Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ НА ОТРЕЗКАХ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются интегральные уравнения свертки, заданные на системе отрезков; ядро интегрального уравнения — периодическая с периодом T функция. Установлена однозначная разрешимость уравнений для ядер общей природы, обоснована приближенная факторизация, а также указан прием построения приближенного решения.

Интегральные уравнения указанного типа возникают в смешанных задачах теории упругости и математической физики, поставленных для тел конечных размеров [1, 2], а также для неограниченных тел при периодических граничных условиях [3]. Результат настоящей работы, так же как и работы [4], необходим для правильной постановки и решения динамических контактных задач.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\mathbf{K}_q \equiv \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} k(x-\xi)\, q_{2k-1}(\xi)\, d\xi = 2\pi f_{2m-1}(x) \equiv 2\pi f \tag{1.1}$$

$$a_{2m-1} \leqslant x \leqslant a_{2m}, \qquad a_{2N} - a_1 < T, \qquad a_k < a_{k+1}$$

ядро которого — периодическая с периодом T функция вида

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(n) \exp(2\pi i n t / T) \tag{1.2}$$

Будем считать, что $K(n)$ — значения в точках n функции $K(u)$, обладающей на вещественной оси свойствами [1]:

1) $K(u)$ — четная, вещественная, непрерывная функция
2) $K(u) > 0, \qquad |u| < \infty$
3) $K(u) = c^2 u^{-2\gamma}[1 + O(u^{-\delta})], \quad (u \to \infty), \quad 0 < \gamma < 1$

$$\delta > 1 - \gamma, \quad (\gamma \leqslant 0.5), \quad \delta > \gamma \quad (\gamma > 0.5)$$

В данной работе будут использованы введенные в [4] пространства $S(\sigma)$, $s(\sigma)$, $C_k^\lambda(a, b)$, $L_p(a, b)$, $C(\gamma)$, а также несущественно модифицированные пространства H_γ и E.

Будем говорить, что $q(x) \in H_\gamma$, если имеет место неравенство

$$\|q\|_H^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(n) |Q(\tau n)|^2 < \infty, \quad Q(u) = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} q_{2k-1}(\xi) e^{iu\xi} d\xi$$

$$\tau = 2\pi / T$$

[1] Если соотношения (1) — (3) выполняются лишь для дискретных значений $u = n$, то по заданной последовательности $K(n)$ функция $K(u)$ строится неоднозначно, соединением двух соседних точек n- и $n+1$-непрерывной кривой со свойствами (1) — (3).

Считаем, что периодическая с периодом T функция $f(x) \in E$, если ее коэффициенты ряда Фурье обладают свойством

$$\|f\|_E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n) K^{-1}(n)| < \infty, \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{i\tau nx} \tag{1.3}$$

Значения функциия $f(x)$, снятые с отрезка $[a_{2k-1}, a_{2k}]$, будем обозначать через $f_{2k-1}(x)$

В данной работе, как и в [4], удобным оказывается брать в качестве правых частей $f_{2k-1}(x)$ в уравнении (1.1) значения на отрезках $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ некоторой функции $f(x) \in E$.

Таким же способом, как и в работе [4], доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. Оператор K действует из $L_p(0, T)$ в $C(0, T)$ непрерывно при $(2\gamma)^{-1} < p < \infty$ $(\gamma \leqslant 0.5)$ и $1 < p < \infty$ $(0.5 < \gamma)$

Введем в рассмотрение оператор M вида

$$\mathrm{M}q \equiv \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} m(x-\xi) q_{2k-1}(\xi)\, d\xi, \quad m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(n) e^{i\tau nx} \tag{1.4}$$

Здесь $M(u)$ — вещественная, четная, непрерывная на вещественной оси функция, обладающая на бесконечности поведением

$$M(u) = O(u^{-2\gamma-\delta})$$

Теорема 1.2. Для значений λ из круга $|\lambda| < \varkappa^{-1}$ уравнение

$$\mathrm{K}q + \lambda \mathrm{M}q = 2\pi f \tag{1.5}$$

не может иметь в L_p, $p = 2$ $(\gamma \leqslant 0.25)$; $(2\gamma)^{-1} < p \leqslant 2$ $(0.25 < \gamma \leqslant 0.5)$; $1 < p \leqslant 2$ $(0.5 < \gamma)$ более одного решения, если только

$$\varkappa = \| MK^{-1} \|_C < 1 \tag{1.6}$$

Частным случаем уравнения (1.5) является, очевидно, уравнение (1.1) $(\lambda = 0)$.

2. Разрешимость уравнения (1.1) установим способом, данным в работе [4].

