

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ И БИФУРКАЦИЯХ В ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Н. Н. Баутин

(Горький)

Рассматривается на примере одной классической задачи динамики полета влияние аппроксимации на структуры разбиения фазового пространства и пространства параметров динамической системы.

При качественном исследовании динамических систем можно использовать переход от исходной модели к упрощенной или кусочно-интегрируемой, аппроксимируя характеристики в уравнениях движения. При этом возникает важный вопрос о допустимых отклонениях аппроксимирующих функций от реальных характеристик при сохранении необходимой близости между исходной и аппроксимирующей системой. Понятие необходимой близости не однозначно и определяется целями исследования. Она может пониматься, например, как требование сохранения для аппроксимирующей системы той же качественной структуры разбиения фазового пространства и пространства параметров, что и для исходной системы [1]. В общей постановке задача сводится к вопросу о сохранении или потере бифуркаций при переходе к аппроксимирующей системе. Возникающие здесь трудности связаны с тем, что не все бифуркации могут быть прослежены регулярными методами, и, кроме того, для «спитых» аппроксимирующих систем (кусочно-аналитических) могут возникать новые типы бифуркаций, для которых еще нет полной классификации. Поэтому представляет интерес сравнительное рассмотрение конкретных динамических систем при разных аппроксимациях.

Ниже такое рассмотрение проводится на примере одной классической задачи динамики полета [2-9]. Выбор этой задачи обусловился тем, что в исходной системе возможен широкий набор бифуркаций (осуществляются все типы бифуркаций первой степени негрубости) и удалось строго установить структуру разбиения пространства параметров как для исходной системы (что до сих пор не было сделано), так и для аппроксимирующих систем. Здесь возникают различия в структуре разбиения пространства параметров и фазового пространства, позволяющие оценить влияние аппроксимаций на структуры разбиения и обнаружить, в частности, важную роль, которую играет «седловая величина» [10]. Сохранение количественной близости характеристик не оказалось обязательным для сохранения качественной структуры разбиения фазового пространства и пространства параметров системы. Использование седловой величины при качественном исследовании спитых систем опирается на возможность перенесения утверждений, касающихся условий устойчивости петли сепаратрисы и рождения от нее предельных циклов, на неаналитические системы, содержащие петлю, в состав которой входит аналитическое седло. Теоремы 44-49 в [10] с соответствующими изменениями формулировок остаются справедливыми и для указанных систем, так как метод, которым они установлены, переносится на эти системы.

1. Будем рассматривать систему

$$d\varphi / dt = \rho - \cos \varphi = P, \quad d\rho / dt = 2\rho (\lambda - \mu\rho - \sin \varphi) = Q \quad (1)$$

для значений параметров $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 1$.

В цилиндрическом фазовом пространстве (на полосе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $\rho \geq 0$ с отождествленными краями) состояния равновесия будут

$$O_1(-\frac{1}{2}\pi, 0), O_2(\frac{1}{2}\pi, 0), O_3(\varphi_3, \rho_3), O_4(\varphi_4, \rho_4)$$

где

$$\rho_{3,4} = \cos \varphi_{3,4} = \frac{\lambda\mu \pm \sqrt{1 + \mu^2 - \lambda^2}}{1 + \mu^2}$$

и знак «плюс» перед корнем соответствует точке O_3 .

В пространстве параметров на кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ сливаются точки O_3 и O_4 , а на прямой $\lambda = 1$ — точки O_4 и O_2 . Выше кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ система (1) имеет два состояния равновесия: O_1 — седло и O_2 — неустойчивый узел. Ниже кривой — четыре особых точки O_1, O_2, O_3 — узел или фокус, O_4 — седло.

Слияние особых точек — простейшие бифуркации системы (1). Другие возможные бифуркации связаны со сменой устойчивости состояния равновесия O_3 , с бифуркациями сепаратрис (сепаратрисы, идущие из седла в седло) и появлением предельных циклов из бесконечности, из петли сепаратрисы, из сгущения траекторий и из сепаратрисы особой точки седло-узел. Все эти бифуркации могут быть прослежены для системы (1).

1.1°. Состояние равновесия O_3 будет иметь чисто мнимые корни характеристического уравнения для точек кривой $\sigma_3 \equiv (P_\varphi' + Q_\rho')_3 = 0$, $P_\varphi'Q_\rho' - P_\rho'Q_\varphi' > 0$, где вместо ρ и φ должны быть подставлены координаты точки O_3 . Кривая $\sigma_3 = 0$ представляется уравнением

