Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

# ОБЛАСТЬ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Л. Б. Пачепская, А. М. Формальский

(Москва)

Решается задача определения в фазовом пространстве множества начальных состояний, из которых линейная стационарная система может быть приведена в начало координат. Рассматриваются случаи, когда ограничены одновременно величина, импульс и энергия управляющего воздействия, а также, когда ограничены одновременно только его импульс и энергия.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим управляемую систему, описываемую линейным матричным дифференциальным уравнением с действительными постоянными коэффициентами

$$dx/dt = Ax + Bu \tag{1.1}$$

Здесь $x = \| x_i \|$, $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{is} \|$, $u = \| u_s \|$ — матрицы порядка $(n \times 1)$, $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(r \times 1)$ соответственно. Через $b_s$ обозначим $s$-й столбец матрицы $B$ ($b_s \neq 0$ при всех $s = 1, \ldots, r$).

Допустимыми управлениями будем считать измеримые функции $u_s(t)$ ($s = 1, \ldots, r$), удовлетворяющие одновременно трем неравенствам

$$|u_s(t)| \leqslant M_s \qquad (M_s = \text{const} > 0) \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty |u_s(\tau)| \, d\tau \leqslant N_s \qquad (N_s = \text{const} > 0) \tag{1.3}$$

$$\int_0^\infty u_s^2(\tau) \, d\tau \leqslant P_s \qquad (P_s = \text{const} > 0) \tag{1.4}$$

Условия (1.2), (1.3) и (1.4), с физической точки зрения, означают ограниченность величины, импульса и энергии управляющего воздействия соответственно.

Общее решение системы (1.1) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \, d\tau \tag{1.5}$$

где $x_0$ — вектор начального состояния.

Поставим задачу определения в фазовом пространстве $X$ множества $Q$ (области управляемости) состояний $x_0$, для каждого из которых существует допустимое управление, которое приводит систему в начало координат.

Задачу определения области управляемости $Q$ рассмотрим также и для случая, когда допустимыми управлениями являются функции, удовлетворяющие одновременно только двум интегральным ограничениям (1.3), (1.4).

В работах [1-3]поставленная задача решалась при $r = 1$ для случаев, когда допустимы управления, удовлетворяющие условиям (1.2) или (1.3), (1.4). Для случаев, когда на управление наложены ограничения (1.2) и (1.3) одновременно, задача решалась в [4,5], а когда наложены ограничения (1.2) и (1.4) — в [6].

Предположим, что при некотором допустимом управлении для $t = T$ имеет место равенство $x(t) = 0$, тогда из (1.5) имеем

$$-x_0 = \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau)\,d\tau = \sum_{s=1}^{r} \int_0^T e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\,d\tau \tag{1.6}$$

Допустимое управление, при котором осуществляется равенство (1.6), удовлетворяет, очевидно, условиям

$$\int_0^T |u_s(\tau)|\,d\tau \leqslant N_s \tag{1.7}$$

$$\int_0^T u_s^2(\tau)\,d\tau \leqslant P_s \tag{1.8}$$

Множество управлений $u_s(t)$, удовлетворяющих одновременно неравенствам (1.2), (1.7) и (1.8), обозначим через $\Omega_s^1(T)$, а удовлетворяющих одновременно неравенствам (1.7) и (1.8) — через $\Omega_s^2(T)$. Множество таких вектор-функций $u(t)$, что $u_s(t) \in \Omega_s^m(T)$ $(m = 1, 2)$, обозначим через $\Omega^m(T)$. Искомые области управляемости обозначим соответственно через $Q^1$ и $Q^2$.

Поставленную задачу можно переформулировать так: определить множество $Q^m$ векторов $x_0$, для каждого из которых существует такое $T$, что с помощью функции $u(t) \in \Omega^m(T)$ $(m = 1, 2)$ можно обеспечить равенство (1.6).

**2. Области достижимости.** Введем обозначения

$$v_s(T) = \int_0^T e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\,d\tau, \qquad v(T) = \sum_{s=1}^{r} v_s(T) = \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

и рассмотрим в пространстве $X$ области достижимости

$$Q_s^m(T) = \{v_s(T) : u_s(t) \in \Omega_s^m(T)\}$$

$$Q^m(T) = \sum_{s=1}^{r} Q_s^m(T) = \{v(T) : u(t) \in \Omega^m(T)\}$$

Области достижимости $Q_s^m(T)$ $(s = 1, \ldots, r;\ m = 1, 2)$ и $Q^m(T)$ обладают следующими свойствами.

1°. Замкнутость. 2°. Выпуклость. 3°. $Q_s^m(T)$ «растет» с ростом $T$, т. е. $Q_s^m(T_1) \in Q_s^m(T_2)$, если $T_1 \leqslant T_2$. 4°. Симметричность относительно начала координат.

Пользуясь слабой компактностью в себе сферы в пространстве $L_2[0, T]$ [7], можно доказать слабую компактность в себе множеств $\Omega_s^m(T)$ $(m = 1,2)$. Поскольку множество $Q_s^m(T)$ есть линейное отображение множества $\Omega_s^m(T)$, отсюда вытекает свойство 1°. Свойства 2°, 3°, 4° легко следуют из [2-6, 8, 9].

Поскольку $\Omega_s^1(T) \subseteq \Omega_s^2(T)$ имеют место соотношения $Q_s^1(T) \subseteq Q_s^2(T)$, $Q_s^1 \subseteq Q_s^2$ и $Q^1 \subseteq Q^2$.

