ \frac{t'}{t} M \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left\|Э_{ijkl}\left(t, \frac{t'}{t}\tau\right) - Э_{ijkl}(t, \tau)\right\|_X C_{klj}\, d\tau \,\|\mathbf{f}\|_X \tag{3.9}$$

В силу непрерывности $Э_{ijkl}(t, \tau)$ и ограниченности оператора A_t из (3.9) получаем

$$\|A_t'\mathbf{f} - A_t\mathbf{f}\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad t' \to t, \ \mathbf{f} \in X_T \tag{3.10}$$

что означает требуемую непрерывность.

Поскольку A_T действует в пространстве X_T, его степени A_T также будут действовать в этом пространстве, причем справедливы оценки

$$\|A_t^n\mathbf{f}\|_X \leqslant M^n \int_0^t K_{n-1}(t, \tau)\, d\tau \,\|\mathbf{f}\|_X(t) \tag{3.11}$$

где $K_{n-1}(t, \tau)$ — n — 1-итерация ядра $K(t, \tau)$. Отправляясь от (3.7), неравенство (3.11) нетрудно доказать методом индукции.

В результате для нормы оператора B_t получаем

$$\|B_t\|_X \leqslant \sum_{n=0}^\infty \|A_t{}^n\|_X \leqslant 1 + \sum_{n=1}^\infty M^n \int_0^t K_{n-1}(t, \tau)\, d\tau \tag{3.12}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty M^n K_{n-1}(t, \tau)$ будет [10] сходящимся и его сумма $R_M(t, \tau)$ есть резольвента оператора Вольтерра $I - MK^*$, так что B_t представляет собой ограниченный оператор по норме пространства X_T.

Непрерывность по параметру t оператора B_t вытекает из равномерной по t сходимости ряда (3.12) и непрерывности оператора A_t

$$\| B_{t'} - B_t \|_X \leqslant \sum_{n=0}^{N} \| A_{t'}^n - A_t^n \|_X + \| r_{t'}^N \|_X + \| r_t^N \|_X < \varepsilon \tag{3.13}$$

так как при достаточно большом номере N остаток ряда (3.12) может быть сделан сколь угодно малым независимо от t ($\|r_t^N\|_X < \varepsilon / 3$), а конечная сумма стремится к нулю при $t' \to t$. Здесь $\varepsilon > 0$ сколь угодно малая величина. Лемма доказана.

Теорема 3.1. **Если обратный оператор E^{-1} упругой граничной задачи является аналитической функцией упругих характеристик и не зависит от времени t, то формальное построение обратного оператора V_t^{-1} соответствующей вязко-упругой задачи по принципу Вольтерра всегда возможно и равносильно непосредственному решению.**

Доказательство. Пусть по-прежнему оператор E^{-1} действует как ограниченный из пространства X_T в пространство Y_T. Тогда существует подпространство решений упругой задачи $\mathring{Y}_T \subset Y_T$, на котором реализуется коммутативность операторов E, $\partial_{ijkl}E$, E^{-1} (леммы 2.2 и 3.1). Оператор B_t действует в X_T (лемма 3.2). Поскольку имеет место вложение пространств $\mathring{Y}_T \subset Y_T \subset X_T$, можно утверждать, что оператор B_t действует также в подпространстве $\mathring{Y}_T$. Аналогично операторы $Э^*_{ijkl}$ в условиях леммы 3.2 действуют в X_T и тем более в подпространстве $\mathring{Y}_T$. Таким образом, множеством векторов, реализующем коммутативность основных операторов, является подпространство решений упругой задачи.

По условию теоремы оператор E^{-1}, а следовательно, и оператор E не зависят от времени, т. е. являются чисто координатными операторами. Отсюда заключаем, что на подпространстве $\mathring{Y}_T$ выполняются условия леммы 2.2 и теоремы 2.1. Итак, на множестве решений упругой задачи имеет место тождество (2.4). Последнее означает, что формальное тейлоровское разложение представляет собой ограниченный оператор, свойства которого тождественны свойствам оператора B_t (лемма 3.2).

