Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В. П. Плевако

(Харьков)

Получено общее решение уравнений равновесия в перемещениях для неоднородных изотропных сред, упругие характеристики которых — дифференцируемые функции декартовой координаты. Показано, что компоненты вектора перемещений в пространственной задаче теории упругости всегда могут быть выражены через две функции, удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям в частных производных второго и четвертого порядка соответственно.

Из более ранних работ, посвященных аналогичным проблемам, следует прежде всего отметить работу [1], в которой выведено уравнение для функции напряжений Эри в двумерной задаче теории упругости неоднородной среды. В работах [2, 3] получено общее решение уравнений равновесия в перемещениях для случая осесимметричной деформации тел вращения, модули упругости которых меняются по экспоненциальной зависимости в функции от координаты z. Исследовался степенной закон изменения модуля упругости с преимущественным вниманием к плоской задаче [4]. Общие же решения уравнений равновесия в перемещениях для пространственного случая и произвольного закона изменения упругих характеристик неоднородной среды, по-видимому, не рассматривались.

1. Будем считать, что модуль сдвига G неоднородной среды и коэффициент Пуассона ν — дифференцируемые функции декартовой координаты z.

Уравнения равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2u_x+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\frac{dG}{dz}=0\\
\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2u_y+\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\frac{dG}{dz}=0\\
\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2u_z+\theta\frac{d\lambda}{dz}+2\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{dG}{dz}=0\qquad\left(\lambda=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\right)
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений, θ — относительная объемная деформация.

Продифференцируем первое уравнение системы (1.1) по y, а второе по x и вычтем из одного другое. В результате найдем, что

$$\partial u_x/\partial y-\partial u_y/\partial x=\chi\tag{1.2}$$

$\chi(x, y, z)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2\chi+q(z)\frac{\partial\chi}{\partial z}=0,\qquad q(z)=\frac{d}{dz}\ln G\tag{1.3}$$

Пусть u_x^+, u_y^+ — частное решение неоднородного уравнения (1.2), а u_x°, u_y° — общее решение соответствующего ему однородного.

Из однородного уравнения следует, что существует функция $F\ (x,\ y,\ z)$ такая, что

$$u_x{}^\circ = \partial F/\partial x, \qquad u_y{}^\circ = \partial F/\partial y \tag{1.4}$$

Для разыскания частного решения введем новую функцию $N\ (x,\ y,\ z)$, полагая

$$\chi = \partial^2 N/\partial x^2 + \partial^2 N/\partial y^2 \tag{1.5}$$

Подставляя это выражение в (1.2), получим, что частное решение можно принять в виде

$$u_x{}^+ = \partial N/\partial y, \qquad u_y{}^+ = -\ \partial N/\partial x \tag{1.6}$$

Таким образом, перемещения u_x и u_y в наиболее общем случае могут быть выражены через две вспомогательные функции F и N.

Подставляя общее решение неоднородного уравнения (1.2) согласно (1.4), (1.6) в (1.1), получим для F, N и u_z систему трех дифференциальных уравнений

$$\partial Q_1/\partial x + \partial Q_2/\partial y = 0, \qquad \partial Q_1/\partial y - \partial Q_2/\partial x = 0 \tag{1.7}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[G\left(\frac{\partial F}{\partial z} + u_z\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F + (1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]\right\} = 0$$

$$Q_1 = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F + \nu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[G\left(\frac{\partial F}{\partial z} + u_z\right)\right]$$

$$Q_2 = G\nabla^2 N + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{dG}{dz}$$

Из первых двух уравнений системы (1.7) следует,что функции Q_1 и Q_2 связ аны между собой условиями Коши — Римана и поэтому могут быть представлены в виде

$$Q_1 = \partial\omega/\partial x, \qquad Q_2 = \partial\omega/\partial y \tag{1.8}$$

где $\omega\ (x,\ y,\ z)$ — произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа (переменная z играет здесь роль параметра).

В результате система дифференциальных уравнений (1.7) распадается на две независимые подсистемы, из которых одна служит для определения функций F и u_z

$$\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F + \nu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[G\left(\frac{\partial F}{\partial z} + u_z\right)\right] = \frac{\partial\omega}{\partial x}$$

$$\tag{1.9}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[G\left(\frac{\partial F}{\partial z} + u_z\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F + (1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]\right\} = 0$$

а другая — для определения функции N

$$G\nabla^2 N + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{dG}{dz} = \frac{\partial\omega}{\partial y} \tag{1.10}$$

Последнее уравнение, очевидно, не противоречит условиям (1.5) и (1.3).