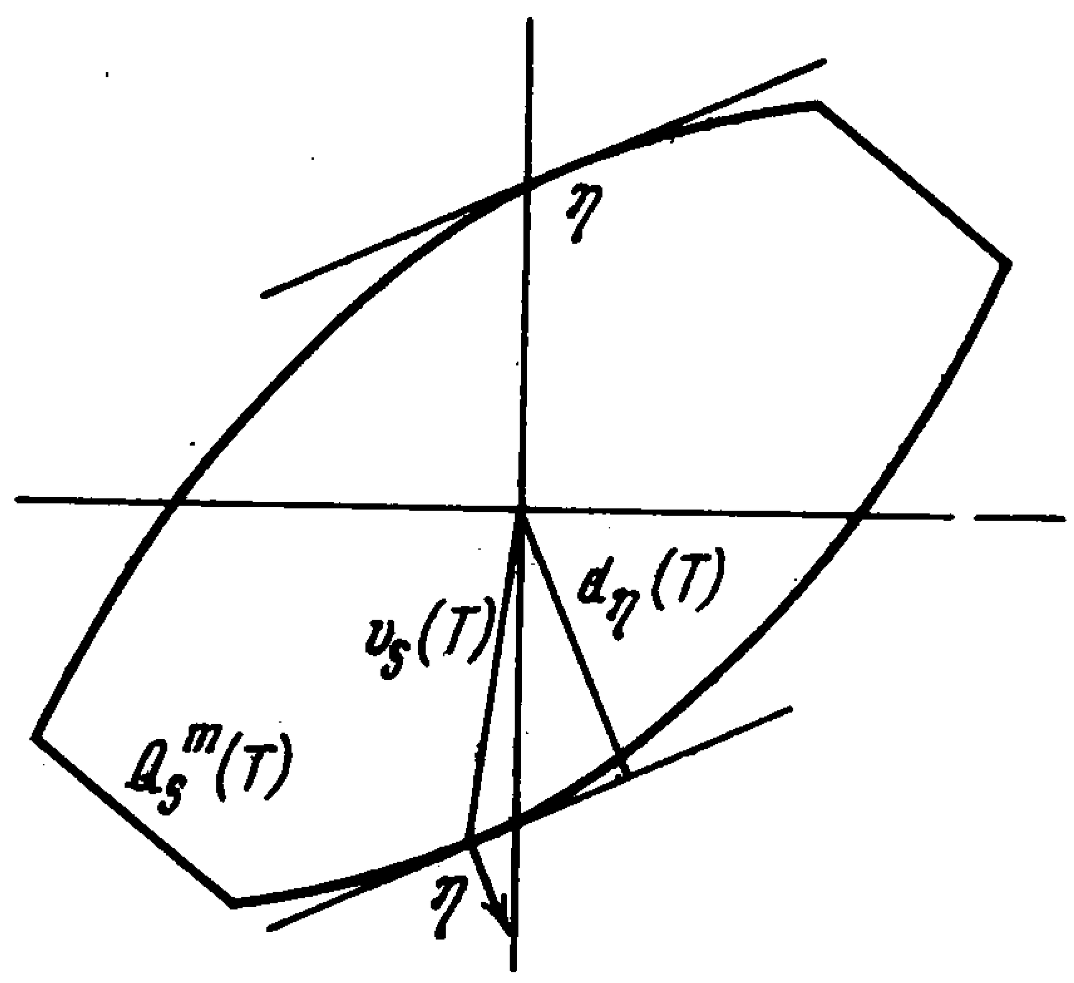
Из определения множества $Q_s^m(T)$ вытекает, что систему

$$dx/dt = Ax + b_s u_s \tag{2.2}$$

можно привести в начало координат за время $T$ тогда и только тогда, когда ее начальное состояние $x_0 \in Q_s^m(T)$. Область управляемости $Q_s^m$ системы (2.2) в силу свойства 3° представляет собой множество точек пространства $X$, которые включает в себя $Q_s^m(T)$ при $T \to \infty$. Область управляемости $Q^m$ системы (1.1) получается алгебраическим суммированием областей

$$Q_s^m \, (s = 1, \ldots, r), \qquad Q^m = \sum_{s=1}^{r} Q_s^m$$

поэтому будем рассматривать сначала задачу построения области управляемости $Q_s^m$ системы (2.2).




Фиг. 1

Возьмем произвольный единичный вектор $\eta$ $(1 \times n)$ и построим опорные гиперплоскости множества $Q_s^m(T)$, ортогональные вектору $\eta$. Из свойств 2° и 4° следует, что таких плоскостей две и они симметричны друг другу относительно начала координат (фиг. 1). Расстояние $d_\eta(T)$ от начала координат до этих плоскостей определяется выражением [10]

$$d_\eta(T) = \max_{v_s(T) \in Q_s^m(T)} (\eta v_s(T)) = \max_{u_s(t) \in \Omega_s^m(T)} \int_0^T \eta e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\, d\tau$$

Из свойств 1° и 2° следует, что множеству $Q_s^m(T)$ принадлежат те и только те точки $x$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|\eta x| \leqslant d_\eta(T)$$

при всевозможных единичных векторах $\eta$.

**3. Определение расстояний $d_\eta(T)$ для класса управлений $\Omega_s^1(T)$.** Будем решать задачу максимизации функционала

$$I_s(u) = \int_0^T \eta e^{-A\tau} b_s u_s(\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

при управлениях $u_s(t) \in \Omega_s^1(T)$.

Если $\eta e^{-At} b_s \equiv \mathrm{const}$, то при достаточно больших значениях $T$, максимизирующей как в классе $\Omega_s^1(T)$, так и в классе $\Omega_s^2(T)$, является, очевидно, функция $u_s(t) = N_s T^{-1} \operatorname{sgn}(\eta e^{-At} b_s)$, которая из трех соотношений (1.2), (1.7), (1.8) обращает в равенство только соотношение (1.7).

Будем считать далее, что $\eta e^{-At} b_s \not\equiv \mathrm{const}$.

Пусть $u_s(t)$ — управление, решающее задачу максимизации интеграла (3.1) при ограничениях (1.2) и (1.7). Из [4] вытекает, что при $T \geqslant N_s/M_s$ управление $u_s(t)$ равно $M_s$ на некотором множестве меры $N_s/M_s$ и равно нулю на дополнении этого множества до всего отрезка $[0, T]$. Интеграл $\int_0^T u_s^2(\tau)\,d\tau$ после подстановки в него этого управления дает при $T \geqslant N_s/M_s$ выражение $M_sN_s$. Если $M_sN_s \leqslant P_s$, то управление $u_s(t) \in \Omega_s^1(T)$. Следовательно, при условии $M_sN_s \leqslant P_s$ задача максимизации интеграла (3.1) в классе $\Omega_s^1(T)$ управлений сводится к задаче максимизации при наличии только двух условий (1.2) и (1.7), которая рассмотрена в [4].

