Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
СЛУЧАЙ НАЛОЖЕНИЯ МАЛОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА КОНЕЧНУЮ

Л. М. Зубов

(Ростов-на-Дону)

Приведены общие соотношения и вариационные теоремы в теории малых деформаций упругого тела, наложенных на конечную деформацию. Установлена связь двух форм уравнений равновесия: в метрике недеформированного состояния и в метрике начального деформированного состояния тела. Получена формула для потенциальной энергии, накапливаемой в упругом предварительно напряженном теле при малой деформации. Сформулированы вариационные принципы, аналогичные вариационным принципам теории конечных деформаций [1] и отличающиеся от вариационных теорем классической теории упругости [2] несимметричностью дуальных тензоров.

Получено обобщение теорем Клапейрона и Бэтти на случай малых деформаций предварительно напряженного упругого тела. Сформулированные вариационные принципы относятся, в частности, и к задаче о бифуркации равновесия нелинейно-упругого тела.

Пусть v — объем, занимаемый упругим телом в недеформированном состоянии, а V° — объем, занимаемый им после деформации, вызванной массовыми силами $\mathbf{K}^\circ$ и поверхностными $\mathbf{F}^\circ$ ($\mathbf{F}^\circ$ — вектор силы, приходящийся на единицу площади недеформированного тела).

Рассматривается смежное с равновесным состоянием V°-объема равновесное состояние, задаваемое радиус-вектором точки деформированного тела

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \eta \mathbf{w}$$

где η — малый параметр.

В работах [3–5] даны две формы уравнений, описывающих малую деформацию упругого тела при наличии начальных напряжений.

В первом случае уравнения записываются в метрике состояния v-объема

$$\nabla \cdot \mathrm{D}^\bullet + \rho_0 \mathbf{k} = 0 \quad \text{в } v, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathrm{D}^\bullet = \mathbf{f} \quad \text{на } o$$

$$\mathrm{D}^\bullet = \left\{ \frac{d}{d\eta} \left[\mathrm{D} \left(\mathbf{R}^0 + \eta \mathbf{w} \right) \right] \right\}_{\eta=0} \tag{1}$$

Здесь ∇ — набла-оператор в метрике v-объема, $\mathbf{w}$ — вектор добавочного перемещения, D — тензор напряжений Пиола [4], ρ_0 — плотность материала в недеформированном состоянии, o — поверхность, ограничивающая объем v, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности o, $\mathbf{k}$ — добавочная массовая сила ($\mathbf{K} = \mathbf{K}^\circ + \eta \mathbf{k}$), $\mathbf{f}$ — добавочная поверхностная сила, рассчитанная на единицу площади поверхности o ($\mathbf{F} = \mathbf{F}^\circ + \eta \mathbf{f}$).

Во втором случае уравнения записываются в метрике $V°$-объема

$$\nabla'\cdot\Theta+\rho\mathbf{k}=0 \quad \text{в } V°, \qquad \mathbf{N}\cdot\Theta=\mathbf{f}' \quad \text{на } O$$
$$\Theta=\mathrm{T}^{\cdot}+\nabla'\cdot\mathbf{w}\mathrm{T}°-\nabla'\mathbf{w}^T\cdot\mathrm{T}° \tag{2}$$

Здесь O — поверхность, ограничивающая объем $V°$, ∇' — набла-оператор в метрике $V°$-объема, $\mathbf{N}$ — нормаль к поверхности O, ρ — плотность материала в состоянии $V°$-объема, $\mathbf{f}'$ — добавочная поверхностная сила, приходящаяся на единицу поверхности O ($\mathbf{F}'=\mathbf{F}'°+\eta\mathbf{f}'$), T — тензор напряжений Коши.

