

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

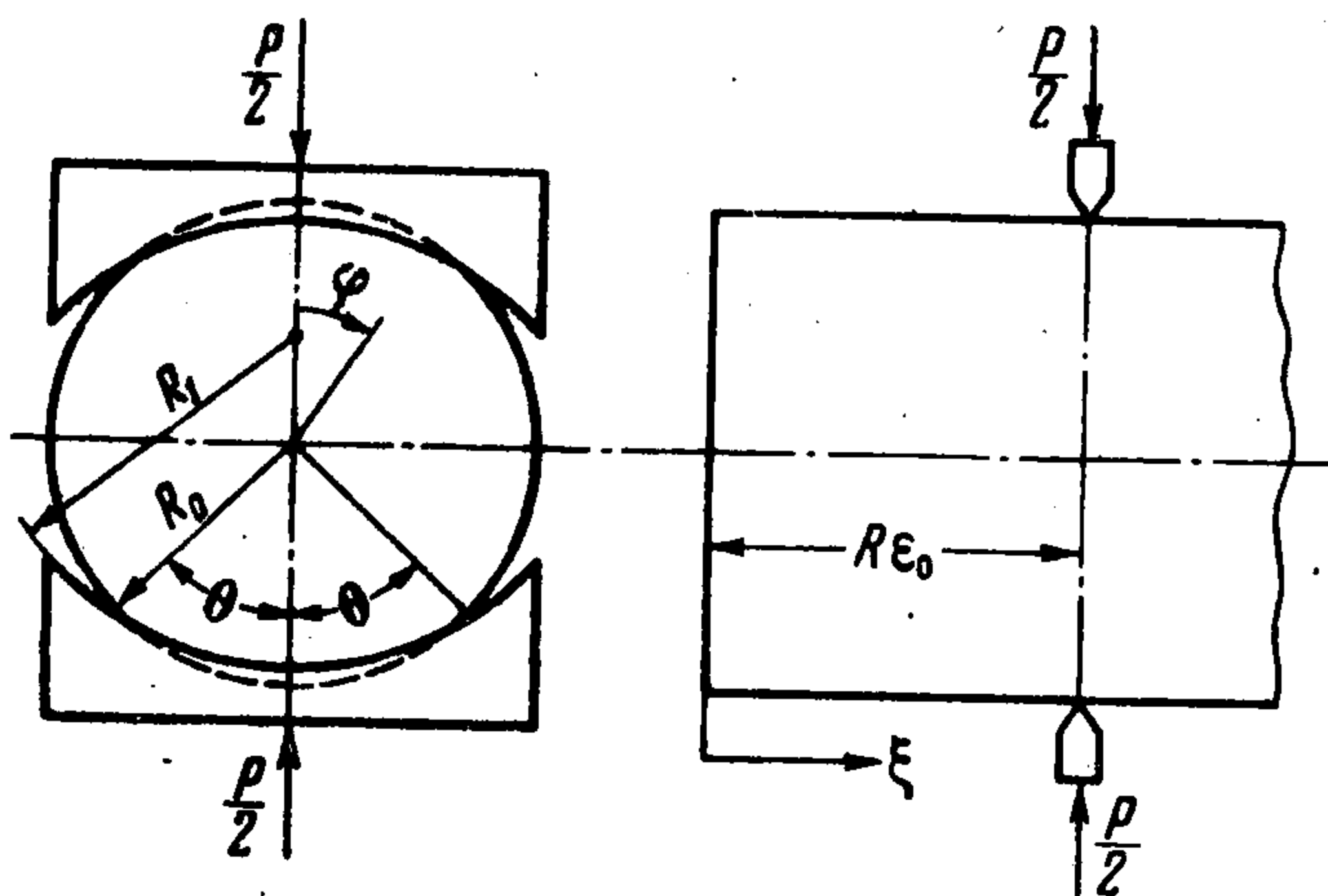
Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев

(Москва)

Рассмотрена задача о вдавливании острых штампов в свободно-опертую на торце полубесконечную цилиндрическую оболочку по отрезкам окружности поперечного сечения. Кромки штампов абсолютно жесткие, постоянного радиуса и не имеют острых углов. Исследуется влияние торца оболочки на характер изменения реакции штампов. Задача решается на базе уравнений теории оболочек, построенных с учетом гипотез Кирхгофа — Лява. Трение между поверхностью оболочки и кромками штампов не учитывается.

1. Рассмотрим свободно-опертую на торце $\xi = 0$ полубесконечную цилиндрическую оболочку (фиг. 1), сжимаемую по отрезкам окружности $\xi = \xi_0$ одинаковыми штампами, число штампов обозначим m , (на фиг. 1 ($m = 2$)).