В дальнейшем будем предполагать, что

$$M_sN_s > P_s \tag{3.2}$$

Пусть теперь $u_s(t)$ — управление, максимизирующее функционал (3.1) при ограничениях (1.2), (1.8). Возможны два случая: управление $u_s(t)$ не удовлетворяет неравенству (1.7) (случай $A$), управление $u_s(t)$ удовлетворяет неравенству (1.7) (случай $B$).

Рассмотрим сначала случай $A$. Для того чтобы решить задачу максимизации интеграла (3.1), рассмотрим вспомогательный функционал

$$I_s(u, \chi, \sigma) = \int_0^T \left[\eta e^{-A\tau} b_s u_s(\tau) - \chi\,|u_s(\tau)| - \frac{\sigma}{2} u_s^2(\tau)\right] d\tau \tag{3.3}$$

Здесь $\chi > 0$, $\sigma > 0$ — постоянные, представляющие собой множители Лагранжа. Для того чтобы максимизировать интеграл (3.3) при условии (1.2), нужно найти функцию $|u_s(t)| \leqslant M_s$, максимизирующую подынтегральное выражение. Такая функция, очевидно, имеет вид

$$u_s(t, \chi, \sigma) = \begin{cases} M_s \operatorname{sgn}(\eta e^{-At} b_s), & t \in E_s(T, \chi, \sigma) \\ \sigma^{-1}\left[|\eta e^{-At} b_s| - \chi\right] \operatorname{sgn}(\eta e^{-At} b_s), & t \in F_s(T, \chi, \sigma) \\ 0, & t \in G_s(T, \chi) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} E_s(T, \chi, \sigma) = \{t \in [0, T] : |\eta e^{-At} b_s| \geqslant \chi + \sigma M_s\} \\ F_s(T, \chi, \sigma) = \{t \in [0, T] : \chi \leqslant |\eta e^{-At} b_s| \leqslant \chi + \sigma M_s\} \\ G_s(T, \chi) = \{t \in [0, T] : |\eta e^{-At} b_s| \leqslant \chi\} \\ (E_s(T, \chi, \sigma) + F_s(T, \chi, \sigma) + G_s(T, \chi) = [0, T]) \end{gathered} \tag{3.5}$$

Подставим функцию (3.4) в соотношения (1.7) и (1.8) и покажем, что в случае $A$ существуют такие значения $\chi > 0$ и $\sigma > 0$, при которых эти соотношения обращаются в равенства. После подстановки получаются следующие уравнения относительно переменных $\chi$, $\sigma$:

$$\Phi_1(\chi, \sigma) = M_s \mu E_s(T, \chi, \sigma) + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{F_s(T, \chi, \sigma)} \left[|\eta e^{-A\tau} b_s| - \chi\right] d\tau = N_s \tag{3.6}$$

$$\Phi_2(\chi, \sigma) = M_s^2 \mu E_s(T, \chi, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_{F_s(T, \chi, \sigma)} \left[|\eta e^{-A\tau} b_s| - \chi\right]^2 d\tau = P_s \tag{3.7}$$

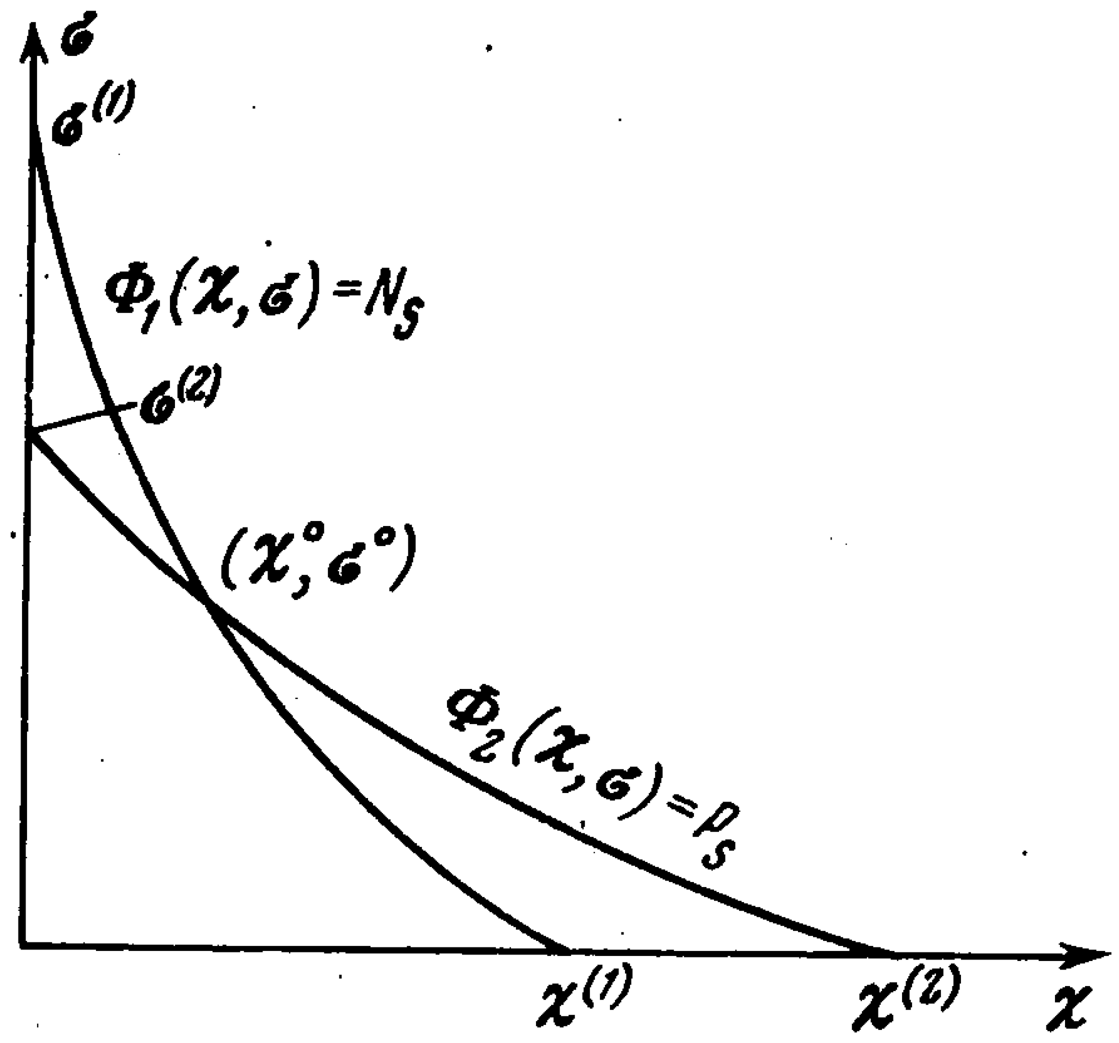
где $\mu E_s(T, \chi, \sigma)$ — мера в смысле Лебега [11] множества $E_s(T, \chi, \sigma)$.