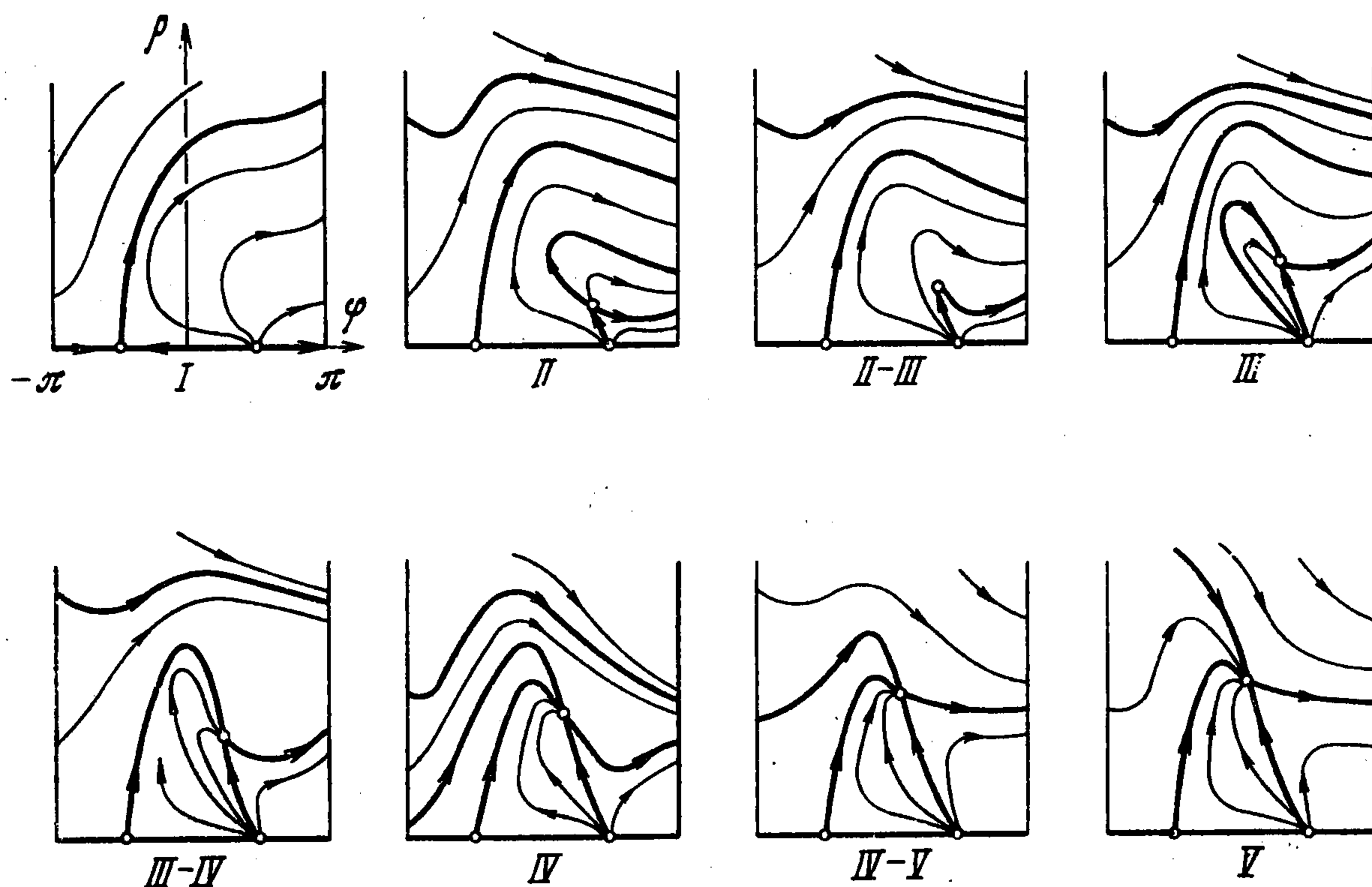
$$\lambda(1 - 2\mu^2) = 3\mu \sqrt{1 + \mu^2 - \lambda^2}$$

Она начинается в точке $\mu = \sqrt{1/5}$, $\lambda = 1$ и заканчивается на кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$, которой она касается в точке $B(\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2})$. При переходе через кривую $\sigma_3 = 0$ в направлении возрастающих μ фокус из неустойчивого становится устойчивым и из него появляется неустойчивый предельный цикл. Первая ляпуновская величина для точек кривой $\sigma_3 = 0$ имеет значение

$$\alpha_3 = \frac{\pi\lambda^2(1 + 4\mu^2)}{3\mu \sqrt{2(1 - 2\mu^2)}} > 0$$

1.2°. Проследим за изменением качественной структуры и бифуркациями при движении точки в пространстве параметров вдоль кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$. Точкам на кривой соответствует сложная особая точка, возникшая в результате слияния O_3 и O_4 . Это будет особая точка типа седло-узел для всех точек кривой за исключением двух: точки $\mu = 0$, $\lambda = 1$, для которой в фазовом пространстве сливаются три особых точки, и точки B (вырожденный седло-узел). Качественная картина разбиения фазового пространства на траектории будет определяться наличием или отсутствием предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр, и расположением сепаратрис, ограничивающих узловую область особой точки седло-узел. На фиг. 1 изображены структуры, осуществляющиеся вдоль кривой при возрастании параметра μ .

