Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ПОВЕДЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

М. Ю. Жуков, Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается вопрос о новых формах равновесия равномерно сжатой замкнутой упругой сферической оболочки для значений нагрузки близких к критической, при которой безмоментное напряженное состояние теряет устойчивость. Задача [1] сводится к построению решений, ответвляющихся от тривиального в окрестности точки бифуркации, для уравнений [2]. Исследование проводится методом Ляпунова — Шмидта для широкого класса операторных уравнений в банаховых пространствах [3].

Аналитический метод Ляпунова — Шмидта применялся ранее И. И. Воровичем [4, 5] для построения новых форм равновесия в случае пластин и пологих оболочек. Рейсс [6] методом Пуанкаре исследовал задачу о бифуркации тривиального решения пологого сферического сегмента, когда на краю задаются меридиональные усилия, находящиеся в равновесии с равномерно распределенным поверхностным давлением, вследствие чего всегда существует безмоментная форма равновесия. Для задачи о равномерно сжатой замкнутой сфере в случае, когда спектр простой, поведение решений в окрестности точек бифуркаций изучено в [7] численно на ЭВМ при помощи метода «пристрелки». Этой же задаче посвящен обзор [8].

1. Постановка задачи. Рассматриваются в безразмерном виде уравнения Рейсснера для осесимметричной упругой деформации замкнутой сферической оболочки под действием равномерно распределенного давления [2]

$$\varepsilon^2 \Big\{(\Phi-\Phi_0)'' + \operatorname{ctg}\,\xi\,(\Phi-\Phi_0)' - \frac{\cos\Phi}{\sin^2\xi}(\sin\Phi-\sin\Phi_0) + \\ + \frac{\nu\Phi_0'}{\sin\xi}(\cos\Phi-\cos\Phi_0)\Big\} = \frac{1}{\sin\xi}\,(N\sin\Phi - T\cos\Phi)$$

$$\Big\{N'' + \operatorname{ctg}\xi\, N' - \Big(\frac{\cos^2\Phi_0}{\sin^2\xi} - \nu\Phi_0'\,\frac{\sin\Phi_0}{\sin\xi}\Big)N\Big\} = \frac{1}{\sin\xi}\,\{\cos\Phi - \cos\Phi_0 + \\ + \nu\sin\Phi_0 T' - (\sin^2\xi p)'\} + \Big[\frac{\cos\Phi_0\sin\Phi_0}{\sin^2\xi} + \nu\Phi_0'\,\frac{\cos\Phi_0}{\sin\xi}\Big]T - \nu p\cos\Phi_0 \qquad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$N(0) = N(\pi) = 0, \qquad \Phi(0) = 0, \qquad \Phi(\pi) = \pi \qquad (1.2)$$

Уравнения (1.1), (1.2) получаются из уравнений (28), (29) работы [2] если пренебречь влиянием поперечного сдвига и использовать соотношения

$$\Psi_H = NR^2\gamma E\varepsilon, \quad T = \frac{\Psi_V}{R^2\gamma E\varepsilon} = -\frac{1}{R^2}\int_0^\xi q\sin\xi d\xi \quad \Phi_0 = \xi, \quad \alpha = R$$

$$p_H = pE\gamma\varepsilon, \quad p_V = qE\gamma\varepsilon, \quad r = R\sin\xi, \quad z = -R\cos\xi \\ \varepsilon = h/R\gamma, \quad \gamma^2 = 12(1-\nu^2), \quad p = -\rho\sin\xi, \quad q = \rho\cos\xi \qquad (1.3)$$

Здесь $\Phi(\xi)$ — угол, который элемент оболочки составляет с осью абсцисс после деформации в соответствующей ξ точке, Ψ_H, Ψ_V и p_H, p_V — соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие напряжения и нагрузки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $h = \text{const}$ — толщина оболочки, R — радиус сферы.