Операторы E^{-1} и B_t коммутативны в пространстве X_T. Это вытекает из коммутативности операторов E^{-1} и A_t, которая легко устанавливается на основе представления (2.5), коммутативности операторов $\partial_{ijkl}E$ и E^{-1} в $\mathring{Y}_T$ и независимости E^{-1} от t

$$A_t E^{-1} = Э^*_{ijkl}\ \partial_{ijkl}\ EE^{-1}E^{-1} = Э^*_{ijkl}\ E^{-1}\partial_{ijkl}\ EE^{-1} = E^{-1}A_t \tag{3.14}$$

Из всего сказанного следует, что обратный оператор вязко-упругой задачи V_t^{-1} в пространстве X_T допускает два равносильных представления

$$V_t^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (Э^*_{ijkl}\, \partial_{ijkl})^n E^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (Э^*_{ijkl}\, \partial_{ijkl}\, EE^{-1})^n E^{-1} \tag{3.15}$$

Первое из них соответствует применению схемы Вольтерра, второе — непосредственному решению вязко-упругой задачи. Значения оператора V_t^{-1} принадлежат пространству Y_T. Кроме того, для решения вязко-упругой задачи имеет место оценка

$$\| \mathbf{u} \|_Y = \| V_t^{-1} \mathbf{f} \|_Y \leqslant M \| B_t \mathbf{f} \|_X \leqslant M \left(1 + \int_0^t R_M(t, \tau)\, d\tau\right) \| \mathbf{f} \|_X. \tag{3.16}$$

Теорема 3.2. **Если обратный оператор E^{-1} упругой задачи зависит от времени, то обратный оператор V_t^{-1} вязкоупругой задачи имеет единственное представление, вытекающее из непосредственного решения. Формальное применение схемы Вольтерра приводит к нетождественному оператору.**

Доказательство вытекает из того, что в случае зависимости оператора E^{-1} от t нарушаются необходимые условия эквивалентности двух схем решения вязко-упругой задачи (§ 2). При этом нарушаются условия теоремы 2.1, которые являются необходимыми для существования тождества (2.4). Действительно, пусть справедливо тождество (2.4). Тогда имеют место тождества (2.13) и, следовательно, (2.15). Умножая последнее на операторы сначала слева на E^{-1} затем справа на E, получаем

$$Э^*_{ijkl} E\partial_{ijkl} E^{-1} + E^{-1} Э^*_{ijkl} \partial_{ijkl} E = 0 \tag{3.17}$$

Вычитая это из того же тождества (2.15), имеем

$$(EЭ^*_{ijkl} - Э^*_{ijkl} E)\,\partial_{ijkl} E^{-1} + (Э^*_{ijkl} E^{-1} - E^{-1}Э^*_{ijkl})\,\partial_{ijkl} E = 0 \tag{3.18}$$

Поскольку

$$\partial_{ijkl} E^{-1} = - E^{-1}E^{-1}\,\partial_{ijkl} E \tag{3.19}$$

и оператор $\partial_{ijkl}\ E$ не тождествен нулевому, из (3.18) находим

$$(EЭ^*_{ijkl} - Э^*_{ijkl}E)\,E^{-1} - (Э^*_{ijkl} E^{-1} - E^{-1}\,Э^*_{ijkl})E = 0 \tag{3.20}$$

Отсюда следует, что

$$EЭ^*_{ijkl} - Э^*_{ijkl} E = 0, \qquad Э^*_{ijkl} E^{-1} - E^{-1}Э^*_{ijkl} = 0 \tag{3.21}$$

т. е. операторы E и E^{-1} коммутируют с операторами $Э^*_{ijkl}$. Полученное противоречие доказывает теорему. Обоснованное представление обратного оператора вязко-упругой задачи получается только при непосредственном решении и даётся рядом (1.17).

§ 4. **Приложения.** Дальнейшая конкретизация постановки граничной задачи вязкоупругости приводит к необходимости рассматривать ее в определенных функциональных пространствах. Остановимся на двух распространенных подходах.

