К ЗАДАЧЕ ОБ ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается дифференциальная игра [1–5] с окончанием на множестве $M[x_1 = 0; \mid x_2 \mid \leqslant \mu]$, в которой платой является время попадания на M. Скорость x_2 изменения координаты x_1 следует уравнению

$$x_2^{\cdot} = \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, v) + u$$

Управление u первого (минимизирующего) игрока стеснено импульсным ограничением

$$\mu^{\cdot} - \int_0^\tau |u|\, dt = \mu(\tau) \geqslant 0$$

и не входит в уравнения, описывающие изменения переменных $x_3, \ldots, x_{n-1}$. Управление v второго (максимизирующего) игрока является $n-2$ вектором, и второй игрок выбирает его из некоторого множества Q. Сформулирован ряд теорем, позволяющих найти управления и время минимаксной задачи либо сформировать управление второго игрока, позволяющее избежать попадания на множество M при любых действиях первого игрока. Рассмотрены три примера.

1° Пусть уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered}
x_1^{\cdot} = x_2 = \varphi_1(w), \qquad x_2^{\cdot} = \varphi_2(w, v) + u \\
x_i^{\cdot} = \varphi_i(w, v) \quad (i = 3, \ldots, n-1) \\
\mu^{\cdot} = -|u|, \qquad \mu \geqslant 0, \qquad v \in Q(w) \\
w = [x_1, \ldots, x_{n-1}, \mu], \qquad v = [v_2, \ldots, v_{n-1}]
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Управление u первого игрока стеснено ограничением

$$\mu^0 - \int_0^\tau |u|\, dt = \mu(\tau) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

а управление v второго игрока принадлежит некоторому ограниченному замкнутому выпуклому множеству $Q(w)$, определенному для всех значений w.

Ограничение (1.2) допускает импульсные скачки переменных x_2, μ по формулам

$$x_2^{(1)}(\tau) = x_2(\tau) = x_2(\tau - 0) + \mu_1, \qquad \mu^{(1)}(\tau) = \mu(\tau) = \mu(\tau - 0) - |\mu_1| \tag{1.3}$$

Позицией игры в момент $t = \tau$ будем называть вектор

$$w(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau - 0), \ldots, x_{n-1}(\tau), \mu(\tau - 0)]$$

Если первый игрок в позиции $w(\tau)$ реализует скачок (1.3), то вектор

$$w^{(1)}(\tau) = [x_1(\tau),\ x_2^{(1)}(\tau) = x_2(\tau),\ \ldots,\ x_{n-1}(\tau);\ \mu^{(1)}(\tau) = \mu(\tau)]$$

не является позицией.

Пусть при $t > \tau$ игроки реализуют конечные управления $u(w, v)$, $v(w)$, тогда дальнейшее движение в силу системы (1.1) происходит так же, как оно происходило бы, если бы вектор $w^{(1)}(\tau)$ был позицией при $t = \tau$. В дальнейшем слова «движение исходит из позиции $w^{(1)}(\tau)$» следует понимать именно в этом смысле.

Пару управлений $u(w, v)$, $v(w)$ и реализуемую ими траекторию $w(t > 0,\ \{u(w, v),\ v(w)\},\ w(t = 0))$ будем называть допустимыми, если при $t = 0$ выполняется равенство

$$w(0,\ \{u(w, v),\ v(w)\},\qquad w(t = 0)) = w^{(1)}(0) = w^{(1)}(t = 0)$$

и, кроме того, траектория при всех $t > 0$ непрерывна по t справа, имеет конечное число скачков, согласных с (1.3), удовлетворяет (1.2) и почти при всех $t > 0$ удовлетворяет системе (1.1).

Сформулированные ниже задачи будем решать на допустимых управлениях и траекториях. Для того чтобы начальное значение $w(0)$ было, формально, позицией, припишем ей непрерывную при $t = 0$ предысторию $w(t \leqslant 0)$, $(\varepsilon \leqslant t \leqslant 0)$.

Переход с множества $M[x_1 = 0;\ |x_2| \leqslant \mu]$ на множество $K[x_1 = x_2 = 0]$ «мягкой» встречи по координате x_1 и скорости x_2 первый игрок может осуществить мгновенно. Вследствие этого можно считать M множеством окончания игры.

Сформулируем основные задачи.

Задача 1. Найти управления $u^\circ(w, v)$, $v^\circ(w)$ такие, чтобы время $T[u, v]$ первого попадания траектории $w(t,\ \{u, v\},\ w(0))$ на M удовлетворяло оценкам

$$T[u^\circ, v] \leqslant T[u^\circ, v^\circ] \leqslant T[u, v^\bullet]$$

Совокупность позиций, допускающих решение задачи 1, обозначим через $W^\circ(w)$.

Задача 2. (Уклонения). Найти $v_0(w)$ такое, чтобы при любом u и $t > 0$ траектория $w(t,\ \{u,\ v_0(w)\},\ w(0))$ не попадала на M. Условия существования $v_0(w)$ выделяют множество $W_0(w)$.

Задача 3. (Поимки). Найти $u_{(3)}(w, v)$, приводящее при любом $v(w)$ траекторию $w(t,\ \{u_{(3)},\ v\},\ w(0))$ на множество M за конечное время. Условия существования $u_{(3)}(w, v)$ порождают множество $W_{(3)}(w)$.

Задача 4. (Локальный вариант задачи 1). Найти $u_{(4)}(w, v)$, $v_{(4)}(w)$ и множество $W_{(4)}(w)$ такие, чтобы при любом $w(0) \in W_{(4)}(w)$ и любом v выполнялась оценка

$$T[u_{(4)},\ v] \leqslant T[u_{(4)},\ v_{(4)}] \tag{1.4}$$

а также для любой пары u, $v_{(4)}$, сохраняющей траекторию в области $W_{(4)}(w)$, выполнялась оценка

$$T[u_{(4)},\ v_{(4)}] \leqslant T[u,\ v_{(4)}] \tag{1.5}$$

2°. Ограничимся рассмотрением только таких систем, для которых справедливо включение

$$M_1 [x_1 = 0; \ | x_2 | > \mu] \in W_0 (w) \tag{2.1}$$

и все рассмотрения будем проводить в области

$$D^{(1)} (w) = D^{(0)} [x_1 = 0, \ x_2 \leqslant 0] \cup C^{(1)} [x_1 > 0] \tag{2.2}$$

в которую изменением направления осей можно поместить любую позицию.

Теорема 2.1. Пусть при $w \in D^{(1)}(w)$ существует управление $v^{(1)}(w)$ и функция $F^{(1)} (w)$, обладающие следующими свойствами.

2.1.1. Функция $F^{(1)}(w) = x_2$ при $w \in D^{(0)}$.

2.1.2. Сумма $\mu + F^{(1)} (w)$ не возрастает вдоль любой траектории $w (t, \ \{u, \ v^{(1)} (w)\}, \ w (0)), \ w (0) \in D^{(1)}$.

В условиях 2.1.1, 2.1.2 справедливы включения

$$v^{(1)} (w) \in v_0 (w), \quad D^{(2)} (w) = D^{(1)} \cap [\mu + F^{(1)}(w) < 0] \in W_0 (w) \tag{2.3}$$

т. е. управление $v^{(1)} (w)$ решает задачу 2 в области $D^{(2)}(w)$.