Задача (1.1), (1.2) при любых значениях нагрузки ρ имеет тривиальное решение, соответствующее безмоментному напряженному состоянию

$$\Phi = \xi, \qquad N = -\,{}^1/_4\,\rho \sin 2\xi \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi)$$

Поэтому удобно произвести замену

$$\Phi = \beta + \xi, \qquad N = \psi - {}^1/_4\,\rho \sin 2\xi$$

Так как новые формы равновесия ищутся близкими к безмоментной, то естественно предположить величину β малой и пренебречь в (1.1), (1.2) членами выше второго порядка малости по β. В результате получим уравнения

$$\varepsilon^2\{A\beta + (1-\nu)\beta\} + {}^1/_2\,\rho\beta - \psi = {}^1/_2\,\varepsilon^2(\nu-3)\beta^2 \operatorname{ctg}\xi + \psi\beta \operatorname{ctg}\xi -$$
$$-\{A\psi + (1+\nu)\psi\} - \beta = {}^1/_2\,\beta^2 \operatorname{ctg}\xi$$
$$Aq \equiv q'' + \operatorname{ctg}\xi\, q' - \sin^{-2}\xi\, q \qquad (q = \beta, \psi) \tag{1.4}$$

с краевыми условиями

$$\beta(0) = \beta(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0 \tag{1.5}$$

Ниже определяется число ответвляющихся решений в окрестности точек бифуркации задачи (1.4), (1.5), и для каждого из них строятся асимптотические представления (теоремы 1—3). Это число колеблется от нуля до трех в зависимости от кратности спектра линеаризованной задачи.

Введем в рассмотрение гильбертовы пространства:

1) пространство E_1, состоящее из замыкания множества гладких вектор-функций $x \equiv (\beta, \psi)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.5), с конечной нормой

$$\|x\|_{E_1}^2 = \int_0^\pi \sin\xi\,[(A\beta)^2 + (A\psi)^2]\,d\xi$$

2) пространство E_2 вектор функций $u \equiv (u_1, u_2)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{E_2}^2 = \int_0^\pi \sin\xi\,[u_1{}^2 + u_2{}^2]\,d\xi$$

Тогда задачу (1.4), (1.5) можно записать в виде функционального уравнения

$$Bx = D(x) \tag{1.6}$$

Здесь B — линейный, а $D(x)$ — квадратичный оператор из E_1 и E_2

$$B = \begin{Vmatrix} \varepsilon^2\{A + 1 - \nu\} + {}^1/_2\,\rho, & -1 \\ -1, & -\{A + 1 + \nu\} \end{Vmatrix}$$

$$D(x) = \begin{Vmatrix} {}^1/_2\,\varepsilon^2(\nu-3)\beta^2\operatorname{ctg}\xi + \psi\beta\operatorname{ctg}\xi \\ {}^1/_2\,\beta^2\operatorname{ctg}\xi \end{Vmatrix}$$

Возможность записи задачи (1.4), (1.5) в виде (1.6) следует из оценок

$$\max_{0\leqslant\xi\leqslant\pi} |\beta| \leqslant M \| A\beta \|_{E_2}, \qquad \int_0^\pi \frac{\cos^2\xi}{\sin\xi}\, \beta^4 d\xi \leqslant M \| A\beta \|_{E_2}^2$$

Эти оценки следуют из рассмотрения задачи

$$A\beta = f, \qquad \beta(0) = \beta(\pi) = 0$$

записанной в интегральной форме, и применения неравенства Коши — Буняковского.

2. Исследование линеаризованной задачи. Рассмотрим в окрестности тривиального решения $x = (0, 0)$ уравнения (1.6) линеаризованную задачу

$$Bx = 0 \tag{2.1}$$

Собственные функции задачи (2.1) разыскиваются в виде

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k^1 (\cos\xi), \qquad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k P_k^1 (\cos\xi) \tag{2.2}$$

Здесь $P_k^1(\cos\xi)$ — присоединенные полиномы Лежандра, образующие полную ортонормированную систему [9].