Изучение гладких решений (классический подход) целесообразно проводить в пространствах Гельдера $C^{m+\alpha}(\Omega)$ (см. [9]). Для граничной задачи вязкоупругости в перемещениях такой подход реализован в работе [11]. В случае регулярной области Ω при условии положительной определенности тензора E_{ijkl} и непрерывности тензора $Э_{ijkl}(t, \tau)$ для всякого вектора $\mathbf{f}(x, t) \in C^{\alpha}_{T}(\Omega \times [0, \infty))$ существует единственный вектор $\mathbf{u}(x, t) \in C^{2+\alpha}_{T}(\Omega \times [0, \infty))$, удовлетворяющий уравнениям и граничным условиям (1.12) вязко-упругой задачи.

Выбирая в качестве пространств X_T и Y_T соответственно пространства C^{α}_{T} и $C^{2+\alpha}_{T}$ ($C^{m+\alpha}_{T}$ — банахово пространство) с обычными [9] нормами $\|\cdot\|_{\alpha}$ и $\|\cdot\|_{2+\alpha}$, проверяем справедливость всех сделанных допущений.

В результате имеем

Следствие 1. В условиях теоремы 3.1 гладкие решения вязкоупругой задачи всегда могут быть получены формальным применением принципа Вольтерра.

Следствие 2. Если обратный оператор упругой граничной задачи зависит от времени, то к построению гладких решений соответствующей вязко-упругой задачи принцип Вольтерра не применим. Они могут быть получены непосредственным решением по второй схеме (§ 2).

Попытка ослабить условия на правые части дифференциальных уравнений и граничные значения задачи вязкоупругости приводит к необходимости вводить обобщенные решения [9]. При этом основные уравнения удовлетворяются в слабом (интегральном) смысле, а производные по координатам понимаются как обобщенные.

Существование и единственность обобщенных (слабых) решений граничной задачи вязкоупругости в перемещениях показаны в работе [12], причем, если $\mathbf{f} \in L_2$, то $\mathbf{u} \in W_2^1$. Здесь L_2 — пространство функций, суммируемых с квадратом, W_2^1 — пространство Соболева [9]. Используя определение норм в этих пространствах, а также теоремы вложения [9], убеждаемся, что пространства X_T и Y_T могут быть отождествлены соответственно с пространствами L_2, W_2^1.

Отсюда получаем

Следствие 3. Если обратный оператор упругой задачи, понимаемой в слабом смысле, удовлетворяет условиям теоремы 3.1, то обобщенные решения соответствующей вязко-упругой задачи можно получить по принципу Вольтерра.

Следствие 4. В условиях теоремы 3.2 построение обобщенных решений вязкоупругой задачи возможно только по второй схеме, понимаемой в слабом смысле.

Таким образом, основным критерием практического использования принципа Вольтерра являются зависимость либо независимость от времени обратного оператора соответствующей упругой граничной задачи. Даже в случае разделения операций по координатам и времени в уравнениях, обратный оператор может оказаться функцией времени за счет того, что граничные условия формулируются на подвижных поверхностях. Примерами этому служат многочисленные задачи вязкоупругости с подвижными опорами, аннигилирующими (аблирующими) поверхностями и т. д. Процедура решения таких задач по второй схеме позволяет эффективно использовать ЭВМ.

В заключение отметим, что полученные результаты качественно сохраняются при переходе ко второй и третьей основным граничным задачам вязкоупругости.

Поступила 4 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Lecons sur les Fonctions de lignes. Paris, Gauthier — Villard, 1913.
2. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
3. Розовский М. И. Интегрально-операторный метод в наследственной теории ползучести. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 4.
4. Громов В. Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости. Механика полимеров, 1967, № 6.
5. Громов В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1.
6. Громов В. Г. О принципах соответствия в граничных задачах линейной вязкоупругости. Матер. Всес. симпоз. по проблемам реологии и релаксации в твердых телах. Киев, «Наукова думка», 1969.
7. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
8. Люстерик Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Изд. 2. М., «Наука», 1965.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
10. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
11. Edelstein W. S. Existence of solutions to the Displacement Problem for Quasistatic Viscoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1966, vol. 22, No. 2.
12. Babuska I. Hlaváček I. On the existence and unigueness of solution in the theory of viscoelasticity. Arch. Mech. Stosowanej, 1966, vol. 18, No. 1.