Доказательство. Пусть $w (0) \in D^{(2)}$. Траектория $w(t, \ \{u, \ v^{(1)}(w)\}, \ w(0))$ не может попасть на M ранее момента t_1, при котором впервые реализуется включение $w(t_1, \{u, v^{(1)}(w)\}, \ w (0)) \in D^{(0)}$, потому что x_1 может уменьшаться только при $x_2 \leqslant 0$. Однако из 2.1.1 и 2.1.2 следует включение $w(t_1, \{u, v^{(1)} (w)\}, w(0)) \in M_1$. Согласно условию (2.1) попадание на M в дальнейшем невозможно.

При некоторых условиях основой для построения функций $v^{(1)} (w)$, $F^{(1)} (w)$ может служить решение следующей задачи.

Задача 5. Указать $v_{(5)} (w)$, минимизирующее значение функционала

$$V (w (t, \ \{0, \ v (w)\}, \ w (0))) = x_2 (t_1) \ [\text{при } x_1 (t_1) = 0]$$

равного значению x_2 при первой реализации равенства $x_1 = 0$ на траекториях системы (1.1), получаемых при $u (w, \ v) = 0$.

Совокупность значений w, для которых задача 5 имеет решение, образует множество $D_{(5)} (w) \in D^{(1)} (w)$.

Пусть функции $H_{(5)} = V \ \{v_{(5)}\}, \ v_{(5)}$ удалось продолжить в область $D^{(1)}$ и получить функцию $F_{(1)}^{(1)}(w)$, непрерывно дифференцируемую, и некоторую функцию $v_1^{(1)}(w)$, удовлетворяющие соотношениям

$$(F_{(1)}^{(1)} (w))^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{(1)}^{(1)[i]} \varphi_i (w, v_1^{(1)} (w)) + F_{(1)}^{(1)[2]} u - F_{(1)}^{(1)[n]} | u | \tag{2.4}$$

$$F_{(1)}^{(1)[i]} = \partial F_{(1)}^{(1)} / \partial x_i \quad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad F_{(1)}^{(1)[n]} = \partial F_{(1)}^{(1)} / \partial \mu \tag{2.5}$$

$$P_1^{(1)} (w, v_1^{(1)} (w)) = \sum_{i=1}^{n-1} F_{(1)}^{(1)[i]} \varphi_i (w, v_1^{(1)} (w)) \leqslant 0 \tag{2.6}$$

$$| F_{(1)}^{(1)[2]} | \leqslant F_{(1)}^{(1)[n]} + 1 \tag{2.7}$$

Поясним выписанные соотношения. Левой частью (2.4) является правая производная функции $F_{(1)}^{(1)}(w)$ в силу системы (1.1).

Функция $P_1^{(1)}$ объединяет слагаемые, не зависящие от управления u, а $P_2^{(1)}$ — слагаемые, зависящие от управления u. В формулах принято обозначение $P_2^{(1)} = F_{(1)}^{(1)[2]}u - F_{(1)}^{(1)[n]}\,|u|$.

Нетрудно проверить соотношение

$$(\mu + F_{(1)}^{(1)}(w))^{\cdot} = -|u|(1 + F_{(1)}^{(1)[n]}) + F_{(1)}^{(1)[2]}u + P_1^{(1)} \leqslant 0 \tag{2.8}$$

которое является следствием оценок (2.6), (2.7) По построению функция $F_{(1)}^{(1)}(w)$ удовлетворяет условию 2.1.1, а из (2.8) следует выполнение условия 2.1.2.

Итак, можно утверждать следующее: если функции $F_{(1)}^{(1)}(w)$, $v_{(1)}^{(1)}(w)$ удовлетворяют условиям (2.6) и (2.7), то, полагая $F^{(1)} = F_{(1)}^{(1)}$; $v^{(1)} = v_{(1)}^{(1)}$, получим функции, согласные с условиями теоремы 2.1.

3°. Предположим, что во всех дальнейших рассмотрениях функции $\varphi_i(w, v)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и множество $Q(w)$ не зависят от μ. В этом случае функции $H_{(5)} = V(\{v_5\})$, $v_{(5)}$ и область $D_{(5)}$ будут зависеть только от вектора

$$s = [x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}] = [x_2, z],\quad z = [x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}] \tag{3.1}$$

Пусть функции $H_{(5)}$ и $v_{(5)}$ удалось продолжить в виде функций $H^{(3)}$, $v^{(3)}$ в область $D^{(3)}(s) \supseteq D_{(5)}(s)$

$$v^{(3)}(s) = v_{(5)}(s),\qquad s \in D_{(5)}(s) \tag{3.2}$$

$$H^{(3)}(s) = H_{(5)}(s),\qquad s \in D_{(5)}(s) \tag{3.3}$$

Предположим также, что из включений

$$s \in D^{(3)}(s),\qquad v \in Q\,(s \in D^{(3)}(s)) \tag{3.4}$$

следуют соотношения

$$P_1^{(3)}(s, v^{(3)}(s)) = 0 \leqslant P_1^{(3)}(s, v(s)) \tag{3.5}$$

а из включения $s \in D^{(3)} \cap C^{(1)}$ — оценка

$$|H^{(3)[2]}(s)| < 1 \tag{3.6}$$

Здесь выражение $P_1^{(3)}(s, v)$ равно производной от функции $H^{(3)}(s)$ в силу системы (1.1) при $u(w, v) = 0$.

Введем в рассмотрение область $D^{(4)}(w)$, определяемую следующим образом: при всяком $w \in D^{(4)}(w)$ существует допустимое управление $u = \mu_1(w)\,\delta \leqslant 0$ такое, что вектор

$$w^{(1)} = [x_2 + \mu_1, z, \mu - |\mu_1|] = [x_2^{(1)}, z, \mu^{(1)}] \tag{3.7}$$

удовлетворяет включению

$$w^{(1)} \in D^{(3)}(s) \cap [\mu + H^{(3)} \geqslant 0] \tag{3.8}$$

В области $D^{(4)}(w)$ введем импульсное управление

$$u^{(4)}(w) = \mu_1^{(4)}(w)\,\delta \tag{3.9}$$

где $\mu_1^{(4)}(w)$ — наименьший корень уравнения

$$\mu - |\mu_1| + H^{(3)}(x_2 + \mu_1, z) = 0 \tag{3.10}$$

Согласно условию (3.6) и условию (3.8) наименьший корень уравнения (3.9) единственный и неположительный.

Из условия $\mu_1^{(4)}(w) = 0$ следуют соотношения

$$\mu + H^{(3)}(s) = 0, \qquad s \in D^{(3)}(s) \tag{3.11}$$

В условиях (3.11) управление $u^{(4)}(w, v)$ будем выбирать как наименьший корень уравнения

$$(\mu + H^{(3)}(s))^{\cdot} = -|u| + H^{(3)[2]}u + P_1^{(3)}(s, v) = 0 \tag{3.12}$$

Этот корень имеет вид

$$u^{(4)}(w, v) = u^{(4)}(s, v) = -P_1^{(3)}(s, v)(1 + H^{(3)[2]})^{-1} \tag{3.13}$$

Приведем эвристические соображения, подсказывающие формирование управления u согласно (3.9) и (3.13). Интуиция подсказывает, что первый игрок должен скачком реализовать максимальное по модулю отрицательное значение скорости $x_2^{(1)} = x_2 + \mu_1$ с тем, чтобы быстрее выйти в область $D^{(0)}$. Однако нарушение неравенства $\mu^{(1)} + H^{(3)}(x_2^{(1)}, z) \geqslant 0$ для первого игрока опасно, в силу соображений, аналогичных примененным при доказательстве теоремы 2.1. С другой стороны, применяя управление $u^{(4)}$, первый игрок гарантирован от попадания на множество M_1 по крайней мере до тех пор, пока движение остается в области $D^{(3)}(s)$. Действительно, после импульса $u^{(4)}(w) = \mu_1^{(4)}\delta$ дальнейшее движение исходит из позиции

$$w^{(1)} = [x_2^{(1)} = p^{(4)} = x_2 + \mu_1^{(4)}(w),\ z,\ \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1^{(4)}|] \tag{3.14}$$