Покажем теперь, что, не нарушая общности, гармоническую функцию $\omega(x, y, z)$ можно принять равной нулю.

Обозначим через F^+, u_z^+ и N^+ частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (1.9) и (1.10), а через F°, $\overset{\circ}{u}_z$ и N° — общие решения соответствующих им однородных.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что в качестве частного решения системы (1.9) и уравнения (1.10) можно принять

$$F^+ = \int \frac{dz}{G} \int \frac{\partial\omega}{\partial x}\, dz, \qquad u_z^+ = 0, \qquad N^+ = \int \frac{dz}{G} \int \frac{\partial\omega}{\partial y}\, dz \tag{1.11}$$

Используя (1.11), имеем

$$u_x = \partial F^\circ/\partial x + \partial N^\circ/\partial y, \qquad u_y = \partial F^\circ/\partial y - \partial N^\circ/\partial x \tag{1.12}$$

Кроме того, из условия $u_z^+ = 0$ следует, что $u_z = u_z^\circ$.

Таким образом, перемещения u_x, u_y, u_z зависят лишь от функций F°, u_z° и N°, которые являются решениями системы (1.9) и уравнения (1.10), если положить в них $\omega = 0$. Следовательно, функция ω не может оказать никакого влияния на компоненты вектора перемещений и без ущерба для общности ее можно отбросить.

Положим в (1.9) и (1.10) $\omega = 0$. Тогда для N получаем уравнение второго порядка

$$\nabla^2 N + q(z)\, \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \tag{1.13}$$

которое в случае однородной среды переходит в трехмерное уравнение Лапласа. Для функций F и u_z получаем однородную систему дифференциальных уравнений, которая после введения новых неизвестных

$$\sigma = \frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F + (1-\nu)\, \frac{\partial u_z}{\partial z}\right], \qquad \tau = G\left(\frac{\partial F}{\partial z} + u_z\right) \tag{1.14}$$

имеет вид

$$\begin{gathered}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tau + \frac{\partial\sigma}{\partial z} = 0, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F + \frac{1-\nu}{2G}\, \frac{\partial\tau}{\partial z} + \frac{\nu}{2G}\, \sigma = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\tau}{G} + u_z = 0, \qquad \frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F + (1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - \sigma = 0\end{gathered} \tag{1.15}$$

Введем теперь вспомогательную функцию $L(x, y, z)$, полагая

$$\begin{gathered}\sigma = \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 L, \qquad \tau = -\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z} \\ F = -\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) L\end{gathered} \tag{1.16}$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения системы (1.15), увидим, что они будут удовлетворены при любом выборе функции L.

Подставляя в третье уравнение, найдем

$$u_z = -\frac{1}{G}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right)\right] \tag{1.17}$$

Остается выбрать функцию L таким образом, чтобы было удовлетворено последнее уравнение системы (1.15). Подставляя выражения (1.16) и (1.17) в это уравнение, получим для L уравнение четвертого порядка

$$\nabla^2\nabla^2 L - \frac{G}{1-\nu}\left\{\frac{1}{G}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\nu\nabla^2 L) - \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2 L\right] - 2\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu)\nabla^2 L\right]\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{G}\right) + \left(\nu\nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right)\right\} = 0 \tag{1.18}$$

Это уравнение несколько упрощается, если коэффициент Пуассона $\nu = \mathrm{const}$, и может быть записано в виде

$$\nabla^2\left(\frac{1}{G}\nabla^2 L\right) - \frac{1}{1-\nu}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) L \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right) = 0 \tag{1.19}$$

Заметим, что когда среда однородна, уравнение (1.18) переходит в бигармоническое.

Таким образом, решение системы (1.1) в наиболее общем случае удалось свести к решению двух линейных дифференциальных уравнений, из которых одно — второго, а другое — четвертого порядка.