Для определения a_m, b_m подставляем (2.2) в (2.1), умножаем на $P_m^1(\cos\xi)$, интегрируем с весом $\sin\xi$ от 0 до π и, учитывая соотношение

$$AP_k^1(\cos\xi) = -k(k+1) P_k^1(\cos\xi) \tag{2.3}$$

получаем систему

$$\begin{gathered} \{\varepsilon^2 [-m(m+1) + 1 - \nu] + {}^1/_2\, \rho\} a_m - b_m = 0 \\ -a_m - [-m(m+1) + 1 + \nu] b_m = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Для каждого m, приравнивая определитель системы (2.4) нулю, получим собственные значения задачи (2.1)

$$\rho = 2\varepsilon^2 (m^2 + m - 1 + \nu) + 2/(m^2 + m - 1 - \nu) \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

При фиксированных ε и ν найдем наименьшее собственное значение

$$\rho_* = \min(\rho_{[l]}, \rho_{[l]+1}) = 4\varepsilon + 4\nu\varepsilon^2 \tag{2.6}$$

Здесь $[l]$ означает целую часть числа l, удовлетворяющего соотношению

$$l^2 + l = \varepsilon^{-1} + 1 + \nu, \qquad l > 0$$

Видно, что собственные числа ρ_* могут быть простыми и двукратными; последнее имеет место, если $\rho_{[l]} = \rho_{[l]+1}$.

Если собственное значение ρ_* простое и $\rho_{[l]} < \rho_{[l]+1}$, то ему соответствует собственная функция оператора B

$$\varphi_* = \varphi_k = \left\| \begin{matrix} a_k P_k^1(\cos\xi) \\ b_k P_k^1(\cos\xi) \end{matrix} \right\| \qquad \begin{matrix} k = [l] \\ a_k = b_k(k^2 + k - 1 - \nu) \end{matrix} \tag{2.7}$$

Если ρ_* двукратное, то ему соответствуют две собственные функции φ_k и φ_{k+1}.

3. Построение новых форм равновесия. Для построения новых форм равновесия воспользуемся результатами работы [3].

Теорема 1. Пусть ρ_k простое собственное значение задачи (2.1), тогда:

а) если k четное, то в каждой из полуокрестностей $(\rho_k - \delta, \rho_k)$ и $(\rho_k, \rho_k + \delta)$ ответвляется по одному новому решению;

б) если k нечетное, то в одной из полуокрестностей новых решений не возникает, а в другой появляются два решения.

Доказательство. Обозначим через ρ_0 собственное значение задачи (2.1), а через λ малый параметр. Тогда, полагая

$$\rho = \rho_0 + \lambda, \qquad |\lambda| < \delta$$

(1.6) можно записать в виде

$$B_0 x = \lambda C x + D(x), \qquad C = \begin{Vmatrix} -1/2, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

Здесь B_0 — оператор B, в котором ρ заменено на собственное значение ρ_0.

Будем искать малые решения $x(\lambda)$ уравнения (3.1). Оператор B_0 находится на спектре и поэтому не имеет обратного. Построим оператор B_1

$$B_1 x \equiv B_0 x + \sum_{i=1}^{n} (x, \gamma_i)_{E_1} z_i$$

Здесь γ_i, z_i определены из работы [3]. По обобщенной лемме Шмидта существует обратный линейный ограниченный оператор $\Gamma = B_1^{-1}$. Легко видеть, что B_0 — самосопряженный оператор и поэтому можно положить $\psi_i = \varphi_i$, где ψ_i — собственный вектор сопряженного оператора. В качестве γ_i возьмем φ_i, тогда для определения a_i, b_i ко второму уравнению (2.4) добавится уравнение

$$(a_i^2 + b_i^2)\, i^2 (i+1)^2 = 1 \tag{3.2}$$

Вектор z_i возьмем в виде $z_i = i^2 (i+1)^2 \varphi_i$. В случае, когда ρ_k — простое собственное значение, заменим (3.1) эквивалентной системой

$$B_1 x = \lambda C x + D(x) + \mu z_k, \qquad \mu = (x, \gamma_k)_{E_1} \tag{3.3}$$

Будем искать малое решение $x = x(\lambda, \mu)$ этой системы в виде ряда

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i0}\mu^i + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}\lambda^j, \qquad x_{ij} \equiv (\beta_{ij}(\xi), \psi_{ij}(\xi)) \tag{3.4}$$