Для точки $A(0, 1)$ картина разбиения фазового цилиндра на траектории представлена на фиг. 1 (I). Предельных циклов нет (это видно из расположения контактной кривой рассматриваемой системы и консервативной системы $\mu = \lambda = 0$). Есть только две особые точки: седло O_1 и сложная особая точка $O_{234}(\frac{1}{2}\pi, 0)$. На куске AB кривой будет осуществляться структура разбиения, представленная на фиг. 1 (II). При переходе от точки A к точкам куска AB осуществляются две бифуркации: 1) от слож-



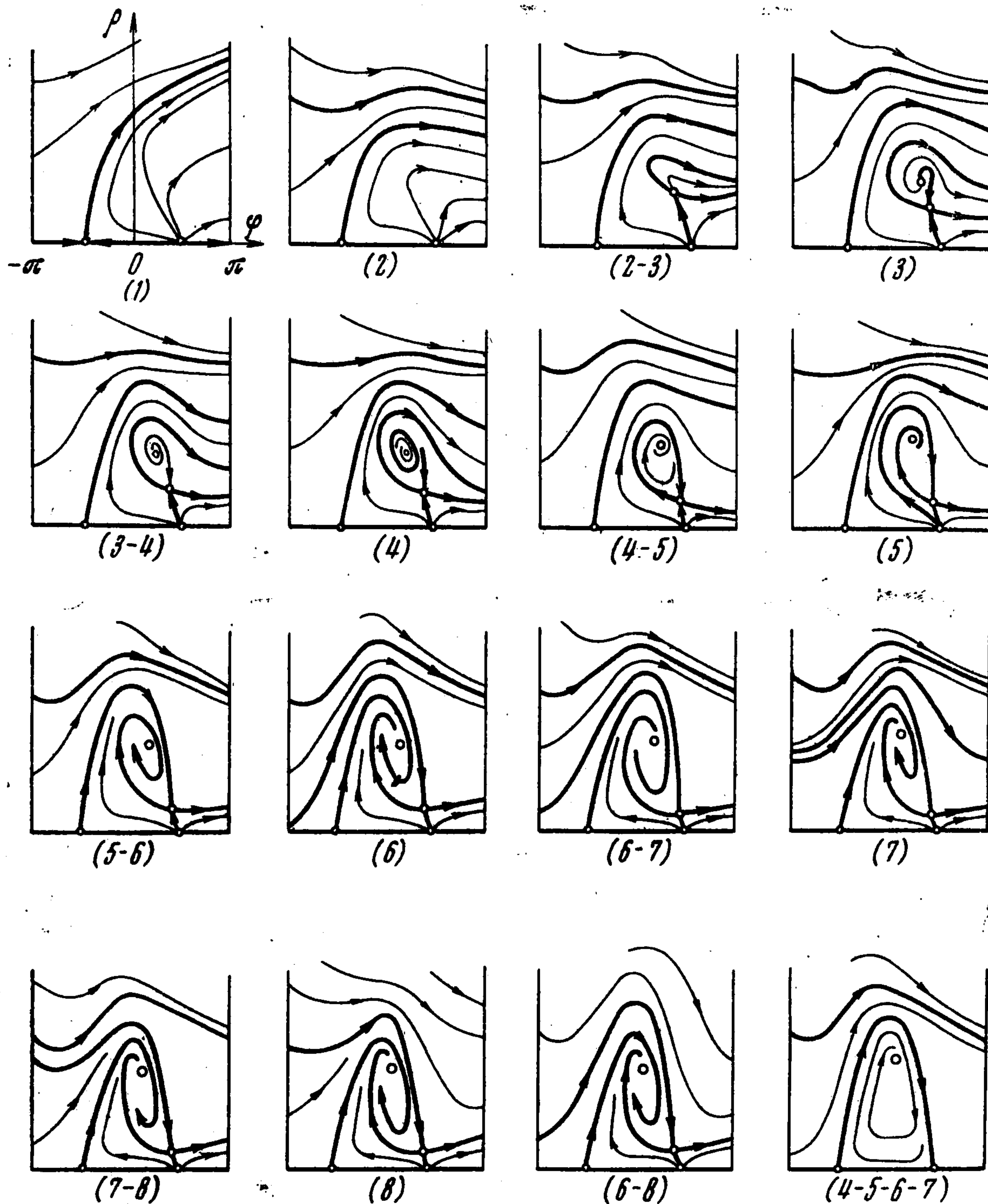
Фиг. 1

ной особой точки отделяется особая точка типа седло-узел с неустойчивой узловой областью, так как на куске AB будет $\sigma_{34} \equiv (P_\varphi' + Q_\rho')$ ₃₄ = $(1 - 2\mu^2)/\lambda > 0$; 2) из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл, так как в уравнении появляется член $-\mu\rho$, и бесконечность становится неустойчивой. В точке B происходит бифуркация: точка становится вырожденной и исчезает узловая область. Внешним признаком этого служит обращение в нуль величины σ_{34} . При переходе через точку B вдоль кривой в направлении возрастающих μ особая точка седло-узел с неустойчивой узловой областью превращается в седло-узел с устойчивой узловой областью, так как величина σ_{34} меняет знак и становится отрицательной. Качественная структура фазового пространства, представленная на фиг. 1 (III), будет существовать на некотором куске кривой, примыкающем к точке B справа.

