Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Указываются необходимые условия оптимальности некоторого гарантийного времени (времени верхнего слоя [1]) для большого класса задач преследования.

В работах [1–5] и в ряде других приведены достаточные условия общего вида для возможности окончания преследования из данной точки и эффективно вычисляется гарантийное время. Достаточным условиям оптимальности гарантийных времен посвящены работы [6–8].

1. Пусть линейная задача преследования в n-мерном евклидовом пространстве R описывается

а) линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v \tag{1}$$

где C — постоянная квадратная матрица порядка n, $u = u(t) \in P$ и $v = v(t) \in Q$ — измеримые при $t \geqslant 0$ вектор-функции, называемые управлениями игроков (соответственно догоняющего и убегающего); $P \subset R$ и $Q \subset R$ — выпуклые компакты;

б) терминальным множеством M, представимым в виде $M = M_0 + W_0$, где M_0 — линейное подпространство пространства R, W_0 — некоторое компактное выпуклое множество в подпространстве L, являющемся ортогональным дополнением в R к M_0.

Обозначим через π оператор ортогонального проектирования на L; размерность L обозначим через ν, а единичную сферу в L — через K. Будем предполагать, что $\nu \geqslant 2$.

Цель догоняющего состоит в приведении точки z на множество M, убегающий старается помешать этому. Будем говорить, что преследование может быть закончено из точки z_0 за время $t(z_0)$, если для произвольного управления $v(t)$ убегающего догоняющий может так построить свое управление $u(t)$, что точка z попадет на множество M за время, не превосходящее числа $t(z_0)$; для нахождения значения параметра $u(t)$ в каждый момент времени t используются значения $z(s)$, $v(s)$ $(t - \varepsilon \leqslant s \leqslant t,\ \varepsilon > 0)$.

2. Рассмотрим отображение h: $K \to L$ сферы K в пространство L, обладающее следующими свойствами:

а) отображение h есть гладкий гомеоморфизм,

б) всякий вектор $\varphi \in K$ нормален к поверхности $H = h(K)$ в точке $h(\varphi)$.

Пусть φ_0 — произвольная точка сферы K, $s = (s^2, \ldots, s^\nu)$ — локальная система координат в ее окрестности с началом 0 в точке φ_0, так что $\varphi = \varphi(s) = \varphi(s^2, \ldots, s^\nu)$. Через $\varphi_j(s)$ обозначим векторы $\varphi_j(s) = \partial\varphi(s)/\partial s^j$ $(j = 2, \ldots, \nu)$.

Определение. Поверхность $H = h(K)$, соответствующую отображению h сферы K в L, назовем локально выпуклой, если h обладает свойствами а) и б) и, кроме того, в каждой точке $\varphi_0 \in K$ положительно определена квадратичная форма с коэффициентами

$$h_{ij}(\varphi_0) = \left(\varphi_i(0) \cdot \frac{\partial h(\varphi(0))}{\partial s^j}\right) (i, j = 2, \ldots, \nu)$$

Лемма 1. Пусть поверхность $H = h(K)$, соответствующая отображению h сферы K в L, локально выпукла. Тогда существуют такие постоянные $C_1 < +\infty$ и $C_2 > 0$, что для всех $\varphi, \psi \in K$ выполнены неравенства

$$(\varphi \cdot [(h(\varphi) - h(\psi)]) \leqslant C_1(\varphi \cdot [\varphi - \psi])$$
$$(\varphi \cdot [h(\varphi) - h(\psi)]) \geqslant C_2(\varphi \cdot [(\varphi - \psi]) \geqslant 0 \qquad (2)$$

Доказательство этой леммы, как и леммы 2, здесь не приводится за отсутствием места.

Отметим, что из неравенства (2), следует, в частности, что поверхность $H = h(K)$ — граница некоторого выпуклого тела W в L с опорной функцией $(\varphi \cdot h(\varphi))$, так что для того, чтобы точка $x \in L$ принадлежала к W, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\varphi \in K$ имело место неравенство $(\varphi \cdot [h(\varphi) - x]) \geqslant 0$.