Кромки штампов считаем острыми и абсолютно жесткими, так что контакт оболочки и штампа происходит по линии-дуге окружности, величина которой характеризуется центральным углом θ , подлежащим определению. Кривизну кромки штампа $1/R_1$ считаем постоянной. Со стороны штампов на оболочку действуют погонные усилия q (реакции), которые, не учитывая силы трения, будем считать направленными по нормали к поверхности внутрь оболочки. Исходя из линейной теории тонких пологих оболочек, будем предполагать также, что либо мал угол θ , либо радиус R_1 кромки штампов мало отличается от радиуса наружной поверхности оболочки R_0 .



Фиг. 1

Исходное уравнение задачи получим из условия плотного прилегания оболочки к штампу в зоне контакта, которое можно записать в виде $\kappa_2 = 1/R_1 - 1/R_0$, где κ_2 — изгибная деформация оболочки в окружном направлении на линии контакта.

Зная функцию Грина Ψ для свободно-опертой на торце $\xi = 0$ полубесконечной оболочки, деформацию κ_2 можно определить по формулам работы [1]. Покажем, что

$$\Psi = \Phi(\xi - \xi_0, \varphi - \varphi_0) - \Phi(\xi + \xi_0, \varphi - \varphi_0)$$

где $\Phi(x, y)$ — функция Грина для бесконечно-длинной оболочки; ξ_0, φ_0 — точка приложения сосредоточенного фактора; ξ, φ — точка, где ищется решение; ξ, ξ_0 — продольные координаты, отнесенные к радиусу, φ, φ_0 — поперечные координаты, задаваемые центральными углами (фиг. 1).

Функция $\Phi(\xi - \xi_0, \varphi - \varphi_0)$ будет частным решением уравнения [1]

$$D\Phi = \delta(\xi - \xi_0, \varphi - \varphi_0) \quad (1.1)$$

где D — известный линейный дифференциальный оператор, $\delta(\xi - \xi_0, \varphi - \varphi_0)$ — двумерная дельта-функция. Поэтому для области $\xi \geq 0, \xi_0 > 0$ функция $\Phi(\xi + \xi_0, \varphi - \varphi_0)$ будет решением однородного уравнения $D\Phi = 0$. Таким образом, определенная выше функция Ψ есть решение уравнения (1.1).

С другой стороны, в силу четности функции $\Phi(x, y)$ функция Ψ и все ее четные производные обращаются в нуль на линии $\xi = 0$. В граничные условия для свободно-опертой на торце $\xi = 0$ оболочки войдут только четные производные от Ψ . Поэтому сделанное утверждение можно считать доказанным.

Используя результаты работы [1] и опуская промежуточные выкладки, исходное интегральное уравнение для определения реакции штампа q запишем в виде

$$\int_{-\beta}^{\beta} \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right| q d\alpha_0 = \int_{-\beta}^{\beta} \{K(\alpha - \alpha_1) - K_1(\alpha - \alpha_1)\} q d\alpha_1 - m\omega_0 \quad (1.2)$$

$$K_1(\alpha - \alpha_1) = \frac{x \operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x - \cos(\alpha - \alpha_1)} - \frac{1}{2} \ln [2(\operatorname{ch} 2x - \cos(\alpha - \alpha_1))] \quad (1.3)$$

$$K(\alpha - \alpha_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos k(\alpha - \alpha_1)$$

$$\omega_0 = \frac{4\pi E h a^2}{1 - \nu^2} \left(1 - \frac{R_0}{R_1}\right), \quad a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \alpha = m\varphi, \quad \beta = m\theta \quad (1.4)$$

$$b_k = -1 + (1 + 2kx) e^{-2kx} + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{r_j} [c_j(1 - \eta_j) - d_j \zeta_j] \quad (1.5)$$

$$x = m\xi_0, \quad \eta_j + i\zeta_j = e^{-2kx(-q_j + ip_j)}, \quad r_j e^{i\gamma_j} = p_j q_j (b_j + ia_j) \quad (1.6)$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; R, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки; p_j, q_j — соответственно действительная и мнимая часть корней характеристического уравнения теории оболочек, значение которых для пологих оболочек дано в работе [1]; a_j и b_j — постоянные коэффициенты, также приведенные в работе [1].

Коэффициенты c_j и d_j получаются соответственно, если в операторе

$$- \left\{ (2 + \nu) \frac{\partial^4 (\cdot)}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 (\cdot)}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (\cdot) \right\} \quad (1.7)$$

вместо $\partial^k (\cdot) / \partial \xi^k$ поставить величину $n^{k-6} (-1)^k \rho_j^k$, умноженную на $\sin(\gamma_j - k\omega_j)$ и $\cos(\gamma_j - k\omega_j)$, а вместо $\partial^m (\cdot) / \partial \varphi^m$ — величину

$n^m \operatorname{sign} (d^m \cos \varphi / d\varphi^m)$; причем $n = km$; через p_j и ω_j обозначены модуль и аргумент комплексного числа $q_j + ip_j$.