и происходит согласно уравнениям

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot} = p = x_2, \qquad p^{\cdot} = \varphi_2(p, z, v) + u^{(4)}(p, z, v) \\ x_i = \varphi_i(p, z, v) \qquad (i = 3, \ldots, n-1) \end{gathered} \tag{3.15}$$

Отметим, что до тех пор, пока компоненты вектора $s' = [p, z]$ остаются в области $D^{(3)}(s') = D^{(3)}(x_2 = p,\ z)$, вдоль траекторий системы (3.15) сохраняется равенство $\mu + H^{(3)}(s') = 0$. Это значит, что из включений

$$\begin{gathered} s'\,(0 \leqslant t \leqslant t_1,\ \ \{v(s)\},\ \ x_2^{(1)}(0) = p(0),\ \ z\,(0)) \in D^{(3)}(s') \\ s'(t_1\{v\,(s)\},\ \ p(0),\ \ z\,(0)) \in M_2\ [x_1 = 0] \end{gathered}$$

(аргумент $u^{(4)}(s', v(s'))$ опущен в фигурных скобках, в силу того, что $u^{(4)}$ — известная функция s', $v\,(s')$), следует включение

$$w\,(t_1,\ \{u^{(4)}\,(w,\ v\,(s)),\ v\,(s)\},\ w(0)) \in M$$

Таким образом, любое управление $v\,(s')$, сохраняющее траекторию системы (3.15) в области $D^{(3)}(s')$ и приводящее ее в момент t_1 на «плоскость» $x_1 = 0$, приводит позицию w на множество M в этот же момент t_1.

После замены $p = x_2 + \mu_1$ и учета условия $\mu_1^{(4)} \leqslant 0$ уравнение (3.10) можно записать в эквивалентной форме

$$\mu - x_2 + p + H^{(3)}(p,\ z) = 0 \tag{3.16}$$

Его решение

$$p^{(4)} = p^{(4)}(\mu - x_2, z) \tag{3.17}$$

совместно с тождественным преобразованием $z' = z$ отображает область $D^{(4)}(w)$ на область $D^{(3)}(s')$ и доставляет начальные условия системе (3.15). В дальнейшем будем это отображение обозначать через $\eta(w)$.

4°. Пусть первый игрок реализует управление $u^{(4)}$; тогда второй игрок может поставить перед собой две задачи.

Задача 6. Указать $v^{(6)}(s')$ такое, чтобы траектория системы (3.15) либо оставалась в области $D^{(3)}(s')$, но никогда не выходила за плоскость $x_1 = 0$, либо покидала область $D^{(3)}(s')$. Условия существования $v^{(6)}(s')$ выделяют область $D^{(6)}(s') \in D^{(3)}(s')$.

Задача 7. Указать $v^{(7)}(s')$, приводящее траекторию системы (3.15) на плоскость $x_1 = 0$ за максимальное время. Условия существования $v^{(7)}(s')$ выделяют область $D^{(7)}(s') \in D^{(3)}(s')$.

Естественно, что второй игрок будет решать задачу 7 только в том случае, если решение задачи 6 для него невозможно. Отсюда следует включение $D^{(7)}(s') \in D^{(3)}(s') \setminus D^{(6)}(s')$. В примере, приведенном в п. 6°, решение задачи 6 помогает решить задачу полного построения множества W_0 и управления $v_0(w)$.

Теорема 4.1. Пусть имеет место точное равенство

$$D^{(7)}(s') = D^{(3)}(s') \setminus D^{(6)}(s')$$

и область $D^{(7)}(s')$ замкнута границей $G^{(7)}(s') \ni M_2$. Пусть также всюду в области $D^{(7)}(s')$ существуют функция $\overset{0}{v}_{(7)}(s')$ и непрерывная функция $T_{(7)}(s')$, удовлетворяющие следующим требованиям:

4.1.1. Функция $T_{(7)}(s')$ непрерывно дифференцируема в области $D^{(7)}(s') \setminus G^{(7)}(s')$ и удовлетворяет соотношению

$$\dot{T}_{(7)}(s', u^{(4)}, \overset{\circ}{v}_{(7)}(s')) = T_{(7)}^{[1]}p + T_{(7)}^{[2]}(u^{(4)}(s', \overset{\circ}{v}_{(7)}(s')) + \varphi_2(s', \overset{\circ}{v}_{(7)}(s'))) +$$
$$+ \sum_{i=3}^{n-1} T_{(7)}^{[i]}\varphi_i(s', \overset{\circ}{v}_{(7)}(s')) = -1 \geqslant \dot{T}_{(7)}(s', u^{(4)}, v(s')) \tag{4.1}$$

4.1.2. На части границы $G^{(7)} \setminus M_2$, которая является гладкой поверхностью, выполняются условия, аналогичные условиям (4.1), при частном дифференцировании вдоль указанной части границы.

4.1.3. Функция $T_{(7)}(s') > 0$ при $s' \in D^{(7)} \setminus M_2$ и $T^{(7)}(s') = 0$ при $s' \in M_2$.

4.1.4. Никакое управление $v(s')$ не может вывести траекторию за пределы $D^{(7)}(s')$, если $s'(0) \in D^{(7)}(s')$.

В условиях 4.1.1 — 4.1.4. область $D^{(7)}(s')$ является полной областью существования решения задачи 7 и справедливы равенства

$$\overset{\circ}{v}_{(7)}(s') = v^{(7)}(s'), \qquad T_{(7)}(s') = T[v^{(7)}(s')] \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 4.1 несложно, и его можно опустить.

Обозначим через $D_{(8)}(w)$ и $D_{(9)}(w)$ прообразы областей $D^{(6)}(s')$ и $D^{(7)}(s')$, отвечающие отображению $\eta(w)$. Функция $T_{(7)}(s')$ в области $D^{(9)}(w)$ переходит в функцию $T_{(9)}$ ($p^{(4)}$ ($\mu - x_2$, z) z). Приступим к формулировке условий, в которых пара управлений $u^{(4)}$, $v^{(7)}$ решает задачи 1, 3, 4.

Теорема 4.2. Пусть выполнены следующие условия.

4.2.1. В области $D_{(9)}$ (w) существует некоторое допустимое управление $v_{(9)}$ (w), образующееся в $v^{(7)}$ (s') при $x_2 = p^{(4)}$ ($\mu - x_2$; z) и максимизирующее величину $P_{(9),1}$, которая определена ниже.

4.2.2. Для суммы $P_{(9),1}$ (w, v), являющейся производной функции $T_{(9)}$, в силу системы (1.1) при u (w, v) $= 0$ справедлива оценка

$$P_{(9),1}\,(x_2 = p^{(4)}, z, v^{(7)}\,(s')) \leqslant P_{(9)\,1}\,(x_2 \geqslant p^{(4)}, z, v_{(9)}\,(w)) \tag{4.3}$$

4.2.3. Справедлива оценка

$$T_{(9)}^{[2]} = -\, T_{(9)}^{[n]} \geqslant 0 \tag{4.4}$$

4.2.4. В области $D_{(10)}$ $(w) = D^{(1)} \setminus (D_{(9)} \cup D^{(2)})$ существует управление $v_{(10)}$ (w) такое, что при любом управлении $u \neq u^{(4)}$, выводящем позицию за пределы области $D_{(9)}$ в точке $w_1 \in G_{(9)} \setminus M$ границы $G_{(9)}$ области $D_{(9)}$, траектория $w\,(t \geqslant T_{(9)}(w_1)$, $\{u, v_{(10)}\,(w)\}$, $w_1)$ либо не вернется в область $D_{(9)}$ вообще, либо вернется в точку $w_2 \in G_{(9)} \setminus M$ с соблюдением оценки $T_{(9)}\,(w_2) \geqslant T_{(9)}\,(w_1)$.