Функции $\Phi_1(\chi, \sigma)$ и $\Phi_2(\chi, \sigma)$ непрерывны. Будем рассматривать эти функции только в первом квадранте ($\chi \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$) плоскости $\chi$, $\sigma$. При $\chi \to 0$ и $\sigma \to 0$ имеем $\Phi_1(\chi, \sigma) \to M_s T$, $\Phi_2(\chi,\sigma) \to M_s^2 T$. При значениях $T$, больших некоторого значения, имеют место неравенства $M_s T > N_s$ и $M_s^2 T > P_s$. При каждом фиксированном значении $\sigma$ функции $\Phi_1(\chi, \sigma)$ и $\Phi_2(\chi, \sigma)$ строго монотонно убывают при изменении $\chi$ от нуля до значения

$$\chi' = \max_{t \in [0, T]} (\eta e^{-At} b_s) \tag{3.8}$$

При $\chi = \chi'$, очевидно, $\Phi_1(\chi,\sigma) \equiv \Phi_2(\chi, \sigma) \equiv 0$. При каждом фиксированном значении $\chi < \chi'$ функции $\Phi_1(\chi,\sigma)$ и $\Phi_2(\chi,\sigma)$ монотонно убывают при возрастании значения $\sigma$. При $\sigma \to \infty$ имеем $\Phi_1(\chi, \sigma) \to 0$.

Из всего вышесказанного следует, что уравнения (3.6) и (3.7) определяют в первом квадранте плоскости $\chi,\sigma$ кривые, концы которых лежат на осях $\chi = 0$ и $\sigma = 0$. Каждая из этих кривых непрерывна, имеет только одну ветвь, не имеет самопересечений. Каждая из кривых монотонна, т. е. если две точки $(\chi^{(1)}, \sigma^{(1)})$ и $(\chi^{(2)}, \sigma^{(2)})$ кривой таковы, что $\chi^{(2)} > \chi^{(1)}$, то $\sigma^{(2)} < \sigma^{(1)}$.




Фиг. 2

Выясним взаимное расположение точек пересечения кривых (3.6) и (3.7) с осями $\chi = 0$ и $\sigma = 0$.

Пусть точки пересечения кривой (3.6) с осями $\sigma = 0$ и $\chi = 0$ имеют координаты $(\chi^{(1)}, 0)$ и $(0, \sigma^{(1)})$ соответственно, а точки пересечения кривой (3.7) имеют координаты $(\chi^{(2)}, 0)$ и $(0, \sigma^{(2)})$. Иначе говоря

$$\Phi_1(\chi^{(1)}, 0) = N_s, \quad \Phi_1(0, \sigma^{(1)}) = N_s$$

$$\Phi_2(\chi^{(2)}, 0) = P_s, \quad \Phi_2(0, \sigma^{(2)}) = P_s$$

Управление $u_s(t, \chi^{(1)}, 0)$, как следует из [4], решает задачу максимизации интеграла (3.1) при ограничениях (1.2) и (1.7); следовательно, $\Phi_2(\chi^{(1)}, 0) = M_s N_s$. В соответствии с условием (3.2) $\Phi_2(\chi^{(1)}, 0) > P_s$. Из монотонности функции $\Phi_2(\chi, 0)$ вытекает, что $\chi^{(1)} < \chi^{(2)}$.

Управление $u_s(t, 0, \sigma^{(2)})$, как следует из [6, 12], решает задачу максимизации интеграла (3.1) при ограничениях (1.2) и (1.8). Это управление в случае А не удовлетворяет условию (1.7), т. е. $\Phi_1(0,\sigma^{(2)}) > N_s$. Из монотонности функции $\Phi_1(0,\sigma)$ вытекает, что $\sigma^{(1)} > \sigma^{(2)}$. Отсюда заключаем (фиг. 2), что в первом квадранте существует точка $(\chi^\circ, \sigma^\circ)$ пересечения кривых (3.6) и (3.7). Следовательно, система уравнений (3.6) и (3.7) имеет решение $\chi^\circ > 0$, $\sigma^\circ > 0$.

Легко показать (например, так же, как в [12]), что управление $u_s(t,\chi^\circ, \sigma^\circ)$ максимизирует интеграл (3.1) при условиях (1.2), (1.7), (1.8).