Используя лемму 3.1 указанной работы, представим функцию $K(u)$ в виде

$$K(u) = K_s(u) + M_s(u) \tag{2.1}$$

Здесь $K_s(u)$ — мероморфная в комплексной плоскости функция, обладающая свойствами (1) — (3) п. 1, а $M_s(u)$ обладает всеми свойствами, описанной в п. 1 функции $M(u)$, и, кроме того

$$\| M_s(u) K_s^{-1}(u) \|_C \to 0, \qquad s \to \infty \tag{2.2}$$

Как и в работе [4], нули и полюса функции $K_s(u)$, лежащие в верхней полуплоскости, будем обозначать через z_n, ζ_n.

Обратимся теперь к исследованию уравнения (1.1), в котором роль функции $K(u)$ играет $K_s(u)$, т. е. ядро этого уравнения имеет вид

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_s(n) \exp i\tau n t \tag{2.3}$$

Применяя к ряду (2.3) формулу суммирования Пуассона и вычисляя интеграл с помощью вычетов, представим $k(t)$ в виде

$$k(t) = \sum_{r=1}^{\infty} s_r \left[\exp i\zeta_r\tau|t| + \frac{2\exp 2\pi i\zeta_r}{1-\exp 2\pi i\zeta_r}\cos\zeta_r\tau t\right] \tag{2.4}$$
$$s_r = 2\pi i\,[K_s^{-1}(\zeta_r)]'^{-1}, \qquad |t| < T$$

Будем теперь искать решение интегрального уравнения (1.1) с правой частью (1.3) в форме ряда

$$q_{2k-1}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\,K_s^{-1}(n)\exp in\tau x + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{p(l)} [x_l(2k-1,v)$$
$$(x-a_{2k-1})^v \exp iz_l\tau(x-a_{2k-1}) + y_l(2k-1,v) \tag{2.5}$$
$$(a_{2k}-x)^v \exp iz_l\tau(a_{2k}-x)]\,\tau^v, \qquad a_{2k-1}\leqslant x\leqslant a_{2k}$$

Здесь так же, как и в работе [4], $p(l)+1$ — кратность нуля z_l, лежащего в верхней полуплоскости; начиная с некоторого достаточно большого номера l, все $p(l)\equiv 0$.

Внесем (2.4), (2.5) в левую часть уравнения (1.1), проинтегрируем и приравняем правой части (1.3). В результате для определения неизвестных постоянных X_k, Y_k получим бесконечную систему вида

$$AX_k + C_kY_k + \sum_{m=1}^{k-1}[B(1,m)X_m + B(2,m)Y_m] +$$
$$+\sum_{m=1}^{N}[B(3,m)X_m + B(4,m)Y_m] = L_k \tag{2.6}$$
$$AY_k + C_kX_k + \sum_{m=k+1}^{N}[D(1,m)Y_m + D(2,m)X_m] +$$
$$+\sum_{m=1}^{N}[D(3,m)Y_m + D(4,m)X_m] = G_k \quad (k=1,2,\ldots,N)$$
$$X_0 = Y_0 = X_{N+1} = Y_{N+1} = 0,\ \ X_k = \{x_l(2k-1,v)\},\ \ Y_k = \{y_l(2k-1,v)\}$$

Элементы матриц A, C_k, $B(n,m)$, $D(n,m)$ могут быть получены из соответствующих элементов системы (3.8) работы [4], в которых все показатели экспоненциальной функции необходимо умножить на τ, прежде чем взята операция D. Например, член $D^v \exp iz_l(a_{2k}-a_{2k-1})$ из [4] необходимо заменить в нашей системе на

$$D^v \exp i\tau z_l\,(a_{2k}-a_{2k-1})$$

Элементы матриц $B\ (n,\ m)$, $D\ (n,\ m)$ $(n = 3,\ 4)$ имеют вид

$$B\ (n,\ m) = \Omega\, B\ (n - 2,\ m),\quad D\ (n,\ m) = \Omega D\ (n - 2,\ m) \tag{2.7}$$