4.2.5. В области $D^{(1)}$ существуют функции $F^{(1)}$, $v^{(1)}$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1, причем $H^{(3)} = F^{(1)}$ при $s \in D^{(3)}\,(s')$.

В условиях 4.2.1—4.2.5 справедливы включения

$$u^{(4)} \in u^{\circ}, \qquad v^{(7)} \in v^{\circ}, \qquad D_{(9)} \in W^{\circ} \tag{4.5}$$

т. е. $u^{(4)}$, $v^{(7)}$ решают задачу 1. Кроме того, справедливо равенство

$$T_{(9)}\,(\mu - x_2,\ z) = T\,[u^{\circ},\ v^{\circ}] \tag{4.6}$$

В условиях 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.5 справедливы равенства

$$\begin{gathered} u^{(4)} = u_{(4)}, \qquad v^{(7)} = v_{(4)}, \qquad D_{(9)} = W_{(4)} \\ T_{(9)}\,(\mu - x_2, z) = T\,[u_{(4)}, v_{(4)}] \end{gathered} \tag{4.7}$$

т. е. $u^{(4)}$, $v^{(7)}$ решают задачу 4 в области $D_{(9)}$. Кроме того, очевидно, что управление $u_4{}^{(4)} = u_{(3)}$ решает задачу 3 в области $D_{(9)} \in W_{(3)}$ независимо от условий 4.2.1—4.2.5.

Доказательство. Производная функции $T_{(9)}$ в силу системы (1.1) имеет вид

$$(T_{(9)}\,(\mu - x_2,\ z))^{\bullet} = P_{(9)1} + T_{(9)}^{[2]}\,(u + |\,u\,|) \tag{4.8}$$

Оценка (4.3) показывает, что при $v = v^{(7)}(s')$ эта производная достигает минимума при $u = u^{(4)}$ по всем управлениям u, сохраняющим включение $w^{(1)} \in D^{(4)}$ (w). Реализация $u < u^{(4)}$, переводит позицию в область $D^{(2)}$ согласно условию 4.2.5. Реализация $u \neq u_{(4)}$, выводящего позицию за пределы $D^{(4)}$ (w), невыгодна, согласно условию 4.2.4. При $u = u^{(4)}$ второй игрок должен выбрать $v = v^{(7)}$ (s') согласно решению задачи 7. Доказательство соответствия задаче 1 закончено.

Если отбросить условие 4.2.4, то доказательство соответствия решению задачи 4 для всех u, сохраняющих в паре с управлением $v_{(9)}$ (w) траекторию в области $D_{(9)}$, повторяет дословно приведенные выше рассуждения.

Теорема 4.3. **Если множество $Q(s)$ и функции $\varphi_i(s, v)$ $(i = 2, \ldots, n-1)$ таковы, что в области**

$$L(w, c_i) = D_{(9)}(w) \bigcup [c_2^2 + \ldots + c_{n-1}^2 \leqslant a^2]$$

можно указать непрерывную и ограниченную функцию $N(w, c_i) \to 0$ при $a^2 \to 0$ равномерно по $w \in D_{(9)}(w)$ и удовлетворяющую оценке

$$|\Delta^{(2)}(\max_v(c_2\varphi_2 + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1})| \leqslant N(w, c_i)\,|\Delta x_2| \tag{4.9}$$

(где $\Delta^{[2]}\psi(s, c_i)$ обозначает частное приращение функции ψ по переменной x_2), тогда существует положительная функция $\varepsilon(x_2 < 0) > 0$ и область $D[x_2 < 0,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \varepsilon(x_2)]$, в которой справедливы оценки (4.3) и (4.4).

Доказательство. Выпишем подробно величину $P_{(9)1}$.

$$P_{(9)1} = T_{(9)}^{[1]}x_2 + T_{(9)}^{[2]}\varphi_2(s, v_{(9)}(w)) + T_{(9)}^{[n-1]}\varphi_{n-1}(s, v_{(9)}(w)) \tag{4.10}$$

согласно формулам

$$T_{(9)}^{[1]} = T_{(7)}^{[1]} + T_{(7)}^{[p]}p^{(4)[1]}, \quad T_{(9)}^{[2]} = T_{(7)}^{[p]}p^{(4)[2]} \tag{4.11}$$
$$T_{(9)}^{[i]} = T_{(7)}^{[i]} + T_{(7)}^{[p]}p^{(4)[i]} \qquad (i = 3, \ldots, n-1)$$

которые являются следствием оценки (3.6), гарантирующей дифференцируемость функции $p^{(4)}(w)$ и оценку $p^{(4)[2]} > 0$, а также соотношениям

$$T_{(7)}^{[i]} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n-1), \quad s' \in [x_1 = 0;\ p < 0] \tag{4.12}$$
$$T_{(7)}^{[1]}(\partial x_2 > 0) > 0, \qquad s' \in [x_1 = 0;\ p < 0] \tag{4.13}$$
$$T_{(7)}^{[p]} > 0, \qquad s' \in [0 < x_1 \leqslant \varepsilon(x_2);\ p < 0] \tag{4.14}$$

Получаем следующие выводы. Оценка (4.14) совместно с оценкой $p^{[4][2]} > 0$ гарантирует выполнение оценки (4.4). Поскольку функция $p^{(4)}(\mu - x_2, z)$ зависит только от $\mu - x_2$, то после выполнения частных дифференцирований этой функции величину $\mu - x_2$ можно заменить через $p^{(4)}(\mu - x_2, z)$ по уравнению (3.16) и вследствие этого величины $T_{(9)}^{[i]}$ можно считать зависящими от $p^{(4)}, z$. Таким образом, изменение x_2, сохраняющее величину $\mu - x_2$ и величину $p^{(4)}$, повлияет только на функции $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Согласно оценке (4.9) и малости производных $T_{(9)}^{[2]}, \ldots, T_{(9)}^{[n-1]}$ будет справедливо соотношение

$$P_{(9)1}(p^{(4)} = x_2, z, v_{(7)}(s')) \leqslant \max_v P_{(9)1}(x_2 \geqslant p^{(4)}, z, v(w)) \tag{4.15}$$

потому, что в формуле (4.10) основную роль играет первое слагаемое. Оценка (4.15) влечет следствием оценку (4.3).

Прежде чем приступить к рассмотрению примеров, сделаем несколько замечаний.

1. Основными ограничениями для предложенных построений являются включение $M_1 \in W_0(w)$ и оценка (3.6). Включение $D^{(3)} \supseteq D_{(5)}$ не существенно, потому что не используется в доказательствах.

2. Как будет видно из примера в п. 7°, область $D^{(7)}(s') = D^{(3)}(s') \setminus D^{(6)}(s')$ не всегда удается построить полностью. Однако рассуждения теоремы 4.1 нигде не используют приведенное выше точное равенство и приложимы в любой части области $D_{(9)}(w)$.

3. В примерах, приведенных ниже, попадание на M с множества M_1 невозможно при $v_0(w) = 0$. Для первого примера это следует из анализа задачи, а для второго и третьего показано в работе [4].