3. Будем предполагать, что для задачи (1) выполнены следующие условия:

Условие 1. Для любого $r > 0$ и любого вектора $\varphi \in K$ существуют единственные векторы $u(r, \varphi) \in P$ и $v(r, \varphi) \in Q$, дающие максимум следующим скалярным произведениям:

$$(\varphi \cdot e^{rC}u), \quad u \in P, \quad (\varphi \cdot e^{rC}v), \quad v \in Q$$

Поверхности $\pi e^{rC}u(r, K)$ и $\pi e^{rC}v(r, K)$ локально выпуклы; отображения $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ — гладкие отображения из $(0, +\infty) \times K$ в R.

Условие 2. Для любого $\varphi \in K$ существует единственный вектор $w_0(\varphi) \in W_0$, дающий максимум выражению

$$(\varphi \cdot w_0), \qquad w_0 \in W_0$$

и либо поверхность $\Sigma^\circ = w_0(K)$ локально выпукла, либо множество W_0 состоит из единственной точки 0.

В последнем случае полагаем $w_0(\varphi) \equiv 0$, $\varphi \in K$.

Пусть для задачи (1) выполнены условия 1 и 2. Пусть t — произвольное неотрицательное число. Построим отображение сферы K в L

$$W(t, \varphi) = w_0(\varphi) + \int_0^t \pi e^{rC}[u(r, \varphi) - v(r, \varphi)]\, dr \qquad (3)$$

При произвольном положительном t это отображение, вообще говоря, не является ни взаимно-однозначным, ни регулярным. Обозначим через

$\Sigma^t = W(t, K)$ образ сферы K при отображении (3). Легко видеть, что вектор φ — нормаль к поверхности Σ^t в точке $W(t, \varphi)$. Будем предполагать, что выполнено следующее

Условие 3. При каждом $t > 0$ поверхность Σ^t локально выпукла.

Лемма 2. Пусть для задачи (1) выполнены условия 1—3. Тогда существуют определенные на интервале $(0, +\infty)$ непрерывные положительные функции $\delta(t) \leqslant t$ и $c(t)$ такие, что для всех $t > 0$, $\psi \in K$, $\varphi \in K$ выполнено неравенство

$$\left(\psi \cdot \left\{\left[W(t, \psi) - \int\limits_{t-\delta(t)}^{t} \pi e^{rC} u(r, \psi)\, dr\right] - \left[W(t, \varphi) - \int\limits_{t-\delta(t)}^{t} \pi e^{rC} u(r, \varphi)\, dr\right]\right\}\right) \geqslant$$
$$\geqslant c(t)(\psi \cdot [\psi - \varphi])$$

4. Пусть z — произвольная точка пространства R. Соответствующая ей в L точка кривой $\pi e^{tC} z$ может при некотором значении t_0 параметра t быть захваченной «расширяющимся» выпуклым телом $W(t)$, граница которого — локально выпуклая поверхность $\Sigma^t = W(t, K)$. Функция $W(t, \varphi)$ непрерывна по t, $\varphi \in [0, +\infty) \times K$. Поэтому существует наименьшее неотрицательное значение параметра t (назовем его $T(z)$), для которого имеет место включение

$$\pi e^{tC} z \in W(t) \tag{4}$$

Очевидно

$$\pi e^{T(z)C} z \in \Sigma^{T(z)}$$

а следовательно, существует такой вектор $\varphi(z) \in K$, что

$$\pi e^{T(z)C} z = W(T(z), \varphi(z))$$

Если же для любого $t \geqslant 0$ точка $\pi e^{tC} z$ лежит вне тела $W(t)$, будем говорить, что $T(z) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть для задачи (1) выполнены условия 1—3. Тогда если точка $z_0 \in R$ такова, что $0 < T(z_0) = T_0 < +\infty$, то из точки z_0 преследование может быть закончено за время T_0.

Эта теорема легко может быть доказана по схеме работы [2] редукцией к теореме 1 работы [1]. Ее доказательство, однако, будет содержаться в доказательстве следующей ниже теоремы 2.