Подставив (3.4) в оператор $D(x)$, получим

$$D(x) = \sum_{i+j\geqslant 2} D_{ij}\mu^i\lambda^j \tag{3.5}$$

$$D_{ij} = \sum_{\substack{m+p=i \\ t+k=j}} \alpha \begin{Vmatrix} \{\varepsilon^2(\nu-3)\beta_{mt}\beta_{pk} + \beta_{mt}\psi_{pk} + \beta_{pk}\psi_{mt}\} \operatorname{ctg}\xi \\ \beta_{mt}\beta_{pk} \operatorname{ctg}\xi \end{Vmatrix}$$

Здесь $\alpha = {}^1/_2$, если $m = p$, $t = k$; $\alpha = 1$ в остальных случаях.

Подставляя (3.4) в первое уравнение (3.3), учитывая (3.5) и приравнивая члены при степенях $\mu^i\lambda^j$, получаем рекуррентную систему для нахождения x_{ij}

$$B_1x_{ij} = f_{ij},\ f_{01} = 0,\ f_{11} = Cx_{10} + D_{11},\ f_{10} = z_k \qquad (3.6)$$
$$f_{20} = D_{20},\ f_{30} = D_{30},\ldots$$

Затем, подставляя (3.4) во второе уравнение системы (3.3), получим уравнение разветвления

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \sum_{l=1}^{\infty} L_{kl}\lambda^l = 0$$
$$L_{ij} = (x_{ij},\ \gamma_k)_{E_1} = (B_1x_{ij},\ \psi_k)_{E_2} \qquad (3.7)$$

Из (3.6) с учетом (3.5) находим все x_i

$$x_{01} = 0,\ x_{10} = \varphi_k,\ x_{11} = \Gamma f_{11},\ x_{20} = \Gamma f_{20}$$

Теперь для L_{ij} из (3.7) имеем

$$L_{01} = 0,\ L_{11} = (Cx_{10},\ \psi_k)_{E_2},\ L_{20} = (f_{20},\ \psi_k)_{E_2},\ L_{30} = (f_{30},\ \psi_k)_{E_2}$$

Запишем коэффициенты L_{ij}, воспользовавшись видом φ_k, ψ_k, γ_k, z_k

$$L_{11} = -\frac{1}{2} a_k^2 \int_0^\pi P_k^1(\cos\xi)\, P_k^1(\cos\xi) \sin\xi\, d\xi = -\frac{1}{2} a_k^2 < 0$$

$$L_{20} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{\varepsilon^2(\nu - 3)\, a_k^3 + 3a_k^2 b_k\} \, [P_k^1(\cos\xi)]^3 \cos\xi\, d\xi$$

$$L_{30} = \int_0^\pi \{[\varepsilon^2(\nu - 3)\, \beta_{10}\, \beta_{20} + \beta_{20}\psi_{10} + \beta_{10}\psi_{20}]\, \beta_{10} + \beta_{10}\beta_{20}\psi_{10}\} \cos\xi\, d\xi \qquad (3.8)$$

Здесь a_k, b_k определены из (2.4), (3.2). Можно показать, что

$$S_{jk} \equiv \int_0^\pi [P_k^1(\cos\xi)]^2 P_j^1(\cos\xi) \cos\xi\, d\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ — нечетное} \\ 0, & \text{если } j > 2k \\ \neq 0, & \text{если } j \text{ — четное и } j \leqslant 2k \end{cases} \qquad (3.9)$$

Пусть теперь k — четное, тогда из (3.8), (3.9) следует, что $L_{20} \neq 0$, $L_{11} < 0$, и уравнение разветвления (3.7) имеет вид

$$L_{20}\mu^2 + L_{11}\lambda + \ldots = 0$$

Отсюда

$$\mu = -L_{11} / L_{20}^{-1} \lambda + o(\lambda)$$

Асимптотическое представление решения (3.4) запишется в виде

$$x = -L_{11}L_{20}^{-1}x_{10}\lambda + L_{11}^2L_{20}^{-2}x_{20}\lambda^2 - L_{11}L_{20}^{-1}x_{11}\lambda^2 \qquad (|\lambda| < \delta) \qquad (3.10)$$

Тогда в полуокрестностях $(\rho_k - \delta, \rho_k)$ и $(\rho_k, \rho_k + \delta)$ возникает по одному малому решению.