Дифференциальный оператор (1.7) есть оператор, применяемый к основной разрешающей функции Грина Ψ для получения функции Грина, характеризующей изгибную деформацию оболочки κ_2 .

Ядро типа логарифма в левой части уравнения (1.2) получено выделением главного значения ядра от функции Грина $\Phi (\xi - \xi_0, \varphi - \varphi_0)$ для бесконечно длинной оболочки. Ядро K_1 в правой части есть главное значение ядра от функции Грина $\Phi (\xi + \xi_0, \varphi - \varphi_0)$, $K (\alpha - \alpha_1)$ — оставшаяся после выделения главного значения часть ядра. Можно показать, что коэффициенты b_k ядра (1.3) убывают как $1/k^4$.

Ядро K_1 можно было бы и не выделять в замкнутом виде, так как ни сама функция $\Phi (\xi + \xi_0, \varphi - \varphi_0)$, ни ее производные не обращаются в бесконечность при $\xi = \xi_0$, $\varphi = \varphi_0$ и $\xi_0 \neq 0$. Но при малых ξ_0 ядро K_1 , согласно (1.3), может стать очень большим, поэтому без выделения K_1 ряд для ядра K сходился бы очень медленно.

Решение уравнения (1.2) при $\omega_0 = \operatorname{const}$ будет, очевидно, четным. Оно должно быть подчинено условию

$$\int_{-\beta}^{\beta} q \cos \frac{\alpha}{m} d\alpha = \frac{P}{R} \quad (1.8)$$

Здесь P/m — сила, приложенная к штампу извне (фиг. 1). Условие (1.8) устанавливает связь между углом $\beta = m\theta$, характеризующим величину зоны контакта, и силой P .

Для того чтобы выделить особенность решения q на концах зоны контакта в явном виде и упростить последующее решение задачи, преобразуем уравнение (1.2) к уравнению Фредгольма второго рода.

2. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\beta}^{\beta} \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right| q d\alpha = f(\alpha_0) \quad (2.1)$$

с известной правой частью, которую будем считать непрерывной и четной функцией.

Интегрируя левую часть уравнения (2.1) по частям, приведем уравнение (2.1) к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_0)$ относительно функции Q , определенной уравнением $dQ/d\alpha = q$, которое путем замены переменной $t = \exp(i\alpha)$ сводится к уравнению с ядром Коши.

Получив ограниченное (в силу физических соображений) решение Q и продифференцировав его, найдем решение уравнения (2.1) в виде

$$q(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi^2 X(\alpha_0)} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{X(\alpha) f'(\alpha) d\alpha}{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_0)} + \frac{A \cos \frac{1}{2} \alpha_0}{\pi X(\alpha_0)} \quad (2.2)$$

Постоянная A определяется из условия

$$A \ln \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(\alpha)}{X(\alpha)} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha \quad (2.3)$$

Каноническая функция

$$X(\alpha) = \sqrt{2(\cos \alpha - \cos \beta)} \quad (2.4)$$

Условие (2.3.) есть условие существования ограниченного решения Q промежуточного сингулярного уравнения.

Решение Q уравнения с ядром типа ctg можно было получить также методом Л. И. Седова [2]. Уравнения такого типа входят в класс уравнений с автоморфными ядрами [3], однако, в данном частном случае эту теорию применять нецелесообразно. Если в уравнении (1.2) считать правую часть условно известной функцией, то оно совпадает с (2.1). Поэтому, подставляя в решение (2.2) и условие (2.3) вместо $f(\alpha)$ правую часть уравнения (1.2), преобразуем их после изменения порядка интегрирования и вычисления внутренних интегралов к виду

$$q(\alpha_0) + \frac{1}{\pi X(\alpha_0)} \int_{-\beta}^{\beta} [R(\alpha_1, \alpha_0) - R_1(\alpha_1, \alpha_0)] q d\alpha_1 + \frac{A \cos^{1/2} \alpha_0}{\pi X(\alpha_0)} \quad (2.5)$$

$$A \ln \sin \frac{\beta}{2} = \int_{-\beta}^{\beta} [\Psi(\alpha_1) - \Psi_1(\alpha_1)] q d\alpha_1 - \omega_0 m \quad (2.6)$$

$$R(\alpha_1, \alpha_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\alpha_1 J_k(\alpha_0) \quad (2.7)$$

$$\Psi(\alpha_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} (P_k - P_{k-1}) \cos k\alpha_1 \quad (2.8)$$

Здесь $P_k = P_k(\cos \beta)$ — полиномы Лежандра, при вычислении которых использовано интегральное представление [4]

$$\int_0^{\beta} \frac{\cos(k + 1/2)\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos \beta)}} = \frac{\pi}{2} P_k(\cos \beta)$$

Функция $J_k(\alpha_0)$ в (2.7) имеет вид

$$J_k(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{X(\alpha) \sin k\alpha d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} = \sum_{m=0}^k a_m \cos(k - m + 1/2)\alpha_0 \quad (2.9)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\cos \beta, \quad a_m = P_m - 2 \cos \beta P_{m-1} + P_{m-2} \quad (2.10)$$

Интегралы (2.9) вычислялись путем перехода к переменной $t = \exp(i\alpha)$ по теории вычетов [5].