Для прослеживания дальнейших бифуркаций вдоль кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ существенным является выяснение качественной структуры разбиения на траектории при больших μ и λ . Можно показать, что для больших μ и λ качественная структура будет такова, как на фиг. 1 (V). Сепаратриса седло-узла имеет всюду отрицательный наклон. Предельных циклов нет¹. На фиг. 1 представлены качественные структуры, последовательно переходящие одна в другую при возрастании параметров вдоль

¹ Доказательство этого утверждения дано Н. А. Губарь (Приложение I).

кривой. ω -Сепаратриса седло-узла при этом проходит через негрубые расположения, представленные на фиг. 1 (III—IV) и 1(IV—V). На фиг. 1 (III—IV) ω -сепаратриса седло-узла идет в седло O_1 . На фиг. 1 (IV—V) совпадают α - и ω -сепаратрисы седло-узла, образуя замкнутый контур, охватывающий цилиндр. При возникновении петли к ней стягивается устойчивый предельный цикл (так как для седло-узла на куске кривой справа от точки B будет $\sigma_{34} < 0$ [10]).



Фиг. 2

1.3°. Проследим за сменой качественных структур и бифуркациями при возрастании μ вдоль прямой, соответствующей некоторому фиксированному значению λ из интервала $1 < \lambda < \sqrt{3/2}$ (прямая располагается ниже точки B). Последовательность структур при возрастании μ представлена на фиг. 2. Для $\mu = 0$ картина разбиения фазового пространства на траектории представлена на фиг. 2(1). Предельных циклов нет, есть только две особых точки: O_1 — седло, O_2 — неустойчивый узел. При достаточно

малом изменении μ число и характер особых точек не изменяется, но структура фазового пространства в целом изменится. В уравнении появится член $-\mu\rho$, и бесконечность станет неустойчивой. Из бесконечности появится устойчивый предельный цикл. Эта структура изображена на фиг. 2(2). При возрастании параметра μ точка в пространстве параметров попадает на кривую $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ и из сгущения траекторий возникает сложная особая точка седло-узел с неустойчивой узловой областью, изображенная на фиг. 2(2—3). При дальнейшем возрастании μ сложная особая точка распадается на две простых: седло и неустойчивый узел (фиг. 2(3)).

Следующая бифуркация прослеживается при переходе точки через кривую $\sigma_3 = 0$; при этом из состояния равновесия при возрастании μ появляется неустойчивый предельный цикл. Бифуркационному значению параметра μ соответствует разбиение на траектории, представленное на фиг. 2 (3—4) (особая точка O_3 — сложный фокус), а значениям справа от кривой $\sigma_3 = 0$ (не слишком далеко от кривой) — картина, изображенная на фиг. 2(4). Вокруг устойчивого фокуса появился предельный цикл.

Дальнейшие бифуркации при возрастании μ будут бифуркациями сепаратрис. Проследим эти бифуркации.

На прямой $\varphi = \arcsin \lambda^{-1}$, расположенной на полосе $-\pi, \pi$ между точками O_3 и O_4 (на этой прямой сливаются точки O_3 и O_4 , если $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$), отметим выше изоклины вертикальных наклонов точки пересечения прямой с тремя сепаратрисами седла O_4 и α -сепаратрисой седла O_1 . Если параметр μ взят достаточно близко к кривой $\sigma_3 = 0$, то в порядке возрастания координаты ρ точки будут расположены в следующем порядке: P_1 — на ω -сепаратрисе седла, P_2 — на α -сепаратрисе седла, выходящей из седла влево, P_3 — на α -сепаратрисе седла O_1 и P_4 — на α -сепаратрисе седла, выходящей из седла вправо. При возрастании параметра μ состояния равновесия O_3 и O_4 монотонно расходятся по неподвижной изоклине вертикальных наклонов ($\partial\varphi_3/\partial\mu = -\rho_3(1 + \mu^2 - \lambda^2)^{-1/2} < 0$, $\partial\varphi_4/\partial\mu = \rho_4(1 + \mu^2 - \lambda^2)^{-1/2} > 0$), а векторное поле по обе стороны изоклины поворачивается в противоположных направлениях: сверху — по часовой стрелке, снизу — против. Точки P_1, P_3 и P_4 лежат на сепаратрисах, не пересекающих изоклину вертикальных наклонов, и поэтому на прямой $\varphi = \arcsin \lambda^{-1}$ с возрастанием μ точка P_1 будет монотонно подниматься, а точки P_3 и P_4 — монотонно опускаться.