Здесь Ω — диагональная матрица, элементы которой имеют вид

$$\omega_{rr} = (1 - \exp 2\pi i\zeta_r)^{-1} \exp 2\pi i\zeta_r \tag{2.8}$$

Правые части в (2.6) представим в форме

$$L_k = \{l_r(k)\} = \left\{\sum_{m=1}^{k-1} t_r(m) + \sum_{m=1}^{N} \omega_{rr} t_r(m) + c_r(k)\right\}$$

$$G_k = \{g_r(k)\} = \left\{\sum_{m=k+1}^{N} \tau_r(m) + \sum_{m=1}^{N} \omega_{rr}\tau_r(m) + s_r(k)\right\}$$

$$t_r(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\, K_s^{-1}(n)\,(\zeta_r - n)^{-1}\{\exp i\tau\,[\zeta_r(a_{2k-1} - a_{2m-1}) + $$

$$+ na_{2m-1}] - \exp i\tau\,[\zeta_r(\alpha_{2k-1} - a_{2m}) + na_{2m}]\} \tag{2.9}$$

$$\tau_r(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\, K_s^{-1}(n)\,(\zeta_r - n)^{-1}\{\exp i\tau\,[\zeta_r(a_{2m} - a_{2k}) + $$

$$+ na_{2m}] - \exp i\tau\,[\zeta_r(a_{2m-1} - a_{2k}) + na_{2m-1}]\}$$

$$c_r(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n)\exp i\tau n a_{2k-1}}{(\zeta_r - n)\, K_s(n)},\quad s_r(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n)\exp i\tau\, n a_{2k}}{(\zeta_r + n)\, K_s(n)}$$

Справедлива

Лемма 2.1. Оператор $A^{-1}\,\Omega R$ непрерывен из любого $S\ (\sigma)$, $\sigma > 0$ в $S\ (1 - \gamma)$. Здесь R — любой из операторов C, B, D. Элементы матрицы A^{-1} приведены в [4].

В силу леммы 2.1 бесконечная система (2.6) по своим функциональным свойствам ничем не отличается от уже исследованной в [4] системы (3.8). Но тогда к ней можно применить все рассуждения п. 3 указанной работы, рассмотрев предварительно уравнение (1.1) с ядром (2.4) и правой частью (3.9, 10) из [4].

Теорема 2.1. Пусть $f\ (x) \in E$. Тогда система (2.6) однозначно разрешима в $S\ (1 - \gamma)$, а уравнение (1.1) с ядром (2.4) — в $C\ (\gamma)$. При этом имеет место оценка

$$\| q \|_{C(\gamma)} \leqslant \| \mathrm{K}_s^{-1} \|\, \| f \|_E \tag{2.10}$$

Для доказательства разрешимости уравнения (1.1) с общим ядром рассмотрим уравнение (1.5), в котором в качестве $K\ (u)$ и $M\ (u)$ берутся построенные выше функции $K_s\ (u)$ и $M_s(u)$. При $\lambda = 1$ уравнение (1.5) совпадает с (1.1).

Лемма 2.2. Оператор $\mathrm{K}_s^{-1}\ \mathrm{M}_s$ вполне непрерывен в $C\ (\sigma)$, $\gamma \leqslant \sigma < \varkappa^\circ$ $(\varkappa^\circ = \inf\ (\delta,\ 2\gamma),\ \gamma < 0.5;\ \varkappa^\circ = \inf\ (\delta,\ 1),\ \gamma \geqslant 0.5)$

Объединяя теорему 1.2 и лемму 2.2 и представив уравнение (1.1) в форме

$$q + \lambda K_s^{-1} M_s q = K_s^{-1} f \tag{2.11}$$

заключаем, что метод последовательных приближений по формуле

$$q_{m+1} = -\lambda \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{M}_s q_m \tag{2.12}$$

сходится при всех $|\lambda| < \varkappa^{-1}$.

Теорема 2.2 Уравнение (1.1) однозначно разрешимо при всех $f(x)$ таких, что

$$\mathbf{K}_s^{-1} f \in C(\gamma) \tag{2.13}$$

Решение представимо в форме

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s)^m \mathbf{K}_s^{-1} f \tag{2.14}$$

$$\| q \|_{C(\gamma)} \leqslant C \| \mathbf{K}_s^{-1} f \|_{C(\gamma)}, \qquad C = \sum_{m=0}^{\infty} \| (\mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{M}_s)^m \| \tag{2.15}$$

Норма оператора $\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{M}_s$ определяется при его действии в $C(\gamma)$.

Отметим, что (2.13) имеет место, если $f \in E$. В этом случае (2.15) принимает вид

$$\| q \|_{C(\gamma)} \leqslant \| \mathbf{K}^{-1} \| \| f \|_E, \qquad \| \mathbf{K}^{-1} \| = C \| \mathbf{K}_s^{-1} \|_{E \to C(\gamma)} \tag{2.16}$$

3. Применим полученные результаты для обоснования приближенной факторизации [4].

Допустим, что даны два интегральных уравнения

$$\mathbf{K}_1 q_1 = 2\pi f, \qquad \mathbf{K}_2 q_2 = 2\pi f$$

в которых фурье-трансформации ядер $K_1(u)$ и $K_2(u)$ удовлетворяют условиям (1) — (3) п. 1, а $f \in E$.