Установим связь между тензорами $\mathrm{D}^{\cdot}$ и Θ, основываясь на соотношении [4]

$$\mathrm{D}=\sqrt{G/g}\,(\nabla\mathbf{R}^T)^{-1}\cdot\mathrm{T} \tag{3}$$

Здесь $\sqrt{G/g}$ — отношение элементарных объемов деформированного и недеформированного тела.

Продифференцируем (3) по параметру η

$$\mathrm{D}^{\cdot}=(\sqrt{G/g})^{\cdot}\,(\nabla\mathbf{R}^T)^{-1}\cdot\mathrm{T}+\sqrt{G/g}\,(\nabla\mathbf{R}^T)^{-1}\cdot\mathrm{T}^{\cdot}-$$
$$-\sqrt{G/g}\,(\nabla\mathbf{R}^T)^{-1}\cdot\nabla\mathbf{w}^T\,(\nabla\mathbf{R}^T)^{-1}\cdot\mathrm{T}$$

Учитывая связь набла-операторов

$$\nabla=(\nabla\mathbf{R})\cdot\nabla' \tag{4}$$

и соотношение [5]

$$(\sqrt{G/g})^{\cdot}=\sqrt{G/g}\,\nabla'\cdot\mathbf{w}$$

получаем

$$\mathrm{D}^{\cdot}=\sqrt{G°/g}\,(\nabla\mathbf{R}^{\circ T})^{-1}\cdot(\mathrm{T}^{\cdot}+\nabla'\cdot\mathbf{w}\mathrm{T}°-\nabla'\mathbf{w}^T\cdot\mathrm{T}°)=\sqrt{G°/g}\,(\nabla\mathbf{R}^{\circ T})^{-1}\cdot\Theta \tag{5}$$

Таким образом, тензоры $\mathrm{D}^{\cdot}$ и Θ связаны тем же соотношением, что и тензоры $\mathrm{D}°$ и $\mathrm{T}°$.

В идеально упругом теле тензор напряжений Пиола связан с тензор-градиентом радиус-вектора точки деформированного тела следующим образом:

$$\mathrm{D}=dW/d\mathrm{C}, \qquad \mathrm{C}=\nabla\mathbf{R} \tag{6}$$

Здесь W — удельная потенциальная энергия на единицу объема до деформации.

Пусть $\mathbf{r}_s$ — векторный базис v-объема

$$\mathrm{D}=\partial^{st}\,\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t, \qquad \mathrm{C}=\mathrm{C}_{st}\,\mathbf{r}^s\mathbf{r}^t$$

Согласно (6), имеем

$$\partial^{\cdot st}=\frac{\partial^2 W}{\partial C_{st}\partial C_{mn}}\,\dot{C}_{mn}, \qquad \dot{C}_{mn}=\nabla_m w_n$$

Здесь ∇_m — символ ковариантной производной в метрике v-объема. Тензор четвертого ранга с компонентами

$$K^{st\,mn}=\partial^2 W/\partial C_{st}\,\partial C_{mn}$$

очевидно, обладает следующим свойством симметрии:

$$K^{st\,mn} = K^{mn\,st} \tag{7}$$

Пусть $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ — два различных вектора. Обозначим

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{w}_i) = K^{st\,mn}\nabla_m w_{in}\mathbf{r}_s\mathbf{r}_t \qquad (i = 1,2)$$

и докажем следующее соотношение взаимности

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{w}_1)\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}_2^T = \mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{w}_2)\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}_1^T \tag{8}$$

В самом деле, используя (7), имеем

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{w}_1)\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}_2^T = K^{st\,mn}\nabla_m w_{1n}\nabla_s w_{2t} =$$
$$= K^{mn\,st}\nabla_s w_{2t}\nabla_m w_{1n} = K^{st\,mn}\nabla_m w_{2n}\nabla_s w_{1t} = \mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{w}_2)\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}_1^T$$

Из (4), (5) и (8) нетрудно получить соотношение взаимности для тензора

$$\Theta(\mathbf{w}_1)\cdot\cdot\nabla'\mathbf{w}_2^T = \Theta(\mathbf{w}_2)\cdot\cdot\nabla'\mathbf{w}_1^T \tag{9}$$

Потенциальная энергия упругого тела при мертвых внешних силах записывается в виде

$$\Pi = \iiint\limits_v W\,d\tau_0 - \iiint\limits_v \rho_0\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}d\tau_0 - \iint\limits_o \mathbf{F}^\circ\cdot\mathbf{u}do$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения.