5. Определим для всех $t \geqslant 0$ и $z \in R$ непрерывную функцию (см. [3])

$$\lambda(z, t) = \min_{\psi \in K} ([W(t, \psi) - \pi e^{tC} z] \cdot \psi)$$

В соответствии со сказанным в п. 2, для того чтобы имело место включение (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lambda(z, t) \geqslant 0$. Отметим, что если $z \notin M$, то $\lambda(z, 0) < 0$, так что число $T(z)$ — не что иное, как первый положительный корень уравнения $\lambda(z, t) = 0$.

Теорема 2. Пусть для задачи (1) выполнены условия 1—3. Пусть $z_0 \in R$ таково, что $0 < T_0 = T(z_0) < +\infty$. Тогда для того, чтобы время T_0 было оптимальным, необходимо, чтобы для всех $t \in (0, T_0)$ и $\tau \in (0,$

$T_0 - t$) выполнялось неравенство ($\varphi_0 = \varphi(z_0)$)

$$I(t,\tau) \equiv \lambda\left(e^{tC}\left(z_0 - \int_0^t e^{-rC}\left[u(T_0 - r, \varphi_0) - v(T_0 - r, \varphi_0)\right] dr\right), \tau\right) \leqslant 0$$

Доказательство проведем от противного. Пусть время T_0 оптимально и пусть $t_0 \in (0, T_0)$ и $\tau_0 \in (0, T_0 - t_0)$ таковы, что

$$I(t_0, \tau_0) = \lambda_0 > 0 \tag{5}$$

Положим

$$\delta_0 = \min \delta(t), \qquad c_0 = \min c(t), \qquad t \in [\tau_0, T_0]$$

($\delta(t)$ и $c(t)$ — функции, даваемые леммой 2), и выберем $\Delta > 0$ и натуральное число N такими, что $\Delta = t_0/N < \delta_0$.

Догоняющему предлагается строить последовательность $\varepsilon_0 = 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots$ моментов выбора управления и индуктивно определять свое управление на каждом из полуинтервалов $[0, \varepsilon_1)$, $[\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, ... следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ догоняющий выбирает $\varepsilon_1 = \Delta$ и на полуинтервале $[0, \varepsilon_1)$ полагает свое управление равным $u(t) \equiv u(T_0 - t, \varphi_0)$. После этого убегающий с течением времени задает свое управление $v(t)$ на $[0, \varepsilon_1)$. Двигаясь в соответствии с этими управлениями, точка $z(t)$ из начального положения z_0 перейдет в некоторое положение $z(\varepsilon_1)$.

Пусть теперь и догоняющий и убегающий построили свои управления на каждом из полуинтервалов $[0, \varepsilon_1), \ldots, [\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k)$ ($k \geqslant 1$) и пусть $z(t)$ — соответствующее этим управлениям движение точки z. Тогда догоняющий выбирает ε_{k+1} из следующих соображений: $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \delta(T[z(\varepsilon_k)])$, если $k \geqslant N$ (или если $k < N$, но $T(z(\varepsilon_k)) < \tau_0$); $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \Delta$ если $k < N$ и $T(z(\varepsilon_k)) \geqslant \tau_0$. Выбрав ε_{k+1}, он полагает на полуинтервале $[\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1})$ свое управление равным $u(t) \equiv u(T[z(\varepsilon_k)] - (t - \varepsilon_k), \varphi[z(\varepsilon_k)])$. После этого убегающий выбирает свое управление $v(t)$ на том же полуинтервале, и точка z переходит в новое положение $z(\varepsilon_{k+1})$.

В соответствии с данным индуктивным предписанием для выбора управления догоняющего каждое управление убегающего $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$ однозначным образом определяет соответствующее ему движение $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$ ($z(0) = z_0$) точки z. Оказывается, что каково бы ни было управление $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$ убегающего, для $z(t)$ имеет место следующая альтернатива: для любого натурального $k \geqslant 1$ либо $T(z(\varepsilon_k)) = 0$ (т. е. $z(\varepsilon_k) \in M$), либо

$$0 < T(z(\varepsilon_k)) \leqslant T(z(\varepsilon_{k-1})) - (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) < +\infty \tag{6}$$

откуда (см. [3]) непосредственно следует, что из точки z_0 преследование может быть закончено не позже, чем через время $T_0 = T(z_0)$.