Пусть k нечетное, тогда из (3.8), (3.9) следует, что $L_{20} = 0$, $L_{30} \neq 0$, $L_{11} < 0$, и уравнение разветвления (3.8) примет вид

$$L_{30}\mu^3 + L_{11}\mu\lambda + (*) = 0$$

Отсюда

$$\mu = \pm (-L_{11}L_{30}^{-1} \lambda)^{1/2} + o(\lambda^{1/2})$$

В этом случае асимптотическое представление решения (3.4) имеет вид

$$x = \pm(-L_{11}L_{30}^{-1}\lambda)^{1/2}x_{10} - L_{11}L_{30}^{-1}x_{20}\lambda \pm (-L_{11}L_{30}^{-1}\lambda)^{1/2}x_{11}\lambda \quad (|\lambda| < \delta) \tag{3.11}$$

В зависимости от знака отношения $-L_{11} / L_{30}$ в одной из полуокрестностей $(\rho_k - \delta, \rho_k)$ и $(\rho_k, \rho_k + \delta)$ не будет возникать новых решений, а в другой появятся два новых решения.

В случае минимального собственного значения $\rho_k = \rho_*$ можно указать, в какой именно полуокрестности возникает пара новых решений.

Теорема 2. Пусть $\rho_k = \rho_*$ и k — нечетное, тогда в полуокрестности $\rho_k - \delta, \rho_k)$ возникает два новых решения.

Доказательство. Из (3.8) и минимаксного принципа Куранта [10] при помощи (3.5), (3.6) получим $L_{30} < 0$. Решение (3.11) будет вещественным, если $-L_{11}L_{30}^{-1} \lambda \geqslant 0$, т. е. $\lambda \leqslant 0$.

Теорема 3. Если минимальное собственное значение ρ_k задачи (2.1) двукратное, то в каждой из полуокрестностей $(\rho_k - \delta, \rho_k)$ и $(\rho_k, \rho_k + \delta)$ возникают три новых решения.

Доказательство. Пусть $\rho_0 = \rho_k = \rho_j$ двукратное. Это имеет место, когда

$$\varepsilon^2 = [(k^2 + k - 1 - \nu)(j^2 + j - 1 - \nu)]^{-1}$$

Заменим уравнение (3.1) эквивалентной системой

$$B_1x = \lambda Cx + D(x) + \mu_1 z_j + \mu_2 z_k, \quad \mu_1 = (x, \gamma_j)_{E_1}, \quad \mu_2 = (x, \gamma_k)_{E_1} \tag{3.12}$$

Будем искать малые решения $x = x(\lambda, \mu_1, \mu_2)$ этой системы в виде ряда

$$x = x_{001}\lambda + x_{100}\mu_1 + x_{010}\mu_2 + \sum_{i+n+m\geqslant 2} x_{inm}\mu_1^i \mu_2^n \lambda^m \tag{3.13}$$

$$x_{inm} \equiv (\beta_{inm}(\xi), \quad \psi_{inm}(\xi))$$

Положим, что j и k имеют разную четность (именно такой случай возможен при наименьшем собственном значении). Для определенности пусть j — нечетное. Аналогично предыдущему получим уравнения разветвления

$$\Phi_j(\mu_1, \mu_2, \lambda) \equiv L_{101}\mu_1\lambda + L_{110}\mu_1\mu_2 + o_3(\lambda, \mu_1, \mu_2) = 0$$

$$\Phi_k(\mu_1, \mu_2, \lambda) \equiv L_{011}\mu_2\lambda + L_{020}\mu_2^2 + L_{200}\mu_1^2 + o_3(\lambda, \mu_1, \mu_2) = 0$$