5°. *Пример.* Управляемый тяжелый маятник с идеальным подвесом при подходящем выборе масштабов следует уравнениям

$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = -\sin x_1 + u + v \qquad (5.1)$$
$$\mu^{\cdot} = -|u|, \quad v \in Q(w) \equiv 0$$

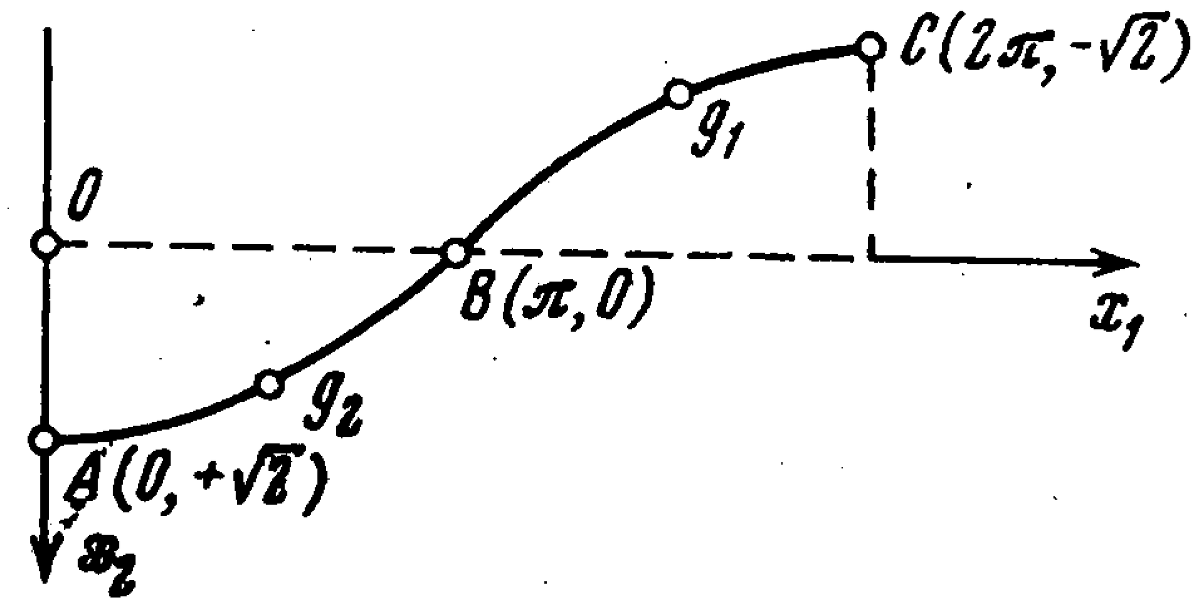
Задача 1 при отсутствии управления v обращается в задачу быстродействия.

При $u = 0$ система (5.1) допускает первый интеграл

$$H_{(5)} = -\sqrt{1 - \cos x_1 + x_2^2} \qquad (5.2)$$

отвечающий задаче 5 в области $D_{(5)}$, расположенной выше сепаратриссы $(A, B, C) \to (1 - \cos x_1 + x_2^2 = 2)$ в полосе, определяемой оценками (фиг. 1)

$$[0 \leqslant x_1 < 2\pi;\ x_2 \leqslant 0] \cup [0 < x_1 < 2\pi;\ x_2 > 0] \qquad (5.3)$$



Фиг. 1

Продолжим $H_{(5)}$ по формуле (5.2) на кривую (A, B, C) и примем следующий способ изображения движения.

Начальную позицию поместим в область $D_{(5)}' = D_{(5)} \cup [[A, B, C)]$. Точку $g_1(x_1, x_2) \in [A, B, C)$ при $u(g_1) < 0$ будем отражать симметрично точке B в точку $g_2(2\pi - x_1, -x_2)$ и полагать $u(g_2) = -u(g_1)$. При таком изображении траектория будет разрывна, но функция $H_{(5)}$ будет изменяться непрерывно. Область W_0', из которой попадание на M невозможно, определяется соотношением

$$W_0'(w) = [D_{(5)} \cap [\mu + H_{(5)} < 0]] \cup [(A, B, C);\ \mu + H_{(5)}(g) = 0] \qquad (5.4)$$
$$g \in (A, B, C)$$

Действительно, в области $D^{(2)} = D_{(5)} \cap [\mu + H_{(5)} < 0]$ для функции $F^{(1)} = H_{(5)}$ выполнены условия 2.1.1 и 2.1.2 и приложима теорема 2.1. В области

$$[(A, B, C);\ \mu + \overline{H_{(5)}}\ (g \in (A, B, C)) = 0]$$

движение при $u = 0$ не приходит в область $D^{(0)}$, а при $u \neq 0$ движение переходит в область $D^{(2)}(w)$. Итак, движение из области $W_0'(w)$, определенной соотношением (5.4), не может быть приведено на M.

Принятый способ изображения движения позволяет отождествлять области $D^{(3)}$ $D_{(5)}$ и функции $H^{(3)}$, $H_{(5)}$ потому, что условия (3.5), (3.6), очевидно, выполняются. В области $D^{(3)} \equiv D_{(5)}$ определено время $T^{(3)}(x_1, x_2)$ перехода точки в область $D^{(0)}$ при $u = 0$.

Функцию $p^{(4)}(\mu - x_2, z)$ в области $D^{(4)} = D^{(3)} \cap [\mu + H^{(3)} \geqslant 0]$ при принятом изображении движения определим двузначно

$$p_1^{(4)} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x_1) / (\mu - x_2) - \tfrac{1}{2}(\mu - x_2) \qquad (5.5)$$

$$p_2^{(4)} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x_1) / (\mu' + x_2') - \tfrac{1}{2}(\mu' + x_2') \qquad (5.6)$$

Здесь

$$\mu' = \mu - |\mu_2|, \quad x_2' = x_2 + \mu_2, \quad \mu_2 > 0 \qquad (5.7)$$

$$\mu > \mu_2 = \pm\sqrt{1 + \cos x_1} - x_2 > 0 \qquad (5.8)$$

В последней формуле знак плюс берется при $x_1 > \pi$, а минус — при $x_1 < \pi$. Функция $p_2^{(4)}(w)$ определена в области, выделяемой оценкой (5.8) и условием $\mu' > \sqrt{2}$. Геометрический смысл введения функции $p_2^{(4)}$ состоит в следующем. Если при

$w \in D^{(4)}$ существует импульс $u = \mu_4 \delta > 0$, выводящий точку за кривую (A,B,C), то он изображается в виде суммы двух импульсов: импульса $\mu_2\delta > 0$, приводящего на кривую (A,B,C) в точку $g_1(x_1, x_2)$, и импульса $\mu_3\delta < 0$, переводящего точку $g_2(2\pi - x_1, - x_2)$ в точку $(x_1'' = 2\pi - x_1;\ x_2'' = p_2^{(4)}(w))$.

Управление

$$u_1^{(4)} = (p_1^{(4)} - x_2)\,\delta = \mu_1^{(4)}\delta \tag{5.9}$$

$$u_2^{(4)} = \mu_2 (g \to g_1)\,\delta + \mu_3 (g_2)\,\delta \tag{5.10}$$

выбирается по формуле (5.9) при реализации оценки

$$T^{(3)}(x_1, p_1^{(4)}) \leqslant T^{(3)}((2\pi - x_1), p_2^{(4)}) \tag{5.11}$$

и по формуле (5.10) при реализации противоположной оценки. Это значит, что для каждой позиции $w \in D^{(4)}$, согласной с оценками (5.8) и условием $\mu' > \sqrt{2}$, существуют две функции

$$T_1^{(4)}(x_1, p_1^{(4)}(\mu - x_2, x_1)), \qquad T_2^{(4)}(-x_1 + 2\pi, p_2^{(4)}(\mu - x_2, x_1))$$

в которые переходит функция $T^{(3)}(x_1, x_2)$ после подстановки $p_{1,2}^{(4)}$ вместо x_2.