Единственно возможная последовательность бифуркаций при возрастании μ такая, при которой слияние точек P_1 и P_2 предшествует слиянию P_1, P_3 и P_1, P_4 . Очевидно также, что если последняя из перечисленных бифуркаций осуществляется, то осуществляются и все остальные. Осуществимость последней бифуркации следует из того, что при достаточно больших μ (когда максимум изоклины горизонтальных наклонов, равный $(\lambda + 1)/\mu$, будет меньше максимума изоклины вертикальных наклонов, равного единице), ω -сепаратриса седла будет иметь всюду отрицательный наклон, и, следовательно, точка P_1 будет лежать заведомо выше точки P_4 . Очевидно, что в этом случае и предельные циклы, охватывающие фазовый

цилиндр, не могут существовать. Осуществляется структура разбиения фазового цилиндра на траектории, представленная на фиг. 2(8). Слиянию точек P_1, P_3 и P_1, P_4 соответствуют расположения сепаратрис, представленные на фиг. 2 (5—6) и 2(6—7). Поведение сепаратрис с точностью до четного числа предельных циклов определяет здесь качественную структуру. Значения параметра μ , соответствующие разбиениям фиг. 2(5—6) и фиг. 2(6—7), будут бифуркационными. При изменении μ от этих бифуркационных значений в направлении возрастания или убывания векторное поле на сепаратрисах поворачивается соответственно по- или против часовой стрелки, и сепаратрисы, идущие из седла в седло, разрушаются. Соответствующие грубые структуры изображены на фиг. 2(5), 2(6) и 2(7).

Заметим, что, хотя расположение сепаратрис на фиг. 2 (7) и определяет качественную структуру лишь с точностью до четного числа предельных циклов, можно утверждать, что здесь одновременно должны существовать и устойчивый и неустойчивый предельные циклы, охватывающие цилиндр. Неустойчивый предельный цикл появляется из петли сепаратрисы, охватывающей цилиндр, так как седловая величина $\sigma_4 = (P'_\phi + Q'_\phi)_4$ положительна, и при разрушении петли к ней может стянуться или из нее появиться только неустойчивый предельный цикл (кривая $\sigma_4 = 0$ представляется уравнением $\lambda(1 - 2\mu^2) = -3\mu\sqrt{1+\mu^2 - \lambda^2}$; она целиком расположена в полосе $\sqrt{3/2} < \lambda < 3/2$, т. е. вне рассматриваемого интервала изменения λ).

При дальнейшем увеличении параметра μ векторное поле на каждом из предельных циклов поворачивается по часовой стрелке; при этом устойчивый предельный цикл опускается, неустойчивый — поднимается. При любом фиксированном λ в рассматриваемом интервале существует единственное бифуркационное значение μ^* , при котором устойчивый и неустойчивый предельные циклы сливаются, образуя двойной устойчивый предельный цикл. Это последняя бифуркация, возможная при возрастании параметра μ . При дальнейшем возрастании μ векторное поле на двойном цикле поворачивается по часовой стрелке, и двойной предельный цикл исчезает. Негрубая структура разбиения на траектории, соответствующая значению $\mu = \mu^*$, изображена на фиг. 2(7—8). Для всех $\mu > \mu^*$ осуществляется разбиение на траектории, представленное на фиг. 2 (8).

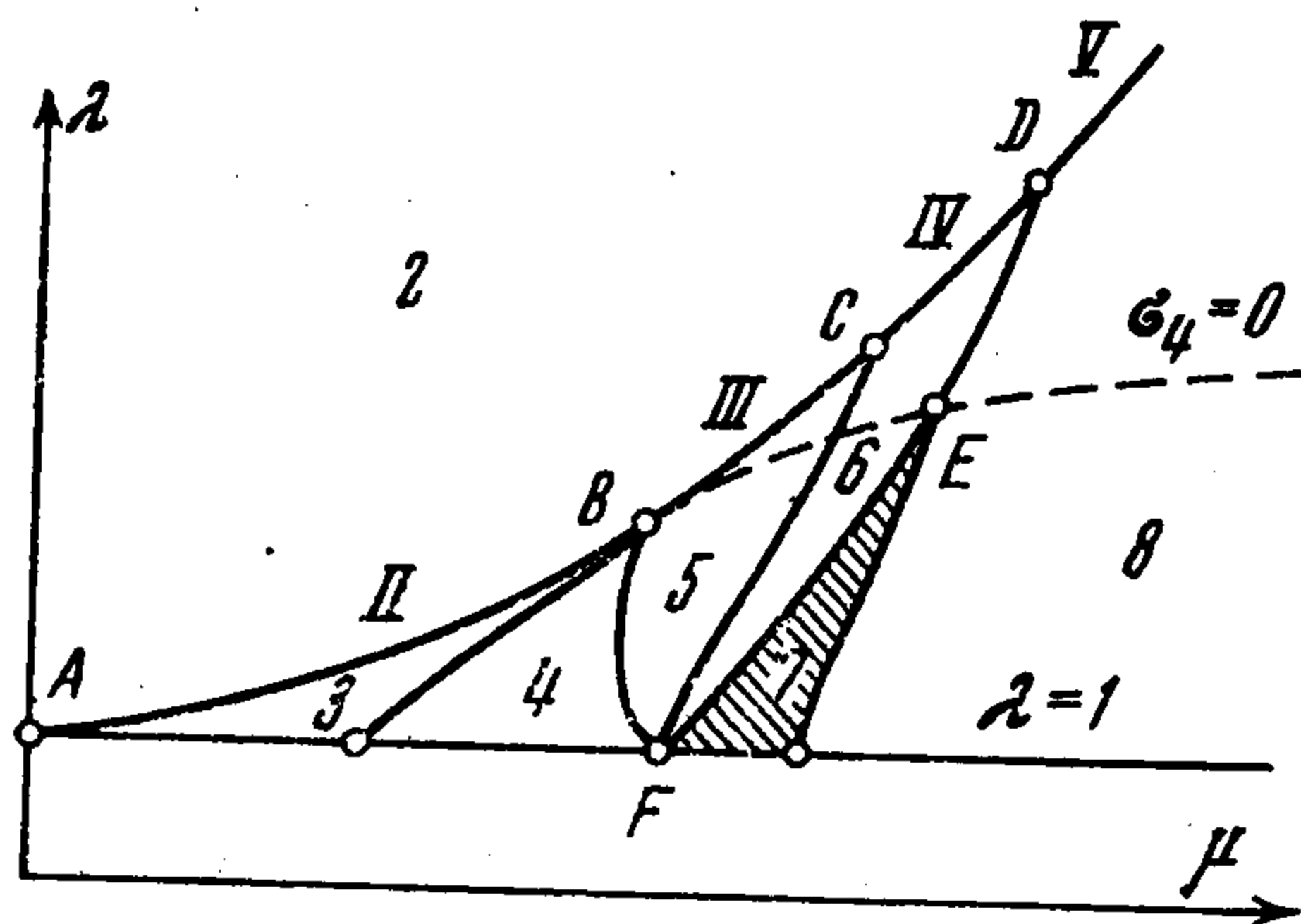
1.4°. Таким же образом прослеживаются бифуркации в зависимости от μ при любых фиксированных $\lambda > \sqrt{3/2}$. Число возможных бифуркаций здесь уменьшается, но появляются две новых.