$$L_{101} = -{}^1/_2\, a_j^2, \qquad L_{011} = -{}^1/_2\, a_k^2, \qquad L_{110} = 2L_{200}$$

$$L_{020} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \{\varepsilon^2(\nu-3)a_k^3 + 3a_k^2 b_k\}[P_k^1(\cos\xi)]^3 \cos\xi\, d\xi \qquad (3.14)$$

$$L_{110} = \int_0^\pi \{\varepsilon^2(\nu-3)a_j^2 a_k + 2a_k a_j b_j + a_j^2 b_k\}[P_j^1(\cos\xi)]^2 P_k^1(\cos\xi)\cos\xi\, d\xi$$

$$\operatorname{ord} o_3(\lambda, \mu_1, \mu_2) \geqslant 3$$

Величины a_j, a_k, b_j, b_k, определены в (2.4), (3.2).

Далее, согласно [3], исключаем из (3.14) μ_1 и решаем полученное уравнение относительно μ_2. Затем, подставляя $\mu_2(\lambda)$, находим $\mu_1(\lambda)$. Окончательно имеем

$$\mu_1 = \omega_i\lambda + o(\lambda), \quad \mu_2 = \theta_i\lambda + o(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\omega_1 = 0, \quad \theta_1 = -L_{011}L_{020}^{-1}, \quad \theta_2 = \theta_3 = -L_{101}L_{110}^{-1}$$
$$\omega_2 = -\omega_3 = [L_{200}L_{101}(L_{011}L_{110} - L_{020}L_{101})]^{1/2}(L_{200}L_{110})^{-1}$$

т. е. в полуокрестностях $(\rho_k - \delta, \rho_k)$ и $(\rho_k, \rho_k + \delta)$ возникают три новых решения, асимптотическое представление которых запишется в виде

$$x_i = \omega_i\varphi_j\lambda + \theta_i\varphi_k\lambda + o(\lambda) \qquad (i = 1,2,3) \qquad (3.15)$$

Следующая теорема позволяет судить о поведении оболочки при изменении параметра λ в окрестности ρ_*.

Теорема 4. Если $\lambda \in (\rho_*, \rho_* + \delta)$, то функционал энергии $E(\rho) < 0$. Если $\lambda \in (\rho_* - \delta, \rho_*)$, то $E(\rho) > 0$. На тривиальном решении $x = (0, 0)$ функционал $E(\rho) \equiv 0$.

Эта теорема легко следует из (3.10), (3.11), (3.15) и вида функционала энергии.

Можно также показать, что тривиальное решение для значения $\rho \leqslant \rho_*$ реализует минимум потенциальной энергии (вторая вариация положительна) и таким образом устойчиво. Доказательство этого факта проводится при помощи рассуждений из [11].

Формулы (3.10), (3.11), (3.15) использовались для построения ответвляющихся форм равновесия. Расчет коэффициентов уравнения разветвления, входящих в указанные формулы, производился на ЭВМ. Интеграл (3.9) вычисляли по рекуррентным формулам, которые легко выводятся из [12]

$$S_{jk} = \frac{2j-1}{j-1}(U_{jk} - V_{jk}) - \frac{j}{j-1}S_{j-2,k}, \quad S_{0k} = 0$$
$$U_{jk} = 4\pi^{-1}\left[\frac{\Gamma(s-k+{}^1/_2)}{(t-k)!}\right]^2 \frac{(t+1)!\,\Gamma(s-j+{}^3/_2)}{(t-j+1)!\,\Gamma(t+{}^3/_2)}$$
$$V_{jk} = {}^1/_4\pi^{-1}\left[k(k+1)\frac{\Gamma(t-k+{}^1/_2)}{(s-k)!}\right]^2 \frac{j(j-1)(s-1)!\,\Gamma(t-j+{}^3/_2)}{(s-j+1)!\,\Gamma(s+{}^3/_2)}$$
$$j = 2i, \; j \leqslant 2k, \; s = k + i, \; t = s - 1$$