Итак, в случае $A$ максимизирующее управление найдено; для расстояния $d_\eta(T)$ получается выражение

$$d_\eta(T) = M_s \int\limits_{E_s(T, \chi^\circ, \sigma^\circ)} |\eta e^{-A\tau} b_s| \, d\tau + \frac{1}{\sigma^\circ} \int\limits_{F_s(T, \chi^\circ, \sigma^\circ)} |\eta e^{-A\tau} b_s| (|\eta e^{-A\tau} b_s| - \chi^\circ) \, d\tau \tag{3.9}$$

Из выражений (3.5) и (3.6) вытекают следующие соотношения:

$$d_\eta(T) \geqslant M_s\chi^\circ\mu E_s(T, \chi, \sigma) + \frac{\chi^\circ}{\sigma^\circ} \int\limits_{F_s(T, \chi^\circ, \sigma^\circ)} [|\eta e^{-A\tau}b_s| - \chi^\circ]\, d\tau = \chi^\circ N_s \qquad (3.10)$$

Из выражений (3.5) и (3.7) получаем

$$d_\eta(T) \geqslant M_s^2\sigma^\circ\mu E_s(T, \chi^\circ, \sigma^\circ) + \frac{1}{\sigma^\circ} \int\limits_{F_s(T, \chi^\circ, \sigma^\circ)} [|\eta e^{-A\tau}b_s| - \chi^\circ]^2\, d\tau = \sigma^\circ P_s \qquad (3.11$$

Из соотношений (3.10), (3.11), а также из выражений (1.7), (3.1) и (3.8) вытекают неравенства

$$\max(\chi^\circ N_s, \sigma^\circ P_s) \leqslant d_\eta(T) \leqslant \chi' N_s \qquad (3.12)$$

Правое неравенство (3.12) имеет место, очевидно, для обоих классов управлений $\Omega_s^m(T)$ $(m = 1, 2)$.

Заметим, что выражение (3.4) дает возможность судить о структуре ограниченного условиями (1.2), (1.3), (1.4) управления, приводящего систему (1.1) в начало координат за минимально возможное время.

Пусть теперь имеет место случай $B$. Максимизирующее управление определяется выражением $u_s(t, 0, \sigma^{(2)})$. Расстояние $d_\eta(T)$ получается [6] из формулы (3.9), если в ней положить $\chi^\circ = 0$, $\sigma^\circ = \sigma^{(2)}$.

**4. Структура областей управляемости $Q_s^1$ и $Q^1$.** Пусть корни характеристического уравнения

$$\det \| A - \lambda E \| = 0 \qquad (4.1)$$

$\lambda_k = \varepsilon_k + i\omega_k$ кратностей $p_k$ имеют при $k = 1, \ldots, r_1$ положительные действительные части, при $k = r_1 + 1, \ldots, r_2$ — действительные части, равные нулю, и при $k = r_2 + 1, \ldots, r_3$ — отрицательные действительные части.

Как следует, например, из [13,14], матрица $e^{-At}$ имеет вид

$$e^{-At} = \sum_{k=1}^{r_3} \sum_{l=0}^{p_k-1} \alpha_{kl} e^{-\lambda_k t} t^l$$

где $\alpha_{kl}$ — постоянные матрицы с элементами $\alpha_{kl}^{ij}$

Выражение $\eta e^{-At} b_s$ имеет вид

$$\eta e^{-At} b_s = \sum_{k=1}^{r_3} \sum_{l=0}^{p_k-1} \eta\alpha_{kl} b_s e^{-\lambda_k t} t^l \qquad (4.2)$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (относительно компонент вектора $\eta$)

$$\eta\alpha_{kl}\, b_s = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p_k - 1 \text{ при } k = r_1 + 1, \ldots, r_2)$$
$$(l = 0, 1 \ldots, p_k - 1 \text{ при } k = r_2 + 1, \ldots, r_3) \qquad (4.3)$$

Эта система содержит

$$\beta = \sum_{k=r_1+1}^{r_3} p_k - (r_2 - r_1)$$

уравнений. Присоединим к уравнениям (4.3) условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2 = 1 \tag{4.4}$$

Векторы $\eta$, которые являются решениями уравнений (4.3), (4.4) (будем обозначать их через $\mathring{\eta}_s$), и только они при подстановке в (4.2) уничтожают все члены, содержащие $e^{-\varepsilon_k t}$ $(k = r_2 + 1, \ldots, r_3)$, где $\varepsilon_k < 0$, и члены, не содержащие экспонент, но содержащие $t^l$, где $l \geqslant 1$. Таким образом, функция $|\mathring{\eta}_s e^{-At} b_s|$ остается ограниченной при $t \to \infty$. Следовательно, величина $\chi'$ (3.8) при $T \to \infty$ стремится к конечному пределу. Поскольку $d_\eta(T)$ — неубывающая функция $T$, из правого неравенства (3.12) вытекает что $d_{\mathring{\eta}_s}(T)$ при $T \to \infty$ стремится к конечному пределу, который обозначим через $d_{\mathring{\eta}_s}$ $(d_{\mathring{\eta}_s} = d_{-\mathring{\eta}_s})$. Если $\mathring{\eta}_s$ — такой вектор, что $d_{\mathring{\eta}_s} \neq 0$, то множество $Q_s^1$ заключено, очевидно, между плоскостями

$$\mathring{\eta}_s x = d_{\mathring{\eta}_s}, \qquad -\mathring{\eta}_s x = d_{\mathring{\eta}_s} \tag{4.5}$$

Для тех векторов $\mathring{\eta}_s$, для которых $d_{\mathring{\eta}_s}(T) < d_{\mathring{\eta}_s}$ при любом конечном $T$, множество $Q_s^1(T)$ достигает плоскостей (4.5) лишь при $T \to \infty$ и координаты точек $x \in Q_s^1$ удовлетворяют строгому неравенству

$$|\mathring{\eta}_s x| < d_{\mathring{\eta}_s} \tag{4.6}$$

Если $\eta_s^0$ — такой, например, вектор, что $\mathring{\eta}_s e^{-At} b_s \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то, очевидно, существует значение $T'$, для которого $d_{\mathring{\eta}_s}(T) = d_{\mathring{\eta}_s}(T') = d_{\mathring{\eta}_s}$ при всех $T \geqslant T'$. Для такого вектора $\eta_s^0$ множество $Q_s^1(T)$ достигает плоскостей (4.5) при $T = T'$ и при дальнейшем увеличении $T$ больше не «расширяется» в направлении $\mathring{\eta}_s$. Следовательно, для этого вектора $\mathring{\eta}_s$ на плоскостях (4.5) существуют точки, принадлежащие множеству $Q_s^1$. Из сказанного заключаем, что существуют такие векторы $\mathring{\eta}_s$, что координаты точек множества $Q_s^1$ удовлетворяют неравенству

$$|\mathring{\eta}_s x| \leqslant d_{\mathring{\eta}_s} \tag{4.7}$$

Для тех и только тех векторов $\mathring{\eta}_s$, которые удовлетворяют системе $n$ алгебраических уравнений

$$\eta \alpha_{kl} b_s = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r_3;\ l = 0, 1, \ldots, p_k - 1) \tag{4.8}$$

очевидно, $\mathring{\eta}_s e^{-At} b_s \equiv 0$ и $d_{\mathring{\eta}_s}(T) = d_{\mathring{\eta}_s} = 0$.