Вычислим приращение потенциальной энергии при сообщении точкам тела добавочного перемещения $\eta\mathbf{w}$ с точностью до членов второго порядка

$$\Pi - \Pi(\mathbf{R}^\circ) = \Pi_1\eta + \Pi_2\eta^2 + \ldots, \quad \Pi_1 = \Pi^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{R}^\circ), \quad \Pi_2 = {}^1/_2\ \Pi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}(\mathbf{R}^\circ)$$

Сославшись на (6), имеем

$$\Pi^{\boldsymbol{\cdot}} = \iiint\limits_v \mathrm{D}\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}^T d\tau_0 - \iiint\limits_v \rho_0\mathbf{K}\cdot\mathbf{w}\,d\tau_0 - \iint\limits_o \mathbf{F}^\circ\cdot\mathbf{w}\,do$$
$$\Pi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} = \iiint\limits_v \mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}^T d\tau_0 \qquad (\mathbf{K}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{F}^{\boldsymbol{\cdot}} = 0)$$

Далее, интегрируя по частям, получим

$$\Pi_1 = \iint\limits_o (\mathbf{n}\cdot\mathrm{D}^\circ - \mathbf{F}^\circ)\cdot\mathbf{w}\,do - \iiint\limits_v (\nabla\cdot\mathrm{D}^\circ + \rho_0\mathbf{K}^\circ)\cdot\mathbf{w}\,d\tau_0 = 0 \tag{10}$$

так как состояние, задаваемое вектором $\mathbf{R}^\circ$, равновесное.

Таким образом, имеет место следующее выражение для потенциальной энергии, накапливаемой в предварительно напряженном упругом теле при малой деформации и отсутствии добавочных внешних сил

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\iiint\limits_v \mathrm{D}^{\boldsymbol{\cdot}}\cdot\cdot\nabla\,\mathbf{w}^T d\tau_0 = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V^\circ} \Theta\cdot\cdot\nabla'\mathbf{w}^T d\tau \tag{11}$$

Последнее равенство в (11) следует из (4), (5).

Так как тензор $D^{\cdot}$ линейно зависит от тензора $\nabla \mathbf{w}$, то величины

$$W_2 = {}^1/_2\, D^{\cdot} \cdot\cdot \nabla \mathbf{w}^T, \qquad W_2' = {}^1/_2\, \Theta \cdot\cdot \nabla' \mathbf{w}^T \tag{12}$$

будут квадратичными формами от компонентов тензоров $\nabla \mathbf{w}$ и $\nabla' \mathbf{w}$ соответственно. Имея в виду соотношение взаимности (8), вычислим вариацию $\overset{*}{W}_2$

$$\delta W_2 = {}^1/_2\, D^{\cdot}(\mathbf{w}) \cdot\cdot \nabla \delta \mathbf{w}^T + {}^1/_2\, D^{\cdot}(\delta \mathbf{w}) \cdot\cdot \nabla \mathbf{w}^T = D^{\cdot}(\mathbf{w}) \cdot\cdot \delta \nabla \mathbf{w}^T$$

Отсюда следует, что тензор $D^{\cdot}$ является потенциальной тензорной функцией от тензора $\nabla \mathbf{w}$

$$D^{\cdot} = dW_2 / d\mathrm{L}, \qquad \mathrm{L} = \nabla \mathbf{w} \tag{13}$$

Аналогичным путем придем к равенству

$$\Theta = dW_2' / d\mathrm{L}', \qquad \mathrm{L}' = \nabla' \mathbf{w} \tag{14}$$

Будем предполагать, что начальные напряжения в теле таковы, что из (13), (14) можно выразить тензоры L и L′ соответственно через тензор $D^{\cdot}$ и Θ.