Возникает вопрос, при котором соотношении близости между $K_1(u)$ и $K_2(u)$ будет иметь место близость в $C(\gamma)$ решений q_1 и q_2 приведенных уравнений. Ответом на него явилась бы рекомендация для подбора функции $K_2(u)$, легко факторизуемой, аппроксимирующей $K_2(u)$ и обеспечивающей близость приближенного решения q_1 к точному q_2 в метрике $C(\gamma)$.

Теорема 3.1. Пусть величина

$$\varepsilon = \sup_n | K_1(n) - K_2(n) | K_1^{-1}(n) (1 + |n|)^\alpha \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\alpha > 1 - \gamma \quad (\gamma < 0.5), \qquad \alpha > \gamma \quad (0.5 \leqslant \gamma)$$

удовлетворяет условию

$$\varepsilon < \| \mathbf{K}_1^{-1} \|^{-1} L^{-1}$$

Тогда имеет место оценка

$$\| q_2 - q_1 \|_{C(\gamma)} \leqslant \varepsilon L \| \mathbf{K}_1^{-1} \| (1 - \varepsilon L \| \mathbf{K}_1^{-1} \|)^{-1} \| q_1 \|_{C(\gamma)}$$

Выражение для L приведено в работе [4]. $\|\mathbf{K}_1^{-1}\|$ дается соотношением (2.16). Теорема доказывается тем же способом, что и теорема 5.1 работы [4].

4. Подробнее остановимся на случае $N = 1$.

Бесконечная система для определения коэффициентов $X_1 = \{x_l(1, v)\}$, $Y_1 = \{y_l(1, v)\}$ принимает вид

$$AX_1 + C_1Y_1 + B(3,1)X_1 + B(4,1)Y_1 = L_1 \tag{4.1}$$
$$AY_1 + C_1X_1 + D(3,1)Y_1 + D(4,1)X_1 = G_1$$

Полагая в системе (4.1) $v = 0$ (все нули функции $K_s(z)$ — однократные) и $F(n) = 1$, $F(k) = 0$ $(k \neq n)$, получим систему вида

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\exp i\tau[z_l\sigma+\zeta_r(T-\sigma)]}{\zeta_r-z_l} \pm \frac{\exp i\tau z_l\sigma - \exp i\tau\zeta_r(T-\sigma)}{\zeta_r+z_l}\right\}x_l^{\pm} =$$
$$= \frac{\exp i\tau n a_1 - \exp i\tau[a_2 n+\zeta_r(T-\sigma)]}{(n-\zeta_r)K(n)} \mp \frac{\exp i\tau n a_2 - \exp i\tau[a_1 n+\zeta_r(T-\sigma)]}{(n+\zeta_r)K(n)} \tag{4.2}$$

Здесь

$$\{x_l^{\pm}\} = X^{\pm} = X_1 \pm Y_1, \qquad \sigma = a_2 - a_1 < T$$

Принимая во внимание обратимость матрицы A, заключаем, что система (4.2) будет наиболее обусловленной (матрица A имеет наименьшее возмущение) при соотношении параметров $2\sigma = T$. Экспоненциальные функции коэффициентов системы (4.2) имеют в этом случае отрицательные показатели одного порядка при условии, что нули z_l и полюса ζ_r имеют одинаковый порядок.

В случае $\zeta_r \gg z_1$ система (4.2) будет, очевидно, близка к исследованной в [5] системе (2.19). Последнее означает, что решение интегрального уравнения (1.1) близко к решению интегрального уравнения

$$K_q = \int_{-a}^{a} k(x-\xi)\,q^*(\xi)\,d\xi = 2\pi f(x), \quad |x| \leqslant a, \quad \tau a_1 = -a, \quad \tau a_2 = a \tag{4.3}$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_s(u)e^{iut}\,du, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta)\,e^{i\tau\eta x}d\eta, \quad q^*(\xi) = \tau q(\xi/\tau)$$

Уравнение (4.3) исследовано в [4], а при больших a — в [6,7].

Приведенный в этих работах результат позволяет оценивать норму обратного оператора уравнения (4.3), весьма необходимую для оценки точности приближенного решения.

5. Ниже приводится один из приемов, позволяющих оценить норму обратного оператора указанного уравнения при больших a.