Система (4.3) является частью системы (4.8).

Пусть $\rho_s$ — ранг системы (4.8), тогда фундаментальная система решений уравнений (4.8) состоит из $n - \rho_s$ векторов. Пронормируем каждый из этих векторов и обозначим их через $\eta_s^1, \ldots, \eta_s^{n-\rho_s}$. Тогда множество $Q_s^1$

принадлежит плоскостям

$$\eta_s^\delta x = 0 \qquad (\delta = 1, \ldots, n - \rho_s) \tag{4.9}$$

т. е. размерность множества $Q_s^1$ равна $\rho_s$.

Заметим, что размерность множества $Q_s^1$ равна [1,15] рангу матрицы $W_s = \| b_s, A b_s, \ldots, A^{n-1} b_s \|$; при $\rho_s = n$ система (2.2) является вполне управляемой в смысле Калмана.

Пусть теперь $\eta \neq \overset{\circ}{\eta}_s$. Докажем, что при этом $d_\eta(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Предположим сначала, что для всех значений $T$, бо́льших некоторого, имеет место случай $A$. Тогда расстояние $d_\eta(T)$ удовлетворяет неравенству (3.12), Покажем, что величина $\max(\chi^\circ, \sigma^\circ)$, являющаяся функцией переменной $T$, не остается ограниченной при $T \to \infty$. Предположим противное, т. е. допустим наличие такой постоянной $c > 0$, что $\max(\chi^\circ, \sigma^\circ) \leqslant c$ при всех значениях $T$. Левую часть равенства (3.6) можно оценить следующим образом:

$$\Phi_1(\chi^\circ, \sigma^\circ) \geqslant M_s \mu E_s(T, c, c) \tag{4.10}$$

Из выражения (4.2) вытекает соотношение

$$\left| \eta e^{-At} b_s \right| = e^{-\varepsilon_{k'} t} t^{l'} \left| f_1(t) + f_2(t) \right|$$

где $e^{-\varepsilon_{k'} t} t^{l'}$ — член, имеющий при $t \to \infty$ максимальный порядок роста, по сравнению с другими членами вида $e^{-\varepsilon_k t} t^l$, входящими в выражение (4.2); $f_1(t) \not\equiv 0$ — почти периодическая функция, представляющая собой сумму конечного числа синусоид и константы; $f_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из условия $\eta \neq \overset{\circ}{\eta}_s$ вытекает, что $-\varepsilon_{k'} \geqslant 0$ и выполняется хотя бы одно из неравенств: $-\varepsilon_{k'} > 0$, $l' > 0$. Следовательно, если $\eta \neq \overset{\circ}{\eta}_s$, то $e^{-\varepsilon_{k'} t} t^{l'} \to \infty$ при $t \to \infty$. Как вытекает из [16], для почти периодической функции $|f_1(t)|$ имеет место соотношение

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f_1(\tau)| \, d\tau = K > 0 \tag{4.11}$$

С помощью соотношения (4.11) нетрудно показать, что $\mu E_s(T, c, c) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Из неравенства (4.10) заключаем, что левая часть соотношения (3.6) — неограниченная функция при $T \to \infty$. Поэтому из предположения о том, что $\max(\chi^\circ, \sigma^\circ) \leqslant c$, следует, что равенство (3.6) не может иметь место для достаточно больших значений $T$, а это противоречит вышеизложенному.

Поскольку расстояние $d_\eta(T)$ — монотонно возрастающая функция $T$, то из неравенства (3.12) вытекает, что в случае $A$ $d_\eta(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Если для всех значений $T$, бо́льших некоторого, имеет место случай $B$, то в соответствии с [6] $d_\eta(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Предположим, что интервалы значений $T$, в которых имеют место случаи $A$ и $B$, чередуются. Поскольку расстояние $d_\eta(T)$ является неубывающей функцией $T$, можно опять заключить, что $d_\eta(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Таким образом, множество $Q_s^1$ ограничено только по направлениям $\eta = \overset{\circ}{\eta}_s$.

Полученные уравнения (4.3), (4.8), (4.9) и неравенства (4.6), (4.7) позволяют полностью выяснить структуру области управляемости $Q_s^1$. Обозначим множество точек $x$, удовлетворяющих условиям (4.9), через $X^{\rho_s}$; если $\rho_s = n$, тогда $X^{\rho_s} = X$. Через $X_1^{\rho_s}$ обозначим подпространство пространства $X^{\rho_s}$, натянутое на вектора $\overset{\circ}{\eta}_s$, ортогональные векторам

$\eta_s^\delta$ ($\delta = 1, \ldots, n - \rho_s$), через $X_2^{\rho_s}$ — ортогональное дополнение подпространства $X_1^{\rho_s}$ до подпространства $X^{\rho_s}$. Итак, имеет место следующая теорема.

*Теорема* 4.1. Область управляемости $Q_s^1$ — цилиндрическое множество, т. е. $Q_s^1 = S + X_2^{\rho_s}$, где $S \in X_1^{\rho_s}$ — ограниченное множество (основание цилиндра). При $\rho_s = n$ размерность подпространства $X_1^{\rho_s}$ равна размерности фундаментальной системы решений уравнений (4.3)

$$\sum_{k=1}^{r_1} p_k + (r_2 - r_1)$$

т. е. числу собственных значений матрицы $A$ с положительными действительными частями с учетом их кратностей и с нулевыми действительными частями без учета их кратностей. На границе множества $Q_s^1$ есть точки, как принадлежащие области $Q_s^1$, так и не принадлежащие ей.

Рассмотрим при условии $\rho_s = n$ два частных случая:

1°. Все корни уравнения (4.1) имеют отрицательные действительные части. Система (4.3) в этом случае совпадает с системой (4.8), которая при $\rho_s = n$ имеет только нулевое решение. Следовательно, для всех $\eta \neq 0$ величина $d_\eta(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, а значит $Q_s^1 = X$.