Принимая во внимание (1.16) и (1.17), запишем общее решение уравнений равновесия в перемещениях для неоднородных сред в такой окончательной форме

$$u_x = -\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad u_y = -\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$u_z = -\frac{1}{G}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) L\right] \tag{1.20}$$

Здесь N — функция, удовлетворяющая уравнению (1.13), а L — уравнению (1.18)

Из (1.20) находим компоненты тензора напряжений

$$\sigma_x = \left(\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2 + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}\right) L + 2G\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}$$
$$\sigma_y = \left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2 + \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}\right) L - 2G\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}, \qquad \sigma_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 L$$
$$\tau_{xy} = -\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} - G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) N \tag{1.21}$$
$$\tau_{zx} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z} + G\frac{\partial^2 N}{\partial y\,\partial z}, \qquad \tau_{zy} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z} - G\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial z}$$

В цилиндрических координатах r, β, z составляющие вектора перемещений и тензора напряжений запишутся следующим образом:

$$u_r = -\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) L + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial \beta}$$
$$u_\beta = -\frac{1}{2Gr}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) L - \frac{\partial N}{\partial r} \tag{1.22}$$
$$u_z = -\frac{1}{G}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) L\right]$$

$$\sigma_r = \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\nabla^2 L + \frac{\partial^4 L}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{2G}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{N}{r}\right)$$

$$\sigma_\beta = \nu\frac{\partial^2}{\partial r^2}\nabla^2 L + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} - \frac{2G}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{N}{r}\right)$$

$$\sigma_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2 L$$

$$\tau_{r\beta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L - G\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)N \tag{1.23}$$

$$\tau_{\beta z} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\,\partial z} - G\frac{\partial^2 N}{\partial r\,\partial z}$$

$$\tau_{rz} = -\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)L + \frac{G}{r}\frac{\partial^2 N}{\partial\beta\,\partial z}$$

Если среда однородна, то общее решение системы (1.1) будет представлено совокупностью гармонической N и бигармонической L функций. Можно при этом показать, что известные конструкции общих решений уравнений Ляме, полученные П. Ф. Папковичем, Б. Г. Галеркиным, Е. Треффцом и другими авторами, будут частными случаями рассмотренного выше. Так, например, придем к решению П. Ф. Папковича, если положим

$$L = -\int dz\int dz\int dz\int\left[\left(\nu\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + 4(1-\nu)\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)\right]dz \tag{1.24}$$

$$N = -\frac{4(1-\nu)}{2G}\int dz\int\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)dz \qquad (\Phi = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3)$$

Здесь Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 — произвольные гармонические функции.

Подставляя (1.24) в (1.20), получим

$$2G(u_x, u_y, u_z) = 4(1-\nu)\Phi_{1,2,3} - \frac{\partial\Phi}{\partial x, y, z} \tag{1.25}$$

что эквивалентно решению, приведенному в работе [5].

2. К двумерной задаче теории упругости неоднородной среды можно перейти, если положить в формулах (1.18) и (1.20), что функция $N = 0$, а L не зависит от координаты x или y. Пусть, например, $L = L(x, z)$. Тогда, согласно (1.18), функция L должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\Delta L - \frac{G}{1-\nu^*}\left\{\frac{1}{G}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\nu^*\Delta L) - \nu^*\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta L\right] - 2\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu^*)\Delta L\right]\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{G}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[\nu^*\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - (1-\nu^*)\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right)\right\} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.1}$$

Здесь $\nu^* = \nu$ для случая деформации, происходящей в плоскости, параллельной xOz, и $\nu^* = \nu(1+\nu)$ для случая обобщенного плоского напряженного состояния.

Если коэффициент Пуассона постоянен, то уравнение (2.1) может быть записано в виде

$$\Delta\left(\frac{1}{G}\Delta L\right) - \frac{1}{1-\nu^*}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Из (1.20) следуют выражения для определения перемещений

$$u_x = -\frac{1}{2G}\left[\nu^*\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (1-\nu^*)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$u_z = -\frac{1}{G}\frac{\partial^3 L}{\partial x^2\,\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2G}\left[\nu^*\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - (1-\nu^*)\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]\right\}$$

Напряжения определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial z^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^4 L}{\partial x^4}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^4 L}{\partial x^3 \partial z} \tag{2.4}$$

Если ввести в рассмотрение функцию $\Lambda = \partial^2 L/\partial x^2$, то нетрудно увидеть, что она является аналогом функции напряжений Эри.