Решение уравнения (4.3), согласно [6], при

$$f(x) = \exp i\eta x \qquad (\Phi(\xi) = \delta(\xi - \eta))$$

имеет вид

$$q_\eta(x) = K^{-1}(\eta)\,e^{i\eta x} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{\mathrm{S}(a+x)\,\mathbf{F}^k(a,z)$$
$$\psi[t,\eta(-1)^k] + \mathrm{S}(a-x)\,\mathbf{F}^k(a,z)\,\psi[t,\eta(-1)^{k+1}]\} \tag{5.1}$$

Здесь операторы $\mathbf{F}(a, z)$, $\mathrm{S}(x)$ даются соответственно формулами (7) и (13) указанной работы. Оператор $\mathbf{F}(a, z)$ непрерывен в пространстве A функций, регулярных в нижней полуплоскости и ограниченных там с весом z. Норма оператора $\mathbf{F}(a, z)$ в пространстве A дается правой частью соотношения (10) [6].

Лемма 5.1. Оператор $\mathrm{S}(a \pm x)$ непрерывен из A в $C(0.5)$ [4].

Необходимо показать, что

$$\max_{|x| \leqslant a} |(a^2 - x^2)^{0.5} \mathrm{S}(a \pm x) f| \leqslant M \|f\|_A \tag{5.2}$$

Если $f \in A$, то оператор $S(x)$ на основании (13) можно представить в виде (деформировать контур в нижнюю полуплоскость)

$$\mathrm{S}(x) f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma K_+^{-1}(t) f(t) e^{-itx} dt$$

Положим

$$m = \inf_\gamma \max_{t \in \gamma} |K_+^{-1}(t) t^{-0.5}| \tag{5.3}$$

В предположениях работы [6] $m < \infty$. Тогда

$$|x^{0.5} \mathrm{S}(x) f| \leqslant \frac{x^{0.5}}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{f(t) e^{-itx}}{K_+(t)} \right| |dt| \leqslant \frac{m x^{0.5}}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{e^{-itx}}{t^{0.5}} \right| |dt| \|f\|_A \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m}{2\pi} \int_{\gamma x} \left| \frac{e^{-it}}{t^{0.5}} \right| |dt| \|f\|_A$$

Обозначая

$$\|\mathrm{S}\| \leqslant M = \frac{m}{2\pi} \max_x \int_{\gamma x} \left| \frac{e^{-it}}{t^{0.5}} \right| |dt| < \infty, \quad x \in [0, 2a] \tag{5.4}$$

получим (5.2). Лемма доказана.

Лемма 5.2. Пусть $f(x) \in C_1^\lambda(-a, a)$ $(\lambda > 0)$. Тогда существует такое продолжение $f^*(x) \in C_1^\lambda(-b, b)$ ее на $[-b, b] \supset [-a, a]$, что его фурье-трансформация $\Phi(\eta)$ удовлетворяет соотношению

$$|\Phi(\eta)| (1 + |\eta|)^{1+\lambda} < C \|f\|_{C_1^\lambda(-a, a)} \tag{5.5}$$

Лемма 5.2 доказывается приемами, изложенными в [8].

На основании леммы 5.2. доказывается неравенство

$$\|\psi_k\|_A < \theta \|f\|_{C_1^\lambda(-a, a)} \qquad (\lambda > 0.5) \tag{5.6}$$

Лемма 5.3. Для $f \in C_1^\lambda(-a, a)$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\eta)}{K(\eta)} e^{i\eta x} d\eta \right\|_{C(-a, a)} \leqslant N \|f\|_{C_1^\lambda(-a, a)} \tag{5.7}$$

Для доказательства леммы 5.3 достаточно воспользоваться обычным приемом обращения преобразования Фурье [8] и свойством (2) [6].

Объединяя леммы 5.1, 5.3 и неравенство (5.6), получаем

$$\| q \|_{C(0,5)} \leqslant [N + 2 \| \mathbf{S} \| (1 - \| \mathbf{F} \|)^{-1} \theta] \| f \|_{C_1 \lambda(-a,a)}$$

Таким образом

$$\| \mathbf{K}^{-1} \| \leqslant N + 2 \| \mathbf{S} \| (1 - \| \mathbf{F} \|)^{-1} \theta \tag{5.8}$$

Автор благодарит И. И. Воровича за ценные советы.

Поступила 2 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконь А. В., Ворович И. И., Устинов Ю. А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины. Инж. ж. МТТ, 1966, №. 1.
2. Белоконь А. В. Смешанные задачи теории упругости для цилиндрических тел. В сб.: Контактные задачи и их инженерные приложения, М., НИИМАШ, 1969.
3. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
4. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики, ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
6. Бабешко В. А. Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 6.
7. Бабешко В. А. Асимптотические свойства решений некоторых интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 3.
8. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.