Для обеих функций [6] справедливы оценки

$$T_{1,2}^{(3)[2]} = T^{(3)[p]} p_{1,2}^{(4)[2]} \geqslant 0, \qquad T^{(3)[1]} + T^{(3)[p]} p_{1,2}^{(4)[1]} > 0 \tag{5.12}$$

Если управление $u_1^{(4)}$ выбрано согласно (5.9), то оценки (5.12) гарантируют выполнение условий (4.3) и (4.4), и управление $u_1^{(4)}$ оказывается оптимальным по сравнению со всеми управлениями, не приводящими на границу (A, B, C). С другой стороны, при $u = u_1^{(4)}$ выполнится оценка $(T_2^{(3)})^{\bullet} \geqslant -1$, поэтому оценка (5.11) сохраняется вдоль траектории до тех пор, пока не нарушится оценка (5.8) либо оценка $\mu' > \sqrt{2}$, и функция $T_2^{(3)}$ не перестанет существовать.

Доказательство оптимальности при выборе $u_2^{(4)}$ согласно (5.10) аналогично.

Итак, выбор (5.9) или (5.10) по оценке (5.11) либо противоположной ей оценке реализует быстродействие на множество M в системе (5.1) в области $D^{(4)}(w)$.

6°. *Пример*. Пусть система (1.1) имеет вид

$$x_1^{\bullet} = x_2, \quad x_2^{\bullet} = u + v, \quad \mu^{\bullet} = -|u|, \quad \mu \geqslant 0, \quad |v| \leqslant 1 = Q(w) \tag{6.1}$$

Управления

$$v^{(1)}(s) = -1, \qquad s \in D'\,[x_1 \geqslant 0;\ x_2 \leqslant 0] \tag{6.2}$$

$$v^{(1)}(s) = 0, \qquad s \in D''\,[x_1 > 0;\ x_2 > 0] \tag{6.3}$$

и функция

$$F_{(s)}^{(1)} = -\sqrt{x_2^2 + 2x_1} \tag{6.4}$$

удовлетворяют (2.2) и (2.3). Это значит, что в области

$$D^{(2)} = D^{(1)} \cap [\mu + F^{(1)} < 0]$$

выполнена теорема 2.1 и управление $v^{(1)}(s)$ реализует убегание.

Область $D^{(3)}(s') = D'$, управление $v^{(3)}(s) = v^{(1)}$ и функция $H^{(3)} = F^{(1)}$ удовлетворяют условиям (3.5) и (3.6). Из неравенства $\mu + F^{(1)} \geqslant 0$ и уравнения

$$\mu - x_2 + p - \sqrt{p^2 + 2x_1} = 0 \tag{6.5}$$

следует соотношение

$$p^{(4)} = x_1 / (\mu - x_2) - {}^1\!/_2 (\mu - x_2) \leqslant 0 \tag{6.6}$$

доказывающее, что область $D^{(1)} \cap [\mu + F^{(1)} \geqslant 0]$ совпадает с областью $D^{(4)}(w)$, так как $(p^{(4)}, x_1) \in D^{(3)}(s')$.

Управление

$$u^{(4)} = (p^{(4)} - x_2)\,\delta \quad \text{при } p^{(4)} - x_2 < 0 \tag{6.7}$$

$$u^{(4)}(s', v) = p\,(v+1)\,/\,(\sqrt{p^2+2x_1} - p) \quad \text{при } p^{(4)} = p = x_2 \tag{6.8}$$

приводит к системе (3.15) вида

$$x_1^{\bullet} = p, \qquad p^{\bullet} = u^{(4)}(s', v) + v \tag{6.9}$$

Полагая $v^{(4)}(w) = +1$ при $w \in D^{(4)}$, получаем в области $D^{(3)}$ управление $v^{(3)} = +1$, а система (6.9) переходит в систему

$$\psi_1^{\bullet} = 2(\psi_1/\psi_2) - 1 = 2\beta - 1, \qquad \psi_2^{\bullet} = -1 \tag{6.10}$$

$$\psi_{1,2} = \sqrt{p^2+2x_2} \pm p \tag{6.11}$$

допускающую в $D^{(3)}(s')$ первые интегралы вида

$$\psi_2 + t = c_1, \qquad \psi_2(1 - 3\beta)^{1/3} = c_2 \tag{6.12}$$

Функция $R^{(3)} = \psi_2(3\beta - 1)$ после подстановки по уравнению (6.5) перейдет в функцию $R^{(4)}(w)$, и условие $R^{(4)}(w) > 0$ выделит область $D_{(8)}(w) = D^{(4)} \cap [R^{(4)} > 0]$.

Вычислим $R^{(3)[1]}$

$$R^{(3)[1]} = (3\beta - 1)^{-2/3}\sqrt{p^2+2x_1} > 0; \quad w \in D_{(8)} \tag{6.13}$$

Уравнение $(R^{(3)})^{\bullet} = R^{(3)[1]}p + R^{(3)[p]}\beta = 0$ позволяет из оценки (6.13) и оценки $x_2 \geqslant p$ получить оценку

$$(R^{(4)})^{\bullet} = (R^{(3)[1]} + R^{(3)[p]}p^{(4)[1]})\,x_2 + R^{(3)[p]}p^{(4)[2]}\,[|u| + u + 1] \geqslant 0, \quad w \in D_{(8)} \tag{6.14}$$

которая справедлива для любых u, сохраняющих траекторию в области $D^{(4)}$. Она вытекает из оценки (6.13), равенства $R^{(3)[p]}\beta = -p^{(4)}R^{(3)[1]} \geqslant 0$ при $p^{(4)} \leqslant 0$ и оценки $p^{(4)[2]} \geqslant 0$.

Из (6.14) следует, что при $w(0) \in D_{(8)}$ либо сохранится включение $w(t, \{u, v^{(4)} = +1\}, w(0)) \in D_{(8)} \not\ni M$, либо траектория попадает в область $D^{(2)}(w)$. Это доказывает включения

$$v^{(4)} = +1 = v_{\infty} \in v_0; \qquad D_{(8)}(w) \in W_0(w)$$

При $w \in D_{(9)}(w)$, $s' \in D^{(7)}(s') = D^{(3)} \cap [R^{(3)} \geqslant 0]$ уравнения (6.12) порождают время $T_{(7)}(s')$

$$T_{(7)}(s') = \psi_2(1 - (1 - 3\beta)^{1/3})$$

Функция $T_r(s')$ — непрерывно дифференцируемая при $1 - 3\beta > 0$, после подстановки вместо p функции (6.5) переходит в функцию $T_{(9)}(w)$.

Частные производные этих функций имеют вид

$$T_{(7)}^{[p]} = \psi_2(1-\lambda)(1+\lambda-2\lambda^2)\,/\,3\lambda^2 q \geqslant 0 \tag{6.15}$$

$$0 \leqslant \lambda^3 = 1 - 3\beta \leqslant 1, \qquad q = \sqrt{p^2+2x_1} \tag{6.16}$$

$$T_{(9)}^{[1]} = (1 - \lambda - 2p\,/\,(\psi_2\lambda^2)\,/\,q + T_{(7)}^{[p]}\,/\,\psi_2 \geqslant 0 \tag{6.17}$$

$$T_{(9)}^{[2]} = T_{(7)}^{[p]}(x_1\psi_2^{-2} + 1/2) \geqslant 0 \tag{6.18}$$

Оценка (6.15) очевидна. Оценка (6.17) следует из (6.15) и (6.5). Оценка (6.18) следует из (6.15).