Доказательство альтернативы проведем при $k=1$. При $k>1$ оно идентично. Имеем

$$z(\varepsilon_1)=z(\Delta)=e^{\Delta C}\left(z_0-\int\limits_0^{\Delta} e^{-rC}\left[u(T_0-r,\varphi_0)-v(r)\right]dr\right).$$

Поэтому для любого $\psi\in K$ после несложных преобразований получим

$$(\psi\cdot[W(T_0-\Delta,\psi)-\pi e^{(T_0-\Delta)C}z(\Delta)])=\left(\psi\cdot\left\{\left[W(T_0,\psi)-\int\limits_{T_0-\delta(T_0)}^{T_0}\pi e^{rC}u(r,\psi)\,dr\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left[W(T_0,\varphi_0)-\int\limits_{T_0-\delta(T_0)}^{T_0}\pi e^{rC}u(r,\varphi_0)\,dr\right]\right\}\right)+\left(\psi\cdot\int\limits_{T_0-\delta(T_0)}^{T_0-\Delta}\pi e^{rC}\left[u(r,\psi)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-u(r,\varphi_0)\right]dr\right)+\left(\psi\cdot\int\limits_{T_0-\Delta}^{T_0}\pi e^{rC}\left[v(r,\psi)-v(T_0-r)\right]dr\right)\geqslant 0$$

Здесь первое слагаемое неотрицательно в силу леммы 2, второе — в силу условия 1 и неравенства (2), третье — в силу определения $v(r,\psi)$.

Таким образом

$$\pi e^{(T_0-\Delta)C}z(\Delta)\in W(T_0-\Delta)$$

и, следовательно, $T(z(\varepsilon_1))\leqslant T_0-\varepsilon_1$, что и требовалось.

Время T_0 оптимально. Поэтому найдется последовательность управлений $v_i(s)$, $0\leqslant s\leqslant T_0$ таких, что для соответствующих им (в указанном выше смысле) траекторий $z_i(s)$, $0\leqslant s\leqslant T_0$ $(z_i(0)=z_0)$ точка $z_i(s)$ не принадлежит M для всех

$$s\in\left[0,T_0-\frac{\Delta_0}{i}\right]\qquad\left(i=1,2,\ldots;\ \Delta_0=\min\left\{\Delta,\frac{T_0-t_0-\tau_0}{2}\right\}\right)$$

Для траекторий $z_i(s)$, очевидно, выполнены неравенства

$$T(Z_i(\varepsilon_{ik}))\geqslant T_0-\varepsilon_{ik}-\Delta_0/i\qquad(0\leqslant k\leqslant N,\ i=1,2,\ldots)\tag{7}$$

где ε_{ik} — определяемые $v_i(s)$ $(0\leqslant s\leqslant T_0)$ моменты выбора управления догоняющего (в противном случае в соответствии с теоремой 1 на завершение преследования из точки $z_i(\varepsilon_{ik})$ уйдет времени не больше $T(z_i(\varepsilon_{ik}))$ и, следовательно, на все преследование — время $T(z_i(\varepsilon_{ik}))+\varepsilon_{ik}<T_0-\Delta_0/i$, что противоречит определению $z_i(s)$).

Из неравенства (7) легко следует индукцией по k, что

$$\varepsilon_{ik}\equiv k\Delta\qquad(k=1,\ldots,N,\quad i=1,2,\ldots)\tag{8}$$

Введем обозначения

$$T_k=T_0-k\Delta,\ z_i(k\Delta)=z_{ik},\qquad T(z_{ik})=T_{ik},\ \varphi(z_{ik})=\varphi_{ik}$$
$$(0\leqslant k\leqslant N,\ i=1,2,\ldots)$$

Из неравенств (6) — (8) следует

$$\lim_{i\to\infty}T_{ik}=T_k\qquad(k=0,1,\ldots,N)\tag{9}$$

Докажем, что имеют место также соотношения

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_{ik} = \varphi_0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, N) \tag{10}$$

$$\lim_{i\to\infty} z_{ik} \doteq e^{k\Delta C}\left(z_0 - \int_0^{k\Delta} e^{-rC}\left[u\left(T_0 - r, \varphi_0\right) - v\left(T_0 - r, \varphi_0\right)\right] dr\right) \quad (k = 0, \ldots, N) \tag{11}$$