Ядро $R_1(\alpha_1, \alpha_0)$ в уравнении (2.5) имеет вид

$$R_1(\alpha_1, \alpha_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{dK_1(\alpha - \alpha_1)}{d\alpha} \frac{X(\alpha) d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} \quad (2.11)$$

где K_1 — ядро (1.3).

Вычислив интеграл в правой части формулы (2.11), получим

$$R_1(\alpha_1, \alpha_0) = -\cos \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\rho_2}{2\rho_1} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{x}{\rho_1 \rho_2} \left\{ \frac{\rho_3}{\rho_1} (\cos \alpha_0 - \cos \beta) \times \right. \\ \left. \times \left[\left(1 + \frac{\cos \omega}{\rho_1^2} \right) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{1}{\rho_1^2} \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right] - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right\} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 e^{i\varphi_1} &= \operatorname{sh} x \cos \frac{1}{2} \omega + i \operatorname{ch} x \sin \frac{1}{2} \omega & (2.13) \\ \rho_2^2 e^{2i\varphi_2} &= 2 (\operatorname{ch} 2x \cos \alpha_1 - \cos \beta + i \operatorname{sh} 2x \sin \alpha_1) \\ \rho_3 e^{i\varphi_3} &= \operatorname{ch} x \cos \frac{1}{2} \omega + i \operatorname{sh} x \sin \frac{1}{2} \omega, \quad \omega = \alpha_0 - \alpha_1 \end{aligned}$$

Функция Ψ_1 в уравнении (2.6) имеет вид

$$\Psi_1(\alpha_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{K_1(\alpha - \alpha_1) \cos \frac{1}{2} \alpha}{X(\alpha)} d\alpha \quad (2.14)$$

Этот интеграл вычислить в замкнутом виде не удастся. Его можно взять либо численно (о чем будет сказано ниже), либо использовать разложение

$$K_1(\alpha - \alpha_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2kx}{k} e^{-2kx} \cos k(\alpha - \alpha_1)$$

для ядра (1.3). Тогда

$$\Psi_1(\alpha_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2kx}{k} e^{-2kx} (P_k + P_{k-1}) \cos k\alpha_1 \quad (2.15)$$

Как доказывается в теории сингулярных интегральных уравнений [6], использованный выше метод Карлемана получения уравнения (2.5) является равносильным. Поэтому, учитывая единственность ограниченного решения уравнения (2.1), можно сделать вывод, что уравнение (1.2) содержит столько решений, сколько и уравнение (2.5). Последнее имеет единственное, не ограниченное на концах решение с особенностью типа $1/X(\alpha)$, где $X(\alpha)$ — каноническая функция (2.4). Это решение определяется, если задать величину зоны контакта $\beta = m\theta$, которая связана с внешним усилием P условием (1.8).

3. Решение уравнения (2.5) будем искать в виде

$$q = \frac{Ay(\alpha)}{\pi X(\alpha)} \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (2.5), условия (2.6) и (1.8) преобразуются в следующие соотношения

$$y(\alpha_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \{R(\alpha_1, \alpha_0) - R_1(\alpha_1, \alpha_0)\} \frac{y d\alpha_1}{X(\alpha_1)} = \cos \frac{\alpha_0}{2} \quad (3.2)$$

$$A = -\omega_0 m \left[\ln \sin \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\Psi(\alpha_1) - \Psi_1(\alpha_1)}{X(\alpha_1)} y d\alpha_1 \right]^{-1} \quad (3.3)$$

$$\frac{P}{R} = \frac{A}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{y(\alpha) \cos \frac{\alpha}{m}}{X(\alpha)} d\alpha \quad (3.4)$$

Перейдем в уравнениях (3.2) — (3.4) к новой переменной γ , определяемой формулой

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} / \sin \frac{\beta}{2}$$

Тогда отрезок $(-\beta, \beta)$ деформируется в отрезок $(-\pi, \pi)$ и все подынтегральные функции станут ограниченными, так как $d\alpha / X(\alpha) = d\gamma / 2 \cos \frac{1}{2} \alpha$.

Далее в силу четности реакции q , а следовательно, и новой искомой функции y , интегралы от $-\pi$ до π можно заменить на интегралы от нуля до π . При этом следует взять только четную по α_1 часть ядра R_1 и функции Ψ_1 . Теперь отрезок $0, \pi$ разобьем на N равных частей и применим квадратурную формулу Симпсона.