1) При убывании μ от значений, соответствующих разбиению, представленному на фиг. 1 (V) (для участка граничной кривой выше точки D на фиг. 3), исчезает особая точка седло-узел и из α -сепаратрисы седло-узла появляется устойчивый предельный цикл (при обратном изменении μ устойчивый предельный цикл превращается в α -сепаратрису седло-узла).

2) Так как кривая $\sigma_4 = 0$ располагается выше прямой $\lambda > \sqrt{3/2}$ и образование петли сепаратрисы для некоторых значений λ может осуществиться при $\sigma_4 < 0$, то для этих значений λ переход от разбиения типа (6) на фиг. 2 к типу (8) при возрастании μ будет происходить путем стягивания устойчивого предельного цикла к петле сепаратрисы, охватывающей цилиндр. При этом возникает новая негрубая структура, разделяющая структуры (6) и (8), представленная на фиг. 2(6—8). Для структуры (6—8), как и для структуры (6—7), α - и ω -сепаратрисы седла O_4 образуют петлю, охватывающую цилиндр, но нет устойчивого предельного цикла.

В области $1 + \mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\mu \geq 0$ при любых λ будут осуществляться структуры (1) и (2) фиг. 2. В области $(1 + \lambda) / \mu < 1$ — структура (8), фиг. 2. Смена структур будет происходить при изменении μ в интервале между кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ и прямой $1 + \lambda - \mu = 0$ ($\sqrt{\lambda^2 - 1} < \mu < \lambda + 1$).

Множества точек, соответствующие негрубым бифуркационным картинам (4—5), (5—6), (6—7) и (6—8) на фиг. 2, образуют непрерывные кривые {4.5}, {5.6}, {6.7} и {6.8} в плоскости $\mu\lambda$. Эти кривые имеют положительный наклон. Последнее следует из



Фиг. 3

того, что при возрастании параметров μ и λ в отдельности векторное поле на сепаратрисах, идущих из седла в седло и не пересекающих контактную кривую (изоклину вертикальных наклонов), поворачивается в противоположных направлениях. Только при одновременном возрастании или убывании μ и λ поворот векторного поля вдоль сепаратрис, идущих из седла в седло, может быть не монотонным и не разрушающим сепаратрис. Бифуркационные кривые {4.5} и {5.6} начинаются и заканчиваются на линиях $\lambda = 1$ и $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$.

Кривая {4.5} не выходит из полосы $1 < \lambda < \sqrt{3/2}$ и заканчивается в точке B . Сепаратрису сложной особой точки на фиг. 1 (II—III) можно рассматривать как вырождение сепаратрисы точки O_4 на фиг. 2 (4—5) при предельном переходе, сохраняющем при сближении точек O_3 и O_4 петлю сепаратрисы. Кривая {5.6} заканчивается в точке C (фиг. 3). В точке C , как и на кривой {5.6}, сепаратриса седла O_1 идет в седло O_4 (фиг. 1 (III—IV) и фиг. 2 (5—6)). Ни для одной точки любой прямой $\lambda = \text{const}$, проходящей выше точки C , это уже невозможно.