Расчеты проводили для значений ε из интервала $1 \cdot 10^{-4} \leqslant \varepsilon \leqslant 4.3 \cdot 10^{-2}$. Ниже для примера приведем значения коэффициентов разветвления для каждого из трех случаев. Первые два из теоремы 1, а последний из теоремы 3

$\varepsilon =$	$0.919\cdot10^{-2}$	$0.294\cdot10^{-2}$	$0.841\cdot10^{-3}$	$0.463\cdot10^{-3}$
$L_{11} =$	$-0.413188\cdot10^{-4}$	$-0.427478\cdot10^{-5}$	$-0.353082\cdot10^{-6}$	$-0.106969\cdot10^{-6}$
$L_{20} =$	$0.183134\cdot10^{-7}$	$0.260063\cdot10^{-9}$	$0.242242\cdot10^{-11}$	$0.258120\cdot10^{-12}$
$\varepsilon =$	$0.113\cdot10^{-1}$	$0.328\cdot10^{-2}$	$0.892\cdot10^{-3}$	$0.483\cdot10^{-3}$
$L_{11} =$	$-0.617206\cdot10^{-4}$	$-0.533977\cdot10^{-5}$	$-0.397177\cdot10^{-6}$	$-0.116689\cdot10^{-6}$
$L_{30} =$	$-0.312538\cdot10^{-5}$	$-0.116177\cdot10^{-6}$	$-0.336578\cdot10^{-8}$	$-0.629584\cdot10^{-9}$
$\varepsilon =$	$0.839\cdot10^{-2}$	$0.310\cdot10^{-2}$	$0.817\cdot10^{-3}$	$0.473\cdot10^{-3}$
$L_{101} =$	$-0.286944\cdot10^{-4}$	$-0.533977\cdot10^{-5}$	$-0.314941\cdot10^{-6}$	$-0.116689\cdot10^{-6}$
$L_{011} =$	$-0.413188\cdot10^{-4}$	$-0.427478\cdot10^{-5}$	$-0.353082\cdot10^{-6}$	$-0.106969\cdot10^{-6}$
$L_{110} =$	$0.232177\cdot10^{-7}$	$0.686889\cdot10^{-9}$	$0.419973\cdot10^{-11}$	$0.575527\cdot10^{-12}$
$L_{020} =$	$0.183391\cdot10^{-7}$	$0.259981\cdot10^{-9}$	$0.242254\cdot10^{-11}$	$0.258115\cdot10^{-12}$

Отметим, что по формулам (3.10), (3.11), (3.15) теперь легко вычисляются значения $\beta'(0)$ и $\psi'(0)$, которые можно использовать в качестве начальных параметров при нахождении решений методом Рунге — Кутта.

Авторы выражают глубокую благодарность В. И. Юдовичу и В. А. Треногину за помощь и внимание к работе.

Поступила 31 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Осесимметричная эластика сферической оболочки. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Reissner E. On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution. In: Progr. Appl. Mech. (The Prager Anniversary Volume). N. Y.; The Macmillan Co., 1963.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., «Наука», 1969.
4. Ворович И. И. О поведении круглой плиты после потери устойчивости. Уч. зап. Ростовск. ун-та, 1955, т. 32, вып. 4, стр. 55—60.
5. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
6. Reiss E. L. Bifurcation Buckling of Spherical Caps. Communs Pure and Appl. math., 1965, vol. 18, No. 1/2, p. 65—82.
7. Bauer L., Reiss E. L., Keller H. B. Axisymmetric Buckling of Hollow Spheres and Hemispheres. Communs Pure and Appl. Math., vol. 23, No. 4.
8. Koiter W. T. The nonlinear buckling problem of a complate shperical sheel under uniform external pressure, (Univ., Lab. of Eng. Mech. Rep., No. 412, Delft, 1968).
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966, стр. 670—672.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М., Гостехиздат, 1951.
11. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Замечание об устойчивости мембранных решений в нелинейной теории пластин и оболочек. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
12. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М., «Наука», 1970, т. 2, стр. 198.
13. Срубщик Л. С., Треногин В. А. О выпучивании гибких пластин. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.