2°. Все корни уравнения (4.1), за исключением $\lambda_1$, имеют отрицательные действительные части. Корень $\lambda_1$ является либо нулевым корнем произвольной кратности $p_1$, либо действительным положительным с кратностью $p_1 = 1$. Система (4.3) в этом случае состоит из $n - 1$ линейно независимых уравнений. Уравнения (4.3), (4.4) имеют только два отличающихся одно от другого знаком решения: $\mathring{\eta}_s$ и $-\mathring{\eta}_s$. Область $Q_s^1$ представляет собой множество точек $x \in X$, ограниченное двумя плоскостями, ортогональными вектору $\mathring{\eta}_s$ и находящимися на расстоянии $d_{\mathring{\eta}_s}$ от начала координат. В случаях, когда $\varepsilon_1 = 0$ или $\varepsilon_1 > 0$, а $N_s$ и $1/P_s$ — достаточно малые величины, на ограничивающих плоскостях есть точки, принадлежащие множеству $Q_s^1$.

Рассмотрим теперь вопрос о структуре области $Q^1$.

Среди столбцов матриц $\alpha_{kl}$ ($l = 0,1, \ldots, p_k - 1$) содержится [13,14] $p_k$, а среди столбцов матриц $\alpha_{kl}$ ($l = 1, \ldots, p_k - 1$) — не более $p_k - 1$ линейно независимых. Поэтому столбцы $\alpha_{kl}b_s$ ($l = 0, 1, \ldots, p_k - 1$; $s = 1, \ldots, r$), являющиеся линейными комбинациями столбцов матриц $\alpha_{kl}$ ($l=0,1, \ldots, p_k-1$), содержат не более $p_k$, а столбцы $\alpha_{kl}b_s$ ($l = 1, \ldots, p_k - 1$; $s = 1, \ldots, r$) — не более $p_k - 1$ линейно независимых. Отсюда вытекает, что в системе, полученной из (4.3) при $s = 1, \ldots, r$, среди $r\beta$ уравнений не более чем $\beta$, линейно независимых.

Обозначим через $\rho$ ранг системы $rn$ уравнений, полученных из (4.8) при $s = 1, \ldots, r$. Тогда среди векторов $\eta_s^\delta$ ($\delta = 1, \ldots, n - \rho_s$; $s=1, \ldots, r$) линейно независимых векторов $n - \rho$, т. е. множество $Q^1$ принадлежит $n - \rho$ плоскостям вида (4.9).

Заметим, что размерность множества $Q^1$ равна [1,15] рангу матрицы $\| W_1, \ldots, W_r \|$; при $\rho = n$ система (1.1) вполне управляема в смысле Калмана.

Легко показать, что при $\rho = n$ в системе (4.3) ($s = 1, \ldots, r$) не менее $\sum_{k=r_1}^{r_2} p_k$ линейно независимых уравнений (напомним, что при $\rho_s = n$ можно утверждать, что в системе (4.3) ровно $\beta$ линейно независимых уравнений).

Обозначим множество точек $x$, удовлетворяющих условиям (4.9) при всех $s = 1, \ldots, r$, через $X^\rho$. Через $X_1^\rho$ обозначим подпространство пространства $X^\rho$, натянутое на вектора $\mathring{\eta}_s$ ($s = 1, \ldots, r$), ортогональные векторам $\eta_s^\delta$ ($\delta = 1, \ldots, n - \rho_s$; $s = 1, \ldots, r$), через $X_2^\rho$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathring{X}_1$ до пространства $X^\rho$

Имеет место следующая теорема.

*Теорема* 4.2. **Область управляемости $Q^1$ — цилиндрическое множество, т. е. $Q^1 = S + X_2^\rho$, где $S \in X_1^\rho$ — ограниченное множество (основание цилиндра). При $\rho = n$ размерность подпространства $X_1^\rho$, равная размерности фундаментальной системы решений уравнений (4.3) ($s = 1,\ldots$ $\ldots, r$), не меньше величины**

$$\sum_{k=1}^{r_1} p_k + (r_2 - r_1)$$

**и не больше величины**

$$\sum_{k=1}^{r_2} p_k$$

**На границе множества $Q^1$ есть точки, как принадлежащие области $Q^1$, так и не принадлежащие ей.**

5. **Структура областей $Q_s^2$ и $Q^2$.** Так как $\Omega_s^2(T) \supseteq \Omega_s^1(T)$, расстояние $d_\eta(T)$ для класса управлений $\Omega_s^2(T)$ не меньше соответствующего расстояния для класса $\Omega_s^1(T)$. В предыдущем разделе для класса $\Omega_s^1(T)$ показано, что $d_\eta(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, если $\eta \neq \mathring{\eta}_s$. Следовательно, этот факт имеет место и для класса управлений $\Omega_s^2(T)$.

Из правого неравенства (3.12) вытекает, что для $\eta = \mathring{\eta}_s$ расстояние $d_\eta(T)$ остается ограниченным при $T \to \infty$ как для класса $\Omega_s^1(T)$, так и для класса $\Omega_s^2(T)$.

Таким образом, для областей управляемости $Q_s^2$ и $Q^2$ имеют место те же теоремы, что и для областей $Q_s^1$ и $Q^1$.

Как следует из теоремы 4.1 и из [2,4], структура области управляемости $Q_s^m$ ($m = 1, 2$) в рассмотренных здесь случаях совпадает со структурой области управляемости, когда ограничен импульс управляющей силы (1.3) или когда ограничена величина управляющей силы (1.2) и импульс (1.3) одновременно.