Кривая {6.7} начинается на прямой $\lambda = 1$ и заканчивается на кривой $\sigma_4 = 0$. Дальше она превращается в кривую {6.8}, заканчивающуюся в точке D кривой $1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$. В точке D , как и на кривых {6.7} и {6.8}, α - и ω -сепаратрисы седла O_4 образуют петлю. Ни для одной точки любой прямой $\lambda = \text{const}$, проходящей выше точки D , это невозможно.

Кривые {4.5}, {5.6} и {6.7} на прямой $\lambda = 1$ пересекаются в одной точке. В этой точке осуществляется структура разбиения на траектории высокой степени негрубости, представленная на фиг. 2 (4—5—6—7). Точка $(1/2 \pi, 0)$ — сложная особая точка. Только от структуры (4—5—6—7) с петлей сепаратрисы можно сколь угодно малым изменением параметров перейти к негрубым структурам (4—5), (5—6) или (6—7), но, так как изменение μ разрушает петлю, на прямой $\lambda = 1$ может существовать лишь единственная точка со структурой, содержащей петлю сепаратрисы, — точка пересечения кривых {4.5}, {5.6} и {6.7}.

Множество точек, соответствующих бифуркационной картине (7—8) с двойным полуустойчивым предельным циклом на фиг. 2, образует непрерывную кривую {7.8} с положительным наклоном. Кривая {7.8} начинается на прямой $\lambda = 1$ и заканчивается в точке пересечения кривых {6.7} и {6.8}, служащих продолжением одна другой, с кривой $\sigma_4 = 0$ (точка E на фиг. 3).

На фиг. 3 представлена без соблюдения масштабов схема расположения бифуркационных кривых в плоскости $\mu\lambda$ для рассматриваемого случая $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 1$.

¹ Расположение бифуркационных кривых дано в [9], где заключения о структурах разбиения на граничной кривой и о рождении предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла получены из графического построения сепаратрис методом изоклин.

2. Рассмотрим систему (1) при аппроксимациях пилообразными функциями

$$\sin \varphi \sim s_2 = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \varphi - 2 \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right] \\ \frac{2}{\pi} \varphi & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \\ -\frac{2}{\pi} \varphi + 2 \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases}, \quad \cos \varphi \sim c_2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \varphi + 1 \left[-\pi, 0 \right] \\ -\frac{2}{\pi} \varphi + 1 \left[0, \pi \right] \end{cases} \quad (2)$$

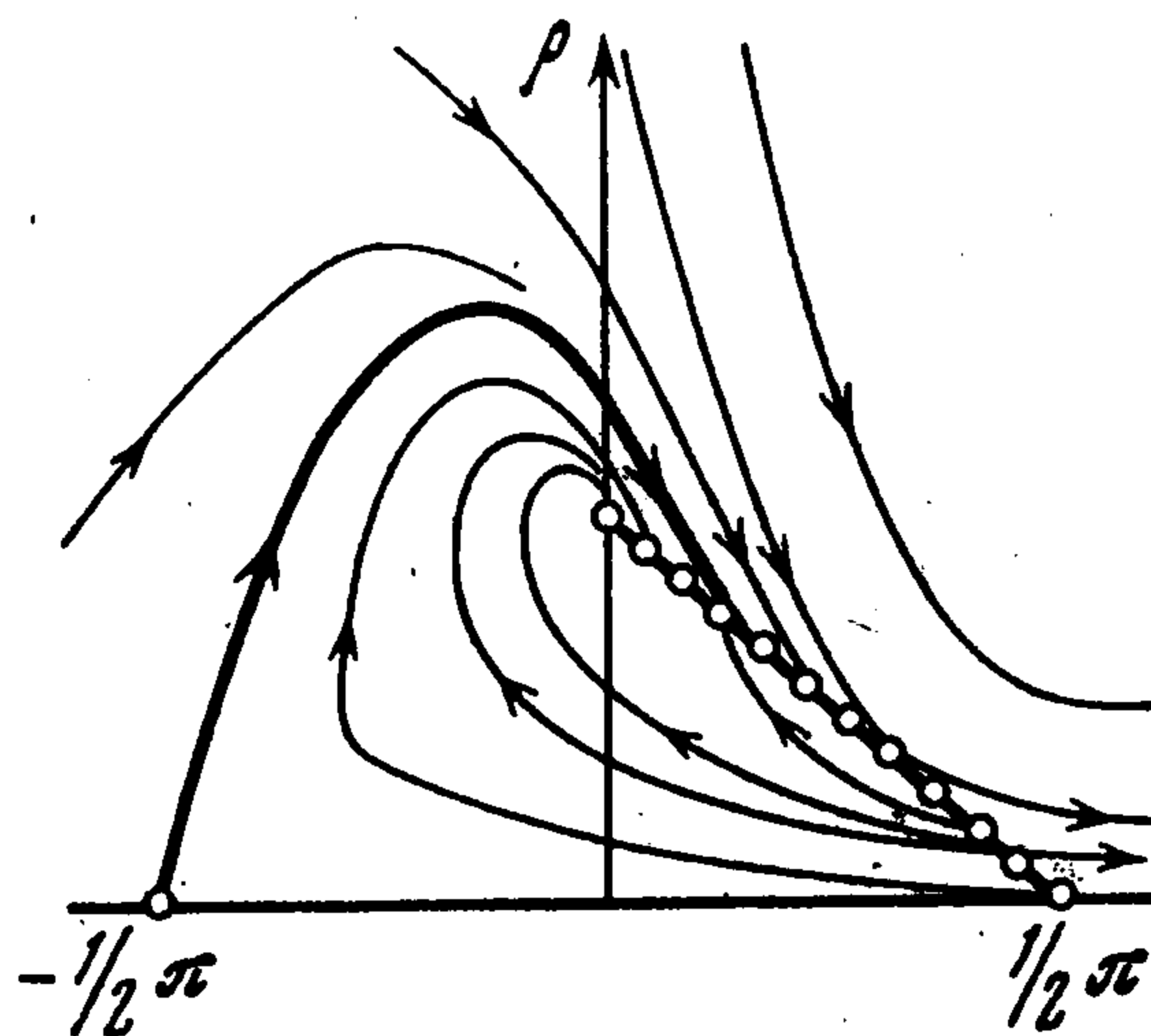
Состояния равновесия на полосе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ будут: $O_1(-\frac{1}{2}\pi, 0)$, $O_2(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $O_3(\varphi_3, \rho_3)$, $O_4(\varphi_4, \rho_4)$, где