3. Применим для отыскания частных решений уравнений (1.13) и (1.18) метод разделения переменных. Положим

$$N(x, y, z) = \psi_1(x, y)\,\varphi_1(z), \qquad L(x, y, z) = \psi_2(x, y)\,\varphi_2(z) \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.13) и (1.18), увидим, что переменные разделяются, если функции $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 + \alpha^2\psi = 0 \tag{3.2}$$

где α — произвольный числовой параметр.

Для функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ получим уравнения

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + q(z)\frac{d\varphi_1}{dz} - \alpha^2\varphi_1 = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left\{\frac{1}{G}\left[(1-\nu)\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} + \alpha^2\nu\varphi_2\right]\right\} - 2\alpha^2\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{G}\frac{d\varphi_2}{dz}\right) +$$

$$+\frac{\alpha^2\nu}{G}\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} + \frac{\alpha^4(1-\nu)}{G}\varphi_2 = 0 \tag{3.4}$$

Если коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$, последнее уравнение несколько упрощается

$$\frac{d^4\varphi_2}{dz^4} - 2q(z)\frac{d^3\varphi_2}{dz^3} + \left[q^2(z) - q'(z) - 2\alpha^2\right]\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} + 2\alpha^2 q(z)\frac{d\varphi_2}{dz} +$$

$$+\alpha^2\left\{\alpha^2 + \frac{\nu}{1-\nu}\left[q^2(z) - q'(z)\right]\right\}\varphi_2 = 0, \quad q'(z) = \frac{d}{dz}q(z) \tag{3.5}$$

Уравнение колебаний на плоскости (3.2) допускает следующие частные решения [6], которые можно использовать во многих задачах теории упругости:

в декартовых координатах

$$\psi = e^{i(m_1 x + m_2 y)}, \qquad m_1^2 + m_2^2 = \alpha^2 \tag{3.6}$$

$$\psi = (A + Bx)\,e^{i\alpha y} + (C + Dy)\,e^{i\alpha x} \tag{3.7}$$

в цилиндрических координатах

$$\psi = e^{\pm im\beta}\left[AJ_m(\alpha r) + BY_m(\alpha r)\right] \qquad (m = 0, 1, 2\ldots) \tag{3.8}$$

$$\psi = \beta\left[CJ_0(\alpha r) + DY_0(\alpha r)\right] \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\beta = y/x) \tag{3.9}$$

Здесь A, B, C, D — произвольные постоянные; $J_m(\alpha r)$, $Y_m(\alpha r)$ — функции Бесселя соответственно, первого и второго рода порядка m.

Таким образом, основная трудность заключается в нахождении φ_1 и φ_2 из дифференциальных уравнений (3.3) и (3.4), решения которых для заданного закона изменения упругих характеристик, лишь в простейших случаях удается выразить через известные функции.

4. Рассмотрим некоторые из этих случаев. Если модуль упругости меняется по экспоненциальной зависимости, а коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$, то (3.3) и (3.4) превращаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их решение не представляет трудности. Отдельные задачи, относящиеся к этому случаю, уже рассматривались. Так, в работе [2] при исследовании осесимметричной деформации тел вращения получено для модуля упругости вида $E(z) = E_0 e^{\gamma z}$ уравнение, аналогичное (3.5).

Если в (3.3) положить $E(z) = k(z+h)^b$, то $q(z) = b/(z+h)$, и мы приходим к уравнению, эквивалентному рассмотренному в [7].

Степенной закон изменения модуля в плоской задаче теории упругости неоднородной среды рассматривался в работе [4], где исследовалось уравнение, аналогичное (3.6) при $q(z) = b/(z+h)$. Однако в работе указаны не все его решения, поэтому рассмотрим подробнее этот случай.