В итоге вместо уравнения (3.2) получим систему $N + 1$ алгебраических уравнений. Система должна быть просчитана для какого-либо одного значения параметра ω_0 , определяемого формулой (1.4), так как, согласно соотношениям (3.1) — (3.4), функция y от ω_0 не зависит, а реакция q и усилие P зависят линейно.

4. Уравнение (3.2), преобразованное указанным выше способом к системе 11 алгебраических уравнений, решалось численно на ЭЦВМ БЭСМ-4. Значение функции y и реакции q считалось для значений координаты $\xi_0 = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$.

Для каждого из приведенных выше значений ξ_0 выбирались различные значения параметра β , характеризующего величину зоны контакта. При $\xi_0 = 0.05, 0.1$ бралось $\beta = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$, при остальных ξ_0 (кроме указанных значений) брались значения $\beta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.1$. В ряду (2.7) для ядра удерживалось 20 членов.

Результаты для оболочки с параметрами $R/h = 100, 1 - R_0/R_1 = 0.01$ при $m = 2, \xi_0 = 2$ сравнивались при 20 и 40 членах ряда (2.7). Первые четыре значащих цифры для y при этом совпали.

На фиг. 2 представлены некоторые результаты расчета для оболочки с параметрами $R/h = 100, 1 - R_0/R_1 = 0.01$, нагруженной двумя штампами ($m = 2$).

На фиг. 2, а показано, как изменяется решение уравнения (3.2) в центре дуги контакта (три верхних кривых) и на ее конце (три нижних кривых) в зависимости от расстояния ξ_0 от торца оболочки до штампа. Изменение y по дуге контакта от $\alpha = 0$ до $\alpha = \beta$ носит характер монотонно-убывающей функции, направленной выпуклостью вверх. За недостатком места кривые $y = y(\alpha)$ не приводим.

Из фиг. 2, а видно, что при малых зонах контакта (кривая $\beta = 0.1$) функция y практически не меняется до значения $\xi_0 = 0.5$, затем ее значение в центре зоны контакта $y(0)$ резко возрастает, а значение на конце $y(\beta)$ резко убывает. С увеличением зоны контакта β характер кривых y хотя и сохраняется, но влияние торца оболочки распространяется все дальше вглубь оболочки (кривые $\beta = 0.5$ и 1). При $\xi_0 = 5$ оболочка ведет себя практически как бесконечно длинная, влияние торца не сказывается.

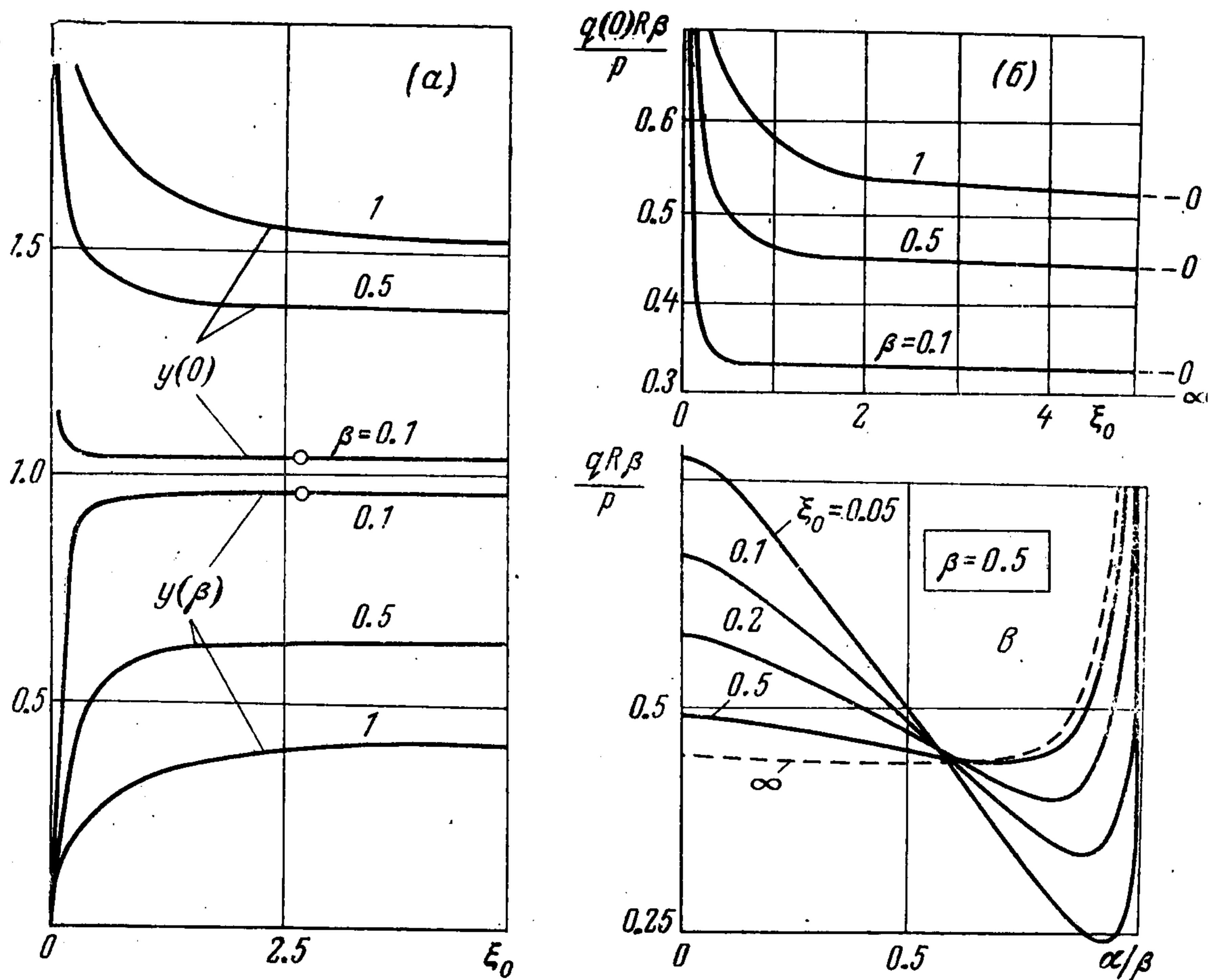
Картина изменения безразмерной реакции штампа $qR\beta/P$ в центре зоны контакта показана на фиг. 2, б (P — суммарная сила, приложенная ко всем штампам извне). Точки справа — решение для бесконечно длинной оболочки.