Доказательство равенств (10), (11) проведем индукцией по k. При $k = 0$ они очевидны, поскольку $\varphi_{i0} \equiv \varphi_0$, $z_{i0} \equiv z_0$. Пусть соотношения (10), (11) справедливы для некоторого $k \leqslant N - 1$. Докажем, что они имеют место и для $k + 1$. В силу формулы Коши

$$z_{ik+1} = e^{\Delta C}\left(z_{ik} - \int_0^{\Delta} e^{-sC}\left[u\left(T_{ik} - s, \varphi_{ik}\right) - v_i\left(k\Delta + s\right)\right] ds\right) \tag{12}$$

для любого $\psi \in K$ имеем

$$(\psi \cdot [W(T_{ik} - \Delta, \psi) - \pi e^{(T_{ik}-\Delta)C} z_{ik+1}]) = \left(\psi \cdot \left\{\left[W(T_{ik}, \psi) - \int_{T_{ik}-\Delta}^{T_{ik}} \pi e^{rC} u(r, \psi)\, dr\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[W(T_{ik}, \varphi_{ik}) - \int_{T_{ik}-\Delta}^{T_{ik}} \pi e^{rC} u(r, \varphi_{ik})\, dr\right]\right\}\right) + \left(\psi \cdot \int_{T_{ik}-\Delta}^{T_{ik}} \pi e^{rC}[v(r, \psi) - v_i(T_{ik} + k\Delta - r)] dr\right) \tag{13}$$

Отсюда в силу леммы 2, условия 1 и определения $v(r, \psi)$ получим

$$(\psi \cdot [W(T_{ik} - \Delta, \psi) - \pi e^{(T_{ik}-\Delta)C} z_{ik+1}]) \geqslant c_0 (\psi \cdot [\psi - \varphi_{ik}]) \tag{14}$$

Предположим теперь, что для $k + 1$ равенство (10) не выполнено, т. е. что существует подпоследовательность $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{i_n k+1} = \varphi^* \neq \varphi_0 \tag{15}$$

Тогда, переходя к пределу в равенстве

$$\pi e^{T_{i_n k+1} C} z_{i_n k+1} = W(T_{i_n k+1}, \varphi_{i_n k+1}) \tag{16}$$

получим, пользуясь непрерывностью $W(t, \varphi)$ и формулами (9), (15)

$$\lim_{n\to\infty} \pi e^{T_{i_n k+1} C} z_{i_n k+1} = W(T_{k+1}, \varphi^*)$$

Поскольку, с другой стороны (в силу равномерной ограниченности $|z_{ik}|$ по i, k и равенства (9))

$$\lim_{n\to\infty} (\pi e^{T_{i_n k+1} C} z_{i_n k+1} - \pi e^{(T_{i_n k}-\Delta)C} z_{i_n k+1}) = 0 \tag{17}$$

то, переходя в неравенстве (14) к пределу по подпоследовательности $\{i_n\}$, получим используя непрерывность $W(t, \varphi)$ и формулы (9), (10) (для k)

$$(\psi[W(T_{k+1}, \psi) - W(T_{k+1}, \varphi^*)]) \geqslant c_0 (\psi \cdot [\psi - \varphi_0])$$

Последнее неверно при $\psi = \varphi^*$. Противоречие. Равенство (10) доказано.