Можно показать, что оценка $3\beta - 1 \leqslant 0$ не нарушается при любом v. Этот факт совместно с оценкой (6.15) позволяет применить теорему 4.1 и показывает, что управление $v^{(7)} = +1$ решает задачу 7 для системы (6.10), так как граница $G\,[R^{(3)} = 0] \setminus [x_1 = 0]$, очевидно, также удовлетворяет условию 4.1.2, а остальные условия теоремы следуют из формулы (6.15).

Формулы (6.17), (6.18) свидетельствуют о выполнении оценок (4.3), (4.4), условие 4.2.4 есть следствие включения $D_{(10)} = D_{(8)} \in W_0$, а условие 4.2.5, очевидно, выполнено. Теорема 4.2. приложима в этом случае полностью и справедливы равенства

$$u^{(4)} = u^\circ, \quad v^{(7)} = +1 = v^\circ, \quad D_{(9)} = W^\circ$$
$$v^{(1)} = -1 = v_0(w),\ w \in D^{(2)};\ v^{(4)} = v^{(8)} = v_0(w) = +1, \quad w \in D_{(8)}$$
$$D^{(2)} \cup D_{(8)} = W_0, \quad W^0 \cup W_0 = D^{(1)}$$

7°. *Пример*. Пусть уравнения (1.1) имеют вид

$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = -x_1 + u + v, \qquad \mu^{\cdot} = -|u|, \quad \mu \geqslant 0, \ |v| \leqslant 1 = Q(w) \tag{7.1}$$

Управления

$$v^{(3)}(w) = -1, \quad w \in D'\ [x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0] \tag{7.2}$$
$$v^{(3)}(w) = +1, \quad w \in D''\ [x_1 > 0;\ x_2 > 0] \tag{7.3}$$

совместно с системой

$$x_1 = x_2, \quad x_1^{\cdot} = v^{(3)}(w) - x_1, \ \mu^{\cdot} = 0 \tag{7.4}$$

порождают в области $D^{(1)}$ первый интеграл системы (7.4), имеющий вид

$$\xi(s) = -\sqrt{(\zeta(x_1+1, x_2))^2 - 1}, \quad w \in D' \tag{7.5}$$
$$\xi(s) = -\sqrt{(\zeta(x_1-1, x_2)+2)^2 - 1}, \quad w \in D'' \tag{7.6}$$
$$\zeta(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{7.7}$$

При переходе позиции из области D'' на отрезок $B[0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0]$ функция $\xi(s)$ увеличивается скачком. В остальных позициях $w \in C^{(1)}$ она непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим функцию

$$F_1(w) = \max_{\mu_1}(\mu - |\mu_1| + \xi(x_1, x_2 + \mu_1)) \tag{7.8}$$

область

$$D^{(2)}(w) = D^{(1)} \cap [F_1(w) < 0] \tag{7.9}$$

и управления

$$v^{(1)}(w) = -1, \quad w \in D^{(2)} \cap D' \tag{7.10}$$
$$v^{(1)}(w) = +1, \quad w \in D^{(2)} \cap D'' \tag{7.11}$$

Справедливы включения

$$v^{(1)}(w) \in v_0(w), \quad D^{(2)} \in W_0(w) \tag{7.12}$$

Доказательство включений (7.12) проводится по схеме, аналогичной схеме теоремы 2.1. Достаточно установить равенство $\mu - x_2 = F_1(w)$ при $w \in D^{(0)}$ и тот факт, что первый игрок при $v = v^{(1)}(w)$ не может увеличить функцию $F_1(w)$.

Обсудим возможности первого игрока. Можно проверить, что при $s \notin B$ функция $H^{(3)}(s) = \xi(s)$ удовлетворяет условиям (3.5), (3.6). Вследствие разрыва функции $H^{(3)}(p, x_1)$ на отрезке B в области

$$D^{(5)}(w) = B_1[0 < x_1 < 1;\ x_2 \geqslant 0] \cap \{D^{(4)} = D^{(1)} \cap [\mu + H^{(3)}(s) \geqslant 0] \tag{7.13}$$

уравнение

$$\mu - x_2 + p + H^{(3)}(p, x_1) = 0 \tag{7.14}$$

может допускать два корня.

Обозначим через $p^{(4)}(w)$ при $w \in D^{(4)}(w)$ наименьший корень уравнения (7.14) и сформируем управление $u^{(4)}$ по формулам

$$u^{(4)}(w) = (p^{(4)}(w) - x_2)\delta, \quad \text{при} \quad p^{(4)}(w) - x_2 < 0 \tag{7.15}$$
$$u^{(4)}(w, v) = -(H^{(3)[1]}p + H^{(3)[2]}(-x_1 + x))(1 + H^{(3)[2]})^{-1} \tag{7.16}$$
$$\text{при } p^{(4)}(w) = x_2, \quad w \in B$$

На отрезке $w \in B$ при $p^{(4)}(w) = x_2$ определим управление $u^{(4)}(w, v)$ по формуле (7.16), подставляя вместо $H^{(3)[2]}$ величины

$$H^{(3)[2]}(x_2 + 0, x_1) \quad \text{при} \quad -x_1 + v \geqslant 0 \tag{7.17}$$

$$H^{(3)[2]}(x_2 - 0, x_1) \quad \text{при} \quad -x_1 + v < 0 \tag{7.18}$$

Если управление $u^{(4)}(w)$ сформировано согласно (7.15)—(7.18), то, по аналогии с предыдущим примером, естественной реакцией второго игрока является управление

$$v^{(4)} = +1, \quad w \in D^{(4)}(w) \tag{7.19}$$

Пара $[u^{(4)}, v^{(4)}]$ порождает систему уравнений

$$x_1^{\cdot} = p, \quad p^{\cdot} = -x_1 + 1 + 2p\,(p - H^{(3)}(p, x_1))^{-1}, \quad s' \in D'(s') \tag{7.20}$$

$$x_1^{\cdot} = p, \quad p^{\cdot} = 1 - x_1, \quad s' \in D''(s'') \tag{7.21}$$

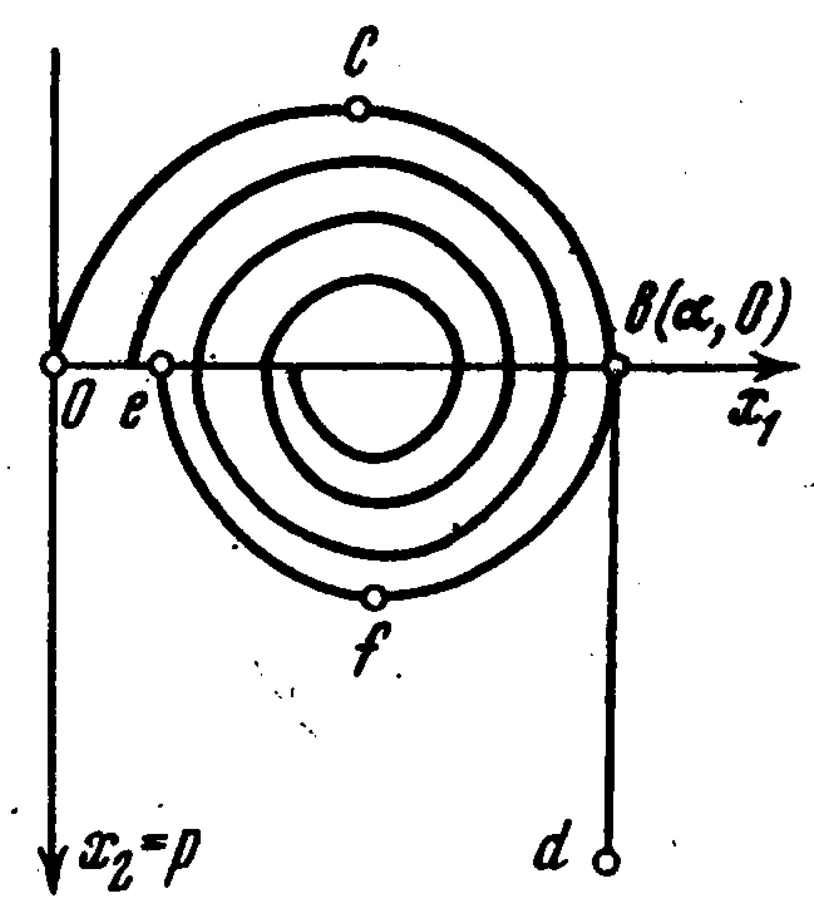
8°. Сформулируем ряд свойств движений в силу системы (7.20), (7.21) без доказательств, которые заняли бы много места.