На фиг. 2, в показан характер изменения безразмерной реакции по длине зоны контакта величины $\beta = 0.5$ при разных расстояниях ξ_0 от торца оболочки до штампа. Пунктиром показано решение для бесконечно длинной оболочки, полученное отдельно. Как видим, характер реакции резко меняется вблизи торца, но уже при $\xi_0 = 0.5$ мало отличается от реакции в бесконечно длинной оболочке.

В заключение укажем, что неограниченное возрастание реакции на конце зоны контакта есть следствие гипотез, заложенных в теорию оболочек — гипотезы прямых нормалей и гипотезы отсутствия сжатия слоев оболочки в направлении нормали.

Здесь имеет место картина, аналогичная картине в теории трещин, когда замена дискретной модели твердого тела континуальной приводит к неограниченным напряжениям на концах трещины. В реальной оболочке реакция на концах зоны контакта обратится, конечно, в нуль. Однако чем тоньше оболочка, тем большая концентрация реакции будет вблизи концов зоны контакта.

Неограниченная на концах реакция не есть недостаток решения, так как все усилия и моменты в срединной поверхности оболочки, за исключением перерезывающих сил, будут при этом ограничены в окрестности концов зоны контакта.



Фиг. 2

5. Приводим в качестве приложения вычисление интеграла (2.11). Из формулы (1.3) находим

$$\frac{dK_1}{d\alpha} = x \operatorname{sh} 2x \frac{df_1}{d\alpha} + \frac{1}{2} f_2 \quad (5.1)$$

$$f_1 = [\operatorname{ch} 2x - \cos(\alpha - \alpha_1)]^{-1}, \quad f_2 = \sin(\alpha - \alpha_1) / [\operatorname{ch} 2x - \cos(\alpha - \alpha_1)]$$

Обозначим

$$J_j = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f_j(\alpha) X(\alpha) d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} \quad (j = 1, 2)$$

Можно доказать, что имеет место следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{d\alpha} \left(X(\alpha_0) \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(\alpha)}{X(\alpha)} \frac{d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} \right) = \frac{1}{X(\alpha_0)} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f'(\alpha) X(\alpha) d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)}$$

справедливая для произвольной гладкой функции, удовлетворяющей условию

$$X(\alpha) f(\alpha) = 0 \quad \text{при } \alpha = \pm \beta$$

Используя ее для вычисления интеграла от первого слагаемого в выражении (5.1), получим

$$R_1(\alpha_1, \alpha) = x \operatorname{sh} 2x X(\alpha) \frac{d}{dx} [X(\alpha) J_1(\alpha)] + \frac{1}{2} J_2(\alpha) \quad (5.2)$$

Вычислим $J_2(\alpha)$. Сделаем замену переменной $t = \exp(i\alpha)$, переводящую отрезок $(-\beta, \beta)$ в дугу единичной окружности $(-\beta, \beta)$ (фиг. 3). Обозначим через $X^+(t)$ — предельное значение канонической функции