Далее, из соотношения (13), леммы 2 и определения $v(r, \psi)$ имеет при $\psi = \varphi_0$

$$0 \leqslant \left(\varphi_0 \cdot \int\limits_{T_{ik}-\Delta}^{T_{ik}} \pi e^{rC} \left[v(r, \varphi_0) - v_i(T_{ik} + k\Delta - r)\right] dr\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\varphi_0 \cdot [W(T_{ik} - \Delta, \varphi_0) - \pi e^{(T_{ik}-\Delta)C} z_{ik+1}])$$

Переходя к пределу в формуле (16) при $i_n \equiv n$ и пользуясь соотношениями (9), (10), получим, принимая во внимание равенство (17), что

$$\lim_{i\to\infty} \pi e^{(T_{ik}-\Delta)C} z_{ik+1} = W(T_{k+1}, \varphi_0)$$

Отсюда

$$\lim_{i\to\infty} \left(\varphi_0 \cdot \int\limits_{T_{ik}-\Delta}^{T_{ik}} e^{rC} \left[v(r, \varphi_0) - v_i(T_{ik} + k\Delta - r)\right] dr\right) = 0 \tag{18}$$

В силу теоремы А. Ф. Филиппова [10] существует такая измеримая функция $v^*(s) \in Q$, $T_{k+1} \leqslant s \leqslant T_k$, что

$$\lim_{i\to\infty} e^{T_{ik}C} \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} v_i(k\Delta + s)\, ds = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{T_{ik}-\Delta}^{T_{ik}} e^{rC} v_i(T_{ik} + k\Delta - r)\, dr = \int\limits_{T_{k+1}}^{T_k} e^{rC} v^*(r)\, dr$$

Из формулы (18) и определения функции $v(r, \varphi_0)$ имеем тогда, что $v(r, \varphi_0) \equiv v^*(r)$ и

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} v_i(k\Delta + s)\, ds = e^{-T_k C} \int\limits_{T_{k+1}}^{T_k} e^{rC} v(r, \varphi_0)\, dr = \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} v(T_0 - k\Delta - s, \varphi_0)\, ds \tag{19}$$

Функция $u(r, \varphi)$ равномерно непрерывна на $[\tau_0, T_0] \times K$, поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} u(T_{ik} - s, \varphi_{ik})\, ds = \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} u(T_0 - k\Delta - s, \varphi_0)\, ds \tag{20}$$

Учитывая соотношения (12), (9), (10), (11) (для k), (19), (20), получаем

$$\lim_{i\to\infty} z_{ik+1} = e^{\Delta C}\left(e^{k\Delta C}\left(z_0 - \int\limits_0^{k\Delta} e^{-sC} \left[u(T_0 - s, \varphi_0) - v(T_0 - s, \varphi_0)\right] ds\right)\right) -$$

$$- e^{\Delta C} \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} u(T_0 - k\Delta - s, \varphi_0)\, ds + e^{\Delta C} \int\limits_0^{\Delta} e^{-sC} v(T_0 - k\Delta - s, \varphi_0)\, ds =$$

$$= e^{(k+1)\Delta C}\left(z_0 - \int\limits_0^{(k+1)\Delta} e^{-sC} \left[u(T_0 - s, \varphi_0) - v(T_0 - s, \varphi_0)\right] ds\right)$$

Равенство (11) доказано.

При $k = N$ равенство (11) принимает вид

$$\lim_{i\to\infty} z_i(t_0) = e^{t_0 C}\left(z_0 - \int\limits_0^{t_0} e^{-sC} \left[u(T_0 - s, \varphi_0) - v(T_0 - s, \varphi_0)\right] ds\right)$$

Тогда в силу непрерывности функции $\lambda(z, t)$ и формулы (5)

$$\lambda(z_i(t_0),\ \tau_0) \geqslant \lambda_0/2 > 0$$

для всех достаточно больших i. Отсюда $T(z_i(t_0)) < \tau_0$. Противоречие формуле (9). Теорема 2 доказана.

Автор приносит глубокую благодарность Е. Ф. Мищенко за руководство работой.

Поступила 15 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. н., 1966, т. 21, вып. 4.
2. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
3. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
4. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
7. Гусятников П. Б., Никольский М. С. Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3.
8. Гусятников П. Б., Никольский М. С. К проблеме оптимальности времени преследования. В кн. Теория оптимальных решений. Тр. семинара, вып. 3, Киев, 1968.
9. Гусятников П. Б. К структуре дифференциальных игр. В сб.: Математические методы исследования и оптимизации систем. Вып. 3, Киев, 1970.
10. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем. и механ., 1959, № 2.