Полагая в (3.5) $E(z) = k(z+h)^b$ и делая замену переменной $z_1 = z + h$, получаем

$$\frac{d^4\varphi_2}{dz_1^4} - \frac{2b}{z_1}\frac{d^3\varphi_2}{dz_1^3} + \left[\frac{b(b+1)}{z_1^2} - 2\alpha^2\right]\frac{d^2\varphi_2}{dz_1^2} + \frac{2\alpha^2 b}{z_1}\frac{d\varphi_2}{dz_1} + \alpha^2\left(\alpha^2 + \frac{\nu}{1-\nu} b\,\frac{b+1}{z_1^2}\right)\varphi_2 = 0 \tag{4.1}$$

Решение этого уравнения согласно [4] имеет вид

$$\varphi_2 = z_1^{1/2(b+1)}\{C_1 M_{\lambda,\mu}(2\alpha z_1) + C_2 W_{\lambda,\mu}(2\alpha z_1) + C_3 M_{-\lambda,\mu}(2\alpha z_1) + C_4 W_{-\lambda,\mu}(2\alpha z_1)\}$$

$$\lambda = 1/2\sqrt{(b+1)[1 - \nu b/(1-\nu)]}, \quad \mu = -1 - 1/2\, b \tag{4.2}$$

Здесь $M_{\lambda,\mu}(2\alpha z_1)$, $W_{\lambda,\mu}(2\alpha z_1)$ — функции Уиттекера; C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Однако, если коэффициент Пуассона ν связан с показателем степени b зависимостью $\nu = 1/(b+1)$ или $b = -1$, то $\lambda = 0$, и (4.2) дает лишь два независимых решения уравнения (4.1). Для разыскания общего решения в этом случае положим в (4.1) $\eta = \alpha z_1$ и запишем в виде

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1-b}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \left(1 + \frac{1+b}{\eta^2}\right)\right]\left(\frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} - \frac{1+b}{\eta}\frac{d\varphi_2}{d\eta} - \varphi_2\right) = 0 \tag{4.3}$$

Задача, таким образом, сводится к разысканию функции φ_2 из неоднородного уравнения

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} - \frac{1+b}{\eta}\frac{d\varphi_2}{d\eta} - \varphi_2 = \varphi^+ \tag{4.4}$$

где φ^+ — общее решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi^+}{d\eta^2} + \frac{1-b}{\eta}\frac{d\varphi^+}{d\eta} - \left(1 + \frac{1+b}{\eta^2}\right)\varphi^+ = 0 \tag{4.5}$$

Решая (4.5) и (4.4), находим

$$\varphi_2 = z_1^n\{C_1 I_n(\alpha z_1) + C_2 K_n(\alpha z_1) +$$
$$+ C_3\left[I_n(\alpha z_1)\int K_n^2(\alpha z_1)\,dz_1 - K_n(\alpha z_1)\int I_n(\alpha z_1) K_n(\alpha z_1)\,dz_1\right] +$$
$$+ C_4\left[I_n(\alpha z_1)\int I_n(\alpha z_1) K_n(\alpha z_1)\,dz_1 - K_n(\alpha z_1)\int I_n^2(\alpha z_1)\,dz_1\right]\Big\}, \quad n = 1/2(b+2) \tag{4.6}$$

Здесь $I_n(\alpha z_1)$, $K_n(\alpha z_1)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода, порядка n.

Если величина $^1/_2\,(b+2)$ равна половине нечетного числа, то функции Бесселя, как известно, сводятся к комбинациям элементарных. В этом случае (4.6) легко удается преобразовать к табулированным функциям, так что получение численных результатов не представит трудности.

Например, при $b=-1$ решение (4.6) может быть представлено в виде

$$\varphi_2 = Ae^{\alpha z_1} + Be^{-\alpha z_1} + C\,[e^{\alpha z_1}\ln z_1 - e^{-\alpha z_1}\,\mathrm{Ei}\,(2\alpha z_1)] + $$
$$+ D\,[e^{-\alpha z_1}\ln z_1 - e^{\alpha z_1}\,\mathrm{Ei}\,(-2\alpha z_1)] \qquad (4.7)$$

Здесь $\mathrm{Ei}\,(2\alpha z_1)$ и $\mathrm{Ei}\,(-2\alpha z_1)$ — интегральные показательные функции.

Поступила 30 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Д у Ц и н Х у а. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. П о п о в Г. Я. К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве. Изв. высш. учебн. завед. Строительство и архитектура, 1959, № 11, 12.
3. Т е р - М к р т и ч ь я н Л. Н., Некоторые задачи теории упругости неоднородных упругих сред. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
4. Р о с т о в ц е в Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. П а п к о в и ч П. Ф. Теория упругости. М.— Л., Оборонгиз, 1939.
6. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
7. П р о ц е н к о В. С. Кручение упругого полупространства, модуль упругости которого изменяется по степенному закону. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 11.