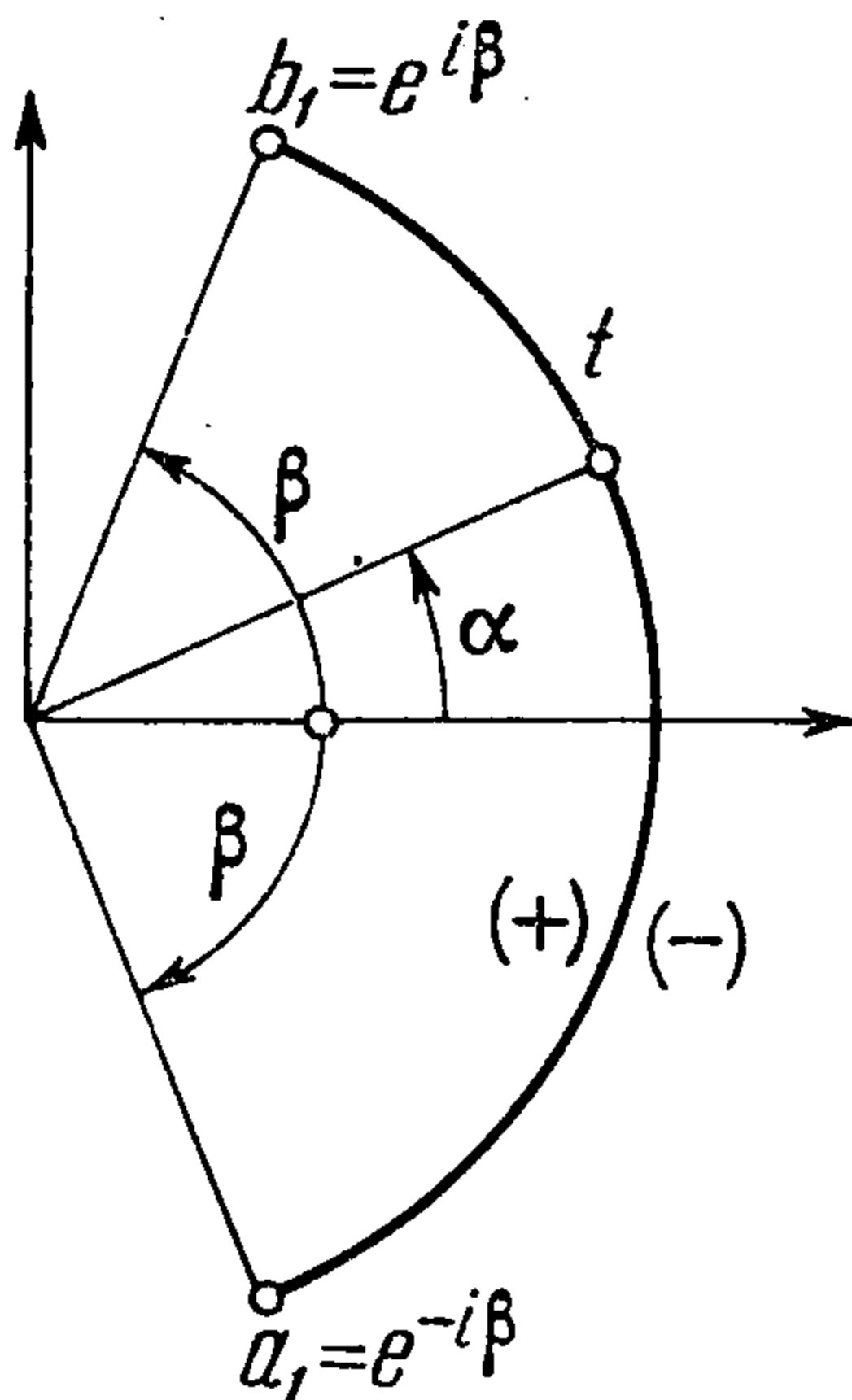
$$X(z) = \sqrt{(z - a_1)(z - b_1)}, \quad a_1 = e^{-i\beta}, \quad b_1 = e^{i\beta}$$

при приближении к дуге t слева, если смотреть в направлении от a_1 к b_1 . Под $X(z)$ будем понимать ветвь, равную z в окрестности точки $z = \infty$. Тогда

$$X(\alpha) = -e^{-i\frac{\alpha}{2}} X^+(t) \quad (5.3)$$

и интеграл J_2 преобразуется к виду

$$J_2 = -\frac{e^{1/2i\alpha_0}}{4\pi i t_1} \int_{a_1}^{b_1} \frac{(t^2 - t_1^2) X^+(t)}{t^2 [\operatorname{ch} 2x - (t^2 + t_1^2)/2tt_1]} \frac{dt}{t - t_0} \quad (5.4)$$



Фиг. 3

где t_1 и t_0 — точки на дуге, соответствующие α_1 и α_0 . Используя теорему о вычетах и то, что $X(z)$ меняет знак при переходе с одного берега дуги (разреза) на другой, для интегралов типа (5.4) легко получить формулу [5]

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{f(t) dt}{t - t_0} = -\pi i [\Sigma G_k(t_0) + G_\infty(t_0)] \quad (5.5)$$