Введем в рассмотрение функции от тензоров $D^{\cdot}$ и Θ

$$B_2(D^{\cdot}) = D^{\cdot} \cdot\cdot \nabla \mathbf{w}^T - W_2, \qquad B_2'(\Theta) = \Theta \cdot\cdot \nabla' \mathbf{w}^T - W_2' \tag{15}$$

Тогда, согласно свойству преобразования Лежандра, получаем

$$\mathrm{L} = dB_2 / dD^{\cdot}, \qquad \mathrm{L}' = dB_2' / d\Theta \tag{16}$$

Наличие соотношений (13), (14) и (16) позволяет сформулировать вариационные принципы теории малых деформаций предварительно напряженного упругого тела.

Эти вариационные принципы вполне аналогичны содержащимся в работе [1], относящейся к теории конечных упругих деформаций; достаточно сделать в [1] следующую замену обозначений: $\nabla \mathbf{R}$ на $\nabla \mathbf{w}$ (или $\nabla' \mathbf{w}$), $\mathbf{u}$ на $\mathbf{w}$, D на $D^{\cdot}$ (или Θ), C на L (или L′), W на W_2 (или W_2'), B на B_2 (или B_2'), $\mathbf{F}^{\circ}$ на $\mathbf{f}$ (или $\mathbf{f}'$), $\mathbf{K}$ на $\mathbf{k}$.

Обозначения в скобках относятся к записи функционалов в метрике V°-объема.

Если добавочные внешние силы отсутствуют, то приведенные вариационные теоремы соответствуют задаче о бифуркации равновесия нелинейно-упругого тела.

Для частного случая (полулинейный материал при аффинной начальной деформации) второй вариационный принцип в теории малых деформаций с начальными напряжениями был сформулирован в работе [6]. Там же приведено соответствующее явное выражение функционала J_2.

Отметим еще некоторые соотношения, обобщающие известные теоремы классической линейной теории упругости на случай теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию. Из (2), (12) и формулы интегрирования по частям следует тождество, аналогичное теореме Клапейрона

$$\iiint\limits_{V^\circ} W_2' \, d\tau = \frac{1}{2} \iiint\limits_{V^\circ} \Theta \cdot\cdot \nabla' \mathbf{w}^T \, d\tau = \frac{1}{2} \iiint\limits_{V^\circ} \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{w} \, d\tau + \frac{1}{2} \iint\limits_{O} \mathbf{f}' \cdot \mathbf{w} dO \qquad (17)$$

Пусть под действием добавочных сил $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{f}_1'$ точки упругого тела получают малое добавочное перемещение $\mathbf{w}_1$, а под действием системы сил $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{f}_2'$ — перемещение $\mathbf{w}_2$.

Из (2), (9) следует теорема взаимности работ добавочных сил на добавочных перемещениях

$$\iiint\limits_{V^\circ} \rho \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \, d\tau + \iint\limits_{O} \mathbf{f}_1' \cdot \mathbf{w}_2 \, dO = \iiint\limits_{V^\circ} \rho \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{w}_1 \, d\tau + \iint\limits_{O} \mathbf{f}_2' \cdot \mathbf{w}_1 \, dO \qquad (18)$$

Автор благодарит А. И. Лурье за внимание к работе.

Поступила 27 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов Л. М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. Тонти Э. Вариационные принципы в теории упругости. Механика. Сб. перев., 1969, № 5.
3. Лурье А. И. Бифуркация равновесия идеально-упругого тела. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. Лурье А. И. Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
5. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
6. Зубов Л. М. Приближенная теория выпучивания тонких пластинок из полулинейного материала при аффинной начальной деформации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.