Вывод о структуре области управляемости $Q_s^2$ можно было бы конечно, сделать непосредственно, решая задачу максимизации интеграла (3.1) в классе управлений $\Omega_s^2(T)$. При этом управление $u_s(t) \in \Omega_s^2(T)$, максимизирующее интеграл (3.3), имеет вид

$$u_s(t, \chi, \sigma) = \begin{cases} \sigma^{-1}[|\eta e^{-At} b_s| - \chi], & t \in F_s(T, \chi, \infty) = E_s(T, \chi, 0) \\ 0, & t \in G_s(T, \chi) \end{cases}$$

В случае, аналогичном случаю $A$, уравнения для определения значений $\chi^\circ$ и $\sigma^\circ$ приобретают вид

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{E_s(T, \chi, 0)} (|\eta e^{-A\tau} b_s| - \chi)\, d\tau = N_s, \qquad \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_{E_s(T, \chi, 0)} [|\eta e^{-A\tau} b_s| - \chi]^2\, d\tau = P_s$$

Расстояние $d_\eta(T)$ в этом случае определяется по формуле

$$d_\eta(T) = \frac{1}{\sigma^\circ} \int\limits_{E_s(T, \chi^\circ, 0)} |\eta e^{-A\tau} b_s| (|\eta e^{-A\tau} b_s| - \chi^\circ)\, d\tau$$

6. ***Пример.*** Рассмотрим систему уравнений

$$x_1^{\bullet} = x_2, \quad x_2^{\bullet} = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u, \quad x_3^{\bullet} = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \tag{6.1}$$

Уравнения (6.1) описывают движение крылатого летательного аппарата в горизонтальной плоскости ($x_1$ и $x_3$ — углы курса и скольжения). Поскольку в системе (6.1) только одно управление, индекс $s$ всюду опущен. Характеристическое уравнение системы (6. 1) имеет один нулевой корень; пусть два других корня будут действительными, однократными (поэтому индекс $l$ всюду будет опущен), отрицательными, так что $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$.

Матрица $e^{At}$ имеет вид

$$e^{At} = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_1^{(1,2)} + \alpha_2^{(1,2)}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3^{(1,2)}e^{\lambda_3 t} & \alpha_1^{(1,3)} + \alpha_2^{(1,3)}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3^{(1,3)}e^{\lambda_3 t} \\ 0 & \alpha_2^{(2,2)}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3^{(2,2)}e^{\lambda_3 t} & \alpha_2^{(2,3)}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3^{(2,3)}e^{\lambda_3 t} \\ 0 & \alpha_2^{(3,2)}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3^{(3,2)}e^{\lambda_3 t} & \alpha_2^{(3,3)}e^{\lambda_2 t} + \alpha_3^{(3,3)}e^{\lambda_3 t} \end{Vmatrix}$$

где коэффициенты $\alpha_k^{(i,j)}$выражаются определенным образом [2,4] через коэффициенты матрицы $A$.

Выражение $\eta e^{-At}b$ записывается в виде

$$\eta e^{-At}b = \eta_1\alpha_1^{(1)} + e^{-\lambda_2 t}(\eta_1\alpha_2^{(1)} + \eta_2\alpha_2^{(2)} + \eta_3\alpha_2^{(3)}) + e^{-\lambda_3 t}(\eta_1\alpha_3^{(1)} + \eta_2\alpha_3^{(2)} + \eta_3\alpha_3^{(3)})$$

где

$$\alpha_k^{(i)} = b_2\alpha_k^{(i,2)} + b_3\alpha_k^{(i,3)} \quad (i = 1 \text{ при } k = 1;\ i = 1, 2, 3 \text{ при } k = 2,3)$$

Уравнения (4.3), (4.4) выглядят так:

$$\eta_1\alpha_k^{(1)} + \eta_2\alpha_k^{(2)} + \eta_3\alpha_k^{(3)} = 0 \quad (k = 2, 3), \qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1 \tag{6.2}$$

Если система (6.1) вполне управляема, то уравнения (6.2) имеют только два решения: $\eta^\circ$ и $-\eta^\circ$, причем

$$\eta_i^{\bullet} = \Delta_i / \Delta \qquad (i = 1,2,3)$$

где $\Delta_1 = \alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(2)}\alpha_2^{(3)}$, а $\Delta_2$ и $\Delta_3$ получаются круговой заменой верхнего индекса $i$ в коэффициентах $\alpha_k^{(i)}$ выражения для $\Delta_1$; $\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$.

Таким образом, $\eta^\circ e^{-At}\, b = \Delta_1\alpha_1^{(1)}/\Delta \equiv \mathrm{const}$. Поэтому для обоих классов допустимых управлений имеем

$$d_{\eta^\circ} = N\,|\,\Delta_1\alpha_1^{(1)}\,|\,\Delta^{-1}$$

Следовательно, области управляемости $Q^m$ ($m = 1,2$) представляют собой, так же как и в [2,4], множество точек фазового пространства, ограниченное двумя плоскостями

$$\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2 + \Delta_3 x_3 = \pm N\Delta_1\alpha_1^{(1)}$$

На этих плоскостях есть точки, принадлежащие областям $Q^m$ ($m = 1,2$).

Поступила 16 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Междунар. конгр. ИФАК, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Формальский А. М. Построение области управляемости для систем с ограниченными по импульсу управляющими силами. Вестн. МГУ. Сер. Матем. и механ., 1966, № 5.

3. Формальский А. М. Определение области управляемости для линейных стационарных систем. В сб.: Физика, математика, механика. Тр. I Моск. конф. молодых ученых. М., «Наука», 1968.
4. Формальский А. М. Область управляемости систем с ограниченными ресурсами управления. Автоматика и телемеханика, 1968, № 3.
5. Формальский А. М. Задача быстродействия в системах с ограниченными по величине и импульсу управляющими силами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
6. Формальский А. М. Область управляемости систем, имеющих ограниченную величину и энергию управляющего воздействия. Вестн. МГУ. Сер. Матем. и механ. 1970, № 5.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
8. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., Изд. иностр. лит., 1962.
9. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М., «Мир», 1965.
10. Eaton J. H. An Iterative Solution to Time Optimal Control. J. Math. Anal. and Appl. 1962, vol. 5, No. 2.
11. Шилов Г. Е. Математический анализ. М., Физматгиз, 1960.
12. Габасов Р., Гиндес В. Б. К оптимальным процессам в линейных системах с двумя ограничениями на управляющие воздействия. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 6.
13. Булгаков Б. В. Колебания. М., Гостехиздат, 1954.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
15. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
16. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.