где G_k и G_∞ — главные части подынтегральной функции $f(z)$ соответственно в точках $z = z_k$ и $z = \infty$. Для подынтегральной функции (4) в нуле и бесконечности будем иметь

$$G_0(t_0) = -2t_1 / t_0, \quad G_\infty(t_0) = -2t_1$$

Еще есть простые полюсы в точках

$$z_1 = t_1 (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x), \quad z_2 = t_1 (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x) \quad (5.6)$$

Подставляя все четыре главные части в формулу (5.5), получим

$$J_2 = 2 \cos \frac{\alpha_0}{2} + e^{1/2i\alpha_0} \left(\frac{X(z_1)}{t_0 - z_1} + \frac{X(z_2)}{t_0 - z_2} \right)$$

Подставляя теперь z_1 и z_2 из формулы (5.6) в формулу для $X(z)$, найдем

$$X(z_1) = 2e^{1/2i\alpha_1} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \sqrt{1/2(a + ib)}, \quad a = \operatorname{ch} 2x \cos \alpha_1 - \cos \beta$$

$$X(z_2) = 2e^{1/2i\alpha_1} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \sqrt{1/2(a - ib)}, \quad b = \operatorname{sh} 2x \sin \alpha_1$$

При вычислении $X(z_1)$ и $X(z_2)$ мог быть потерян знак. Чтобы его восстановить, заметим, что точка z_1 лежит на радиальном луче снаружи дуги единичного радиуса, z_2 — на том же луче внутри, так что

$$X(z_2) \rightarrow X^+(t), \quad X(z_1) \rightarrow X^-(t) \quad \text{при } z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow t$$

Сравнивая первый предел с выражением (5.3), убеждаемся, что в формуле для $X(z_2)$ нужно сменить знак. Дальнейшее преобразование интеграла J_2 очевидно. Точно также вычисляется интеграл J_1 . Пропедев выкладки и подставив J_1, J_2 в формулу (5.2), придем к выражению (2.12).

Проведем вычисление интеграла (2.9). Полагая $t = e^{i\alpha}$ и используя формулу (5.3), интеграл (2.9) представим в виде

$$J_k = -\frac{t_0^{1/2}}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{X^+(t) (t^k - t^{-k})}{t(t-t_0)} dt \quad (5.7)$$

Каноническая функция $X(z)$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$ может быть представлена соответственно в виде

$$\frac{1}{X(z)} = -\frac{1}{\sqrt{1-2z \cos \beta + z^2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{X(z)} = \frac{1}{z \sqrt{1-2z^{-1} \cos \beta + z^{-2}}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{z^n}$$

где $P_n = P_n(\cos \beta)$ — полиномы Лежандра.

Используя разложения (5.8), главное значение функции

$$f(z) = -X(z) (z^k - z^{-k}) / z = -X^2(z) (z^k - z^{-k}) / z X(z)$$

в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$ можно представить соответственно в виде

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{k-2} P_n z^{n-k+1} - 2 \cos \beta \sum_{n=0}^{k-1} P_n z^{n-k} + \sum_{n=0}^k P_n z^{n-k-1} \quad (5.9)$$

$$G_{\infty}(z) = \sum_{n=0}^{k-2} P_n z^{k-n-2} - 2 \cos \beta \sum_{n=0}^{k-1} P_n z^{k-n-1} + \sum_{n=0}^k P_n z^{k-n}$$

Положим в первой сумме формул (5.9) $n = n_1 - 1$ в третьей $n = n_1 + 1$ и вновь обозначим n_1 через n . Выражения (5.9) будут иметь вид

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{k-1} (P_{n+1} - 2 \cos \beta P_n + P_{n-1}) z^{n-k} + P_0 (z^{-k-1} - z^{-k})$$

$$G_{\infty}(z) = \sum_{n=0}^{k-1} (P_{n+1} - 2 \cos \beta P_n + P_{n-1}) z^{k-n-1} + P_0 (z^k - z^{k-1})$$

Положим здесь $z = t_0$, подставим затем $G_0(t_0)$ и $G_{\infty}(t_0)$ в формулу (5.5), заменим индекс n на $n_1 - 1$ и вновь обозначим n_1 через n . В итоге выражение для интеграла (5.7) получим в виде

$$J_k = \sum_{n=1}^k (P_n - 2 \cos \beta P_{n-1} + P_{n-2}) \cos(k-n+1/2) \alpha_0 + \cos(k+1/2) \alpha_0 - \cos(k-1/2) \alpha_0$$

Сравнив правую часть этого выражения с правой частью формулы (2.9), получим формулы (2.10) для коэффициентов a_m .

Поступила 2 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О расчете цилиндрических оболочек, нагруженных по линиям. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Изд. 2, М., Физматгиз, 1963.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., Физматгиз, 1966.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2. М., Физматгиз, 1962.