8.1. Среди решений системы (7.20) с начальными условиями на отрезке

$$B_2\,[1 < x_1(0) = x_1^\circ \leqslant 2;\ p(0) = 0]$$

существует решение $s_\alpha'(\alpha < 2, 0, 0 \leqslant t \leqslant t_1(\alpha))$, и притом только одно, обладающее свойством

$$\lim p\,(\alpha, 0, t) = \lim x_1(\alpha, 0, t) = 0 \text{ при } t \to t_1(\alpha)$$



Фиг. 2

8.2. Все решения $s'\,(1 < x_1^\circ < \alpha, 0, t > 0)$ при некотором $t_1(x_1^\circ)$ удовлетворяют соотношениям

$$p\,(x_1^\circ, 0, t_1(x_1^\circ)) = 0, \qquad 0 < x_1(x_1^\circ, 0, t_1(x_1^\circ)) < 1$$

$$s'\,(1 < x_1^\circ < \alpha,\ 0,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1(x_1^\circ)) \in D'(s')$$

8.3. Решения $s'\,(s'^{,\circ} \in B_2,\ t < 0)$ системы (7.21) следуют вдоль полуокружностей

$$(1 - x_1)^2 + p^2 = (1 - x_1^\circ)^2, \quad s' \in D''$$

8.4. Решения

$$s'\,(1 \leqslant x_1^\circ < \alpha;\ 0,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1(x_1^\circ)); \quad s'(1 \leqslant x_1^\circ < \alpha,\ 0 - \pi \leqslant t \leqslant 0)$$

заполняют область $B_{(3)}(s')$, ограниченную кривыми (фиг. 2)

$$s_\alpha'(\alpha, 0, 0 \leqslant t \leqslant t(\alpha)) \to [0, cb]$$

$$s'(\alpha, 0, -\pi \leqslant t \leqslant 0) \to ((x_1 - 1)^2 + p^2 = (1-\alpha)^2) \to [b, f, e]$$

и отрезком

$$B_1'\,[0 < x_1 < \alpha - 1;\ p = 0] \to (0, e)$$

Заметим, что кривые $[0, c, b]$, $[b, f, c]$ не входят в область $B_{(3)}(s')$, а отрезок $(0, e)$ принадлежит ей.

8.5. Справедливы включения

$$v^{(4)}(s') = +1 \in v^{(6)}(s'), \quad B_{(3)}(s') \in D^{(6)}(s')$$

которые означают, что управление $v^{(4)}(s') = +1$ при $u = u^{(4)}$ и $(p^{(4)}(w), x_1 \in B_{(3)}(s')$ выводит точку за пределы области $D^{(3)}(s')$ в область $D^{(2)}(w)$.

Прежде чем формулировать дальнейшие утверждения, проведем из точки $b\,(\alpha, 0)$ вертикальную полупрямую $[b, \alpha)$ и обозначим через $G^{(7)}(s')$ кривую $[0cbd)$. Область, расположенную правее и выше этой кривой и включающую ее, обозначим через $B_{(7)}(s')$. Предположим, что включения

$$s' = [p^{(4)}(w), x_1] \in B_{(7)}(s'); \quad w \in D^1_{(7)}(w)$$

равносильны, т. е. построим область $D^1_{(7)}(w)$, которую преобразование $\eta(w)$ переводит в область $B_{(7)}(s')$.

8.6. Справедливы включения

$$u^{(4)}(w, v) \in u_{(8)}(w, v), \qquad D^1_{(7)} \in W_{(8)}(w)$$

Уравнения (7.20), (7.21) порождают в области $B_{(7)}(s')$ время

$$T[u^{(4)}(s', v^{(4)}), v^{(4)} = +1] = T_{(B,7)}(s')$$

а в области $D^{(1)}_{(7)}(w)$ это время переходит в функцию

$$T^1_{(7)}(\mu - x_2, x_1) T_{(B,7)}(p^{(4)}(\mu - x_2, x_1), x_1)$$

8.7. Пусть $A_1 > 0$ — наибольшее из чисел A таких, что из оценки $T_{(B,7)} \leqslant A$ следует оценка $T^{[p]}_{(B,7)} \geqslant 0$.

Управление

$$v_1^{(7)} = v^{(4)} = +1 \quad \text{при} \quad w \in B^{(7)} = B_{(7)} \cap [T_{(B,7)} \leqslant A_1]$$

решает задачу 7, т. е. справедливы включения

$$v_1^{(7)} \in v^{(7)}(s'), \qquad B^{(7)}(s') \in D^{(7)}(s')$$

8.8. Пусть $A_2 > 0$ — наибольшее из чисел A таких, что оценка $T_{(B,7)} \leqslant A$ влечет оценку

$$T^{1[1]}_{(7)} = T^{[1]}_{(B,7)} + T^{[p]}_{(B,7)} \, p^{(4)[1]} \geqslant 0$$

тогда справедливы равенства

$$u^{(4)} = u_{(4)}, \quad v^{(4)} = v_{(4)}, \quad D_{(8)} = D^1_{(7)} \cap [T^1_{(7)} \leqslant \min(A_1, A_2)] \in W_{(4)}$$

Введем обозначения

$$A_3 = \min[A_1, A_2, t_1(\alpha)]$$

$$D_{(9)}(w) = D^1_{(7)} \cap [T^1_{(7)} \leqslant A_3]$$

$$D_{(10)}(w) = D^{(1)} \setminus (D_{(9)} \cup D^{(2)})$$

$$v_{(10)}(w) = +1 \quad \text{при} \quad w \in D_{(10)}(w)$$

8.9. Справедливы соотношения

$$u_{(9)} = u^{(4)} = u^{\circ}, \quad v_{(9)} = v^{(4)} = +1 = v^{\circ}, \quad D_{(9)}(w) \in W_0(w)$$

Наибольшую трудность доставило при доказательстве утверждения 8.9 обоснование следующего свойства пары $[u \neq u^{(4)}, v = v_{(10)}]$:

$$T^1_{(7)}(g_1) < T^1_{(7)}(g_2)$$

где g_1 — точка выхода траектории на общую границу $G_{(9)}$ областей $D_{(9)}$ и $D_{(10)}$, а g_2 — точка возвращения траектории на эту границу.

Поступила 29 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук., 1966, т. 21, № 4.
4. Пожарицкий Г. К. Импульсные преследования в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
5. Пожарицкий Г. К. К задаче встречи в системах второго порядка с импульсными и параллельными управлениями. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
6. Аппель П. Теоретическая механика. М., Физматгиз, 1960.