$$\varphi_3 = \frac{\pi(\lambda - \mu)}{2(1 + \mu)}, \quad \rho_3 = \frac{1 + \lambda}{1 + \mu}, \quad \varphi_4 = \frac{\pi(\lambda - \mu)}{2(1 - \mu)}, \quad \rho_4 = \frac{1 - \lambda}{1 - \mu}$$

O_1 — сшитое седло, O_2 — сшитый неустойчивый узел, O_3 — узел или фокус, O_4 — седло. В пространстве параметров на прямой $\lambda - \mu = 0$ сливаются точки O_3 и O_4 , на прямой $\lambda = 1$ — точки O_4 и O_2 .

Структура разбиения фазового пространства для точки $\lambda = \mu = 1$.

При $\lambda = \mu = 1$ на интервале $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$ совпадают изоклины вертикальных и горизонтальных наклонов, и возникает структура разбиения фазового пространства с отрезком покоя на интервале $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Интегральными кривыми, по которым движутся изображающие точки на интервале $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$, будут экспоненты. $\rho = 1 - 2\pi^{-1}\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$) —



Фиг. 4

отрезок покоя, устойчивый на интервале $0 < \varphi < \frac{1}{2}(\pi - 1)$ и неустойчивый на интервале $\frac{1}{2}(\pi - 1) < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. В точке $(\frac{1}{2}(\pi - 1), \pi^{-1})$ интегральная кривая $\rho = \pi^{-1}e^{\pi-1-2\varphi}$ касается отрезка покоя и при $\varphi = 0$ попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов ($\pi^{-1}e^{\pi-1} > 2$) и уходит в бесконечность. Предельных циклов нет. Все траектории идут к устойчивой части отрезка покоя. Структура разбиения фазового пространства в окрестности отрезка покоя представлена на фиг. 4.

Структура разбиения на прямой $\lambda = \mu$. При возрастании λ и μ от значения $\lambda = \mu = 1$ вдоль прямой отрезок покоя распадается, и на его концах возникают особые точки: $O_{34}(0, 1)$ — сшитая из фокуса и седла и $O_2(\frac{1}{2}\pi, 0)$ — сшитый узел (неустойчивый). Изоклина горизонтальных наклонов располагается на интервале $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ выше изоклины вертикальных наклонов, и сепаратриса седла O_1 , заканчивавшаяся при $\lambda = \mu = 1$ на устойчивом куске отрезка покоя, превращается в траекторию, накручивающуюся на предельный цикл, охватывающий цилиндр

(бесконечность неустойчива). Устойчивый предельный цикл появляется из траектории, примыкающей к отрезку покоя, и куску отрезка покоя.

При возрастании λ и μ вдоль прямой седло-фокус O_{34} превращается при $\mu = (1 + 2\sqrt{\pi})/\pi = \mu^*$ в седло-узел с устойчивой узловой областью. Обе ω -сепаратрисы шитого седло-узла для μ , близких к μ^* , должны выходить из узла O_2 . Для больших λ и μ предельных циклов нет, так как ω -сепаратриса, входящая в седло-узел, имеет всюду отрицательный наклон. Справедливость этого следует из того, что если взять точку $(\varphi_0, \eta_0 > 1)$ на ω -сепаратрисе, то при достаточно больших μ координата η_0 на прямой $\varphi = \varphi_0$ будет больше максимума изоклины горизонтальных наклонов $(\lambda + 1) / \mu$, так как в области $\rho > 1$ векторное поле поворачивается по часовой стрелке при возрастании μ вдоль прямой и при этом η_0 растет, а $(\lambda + 1) / \mu \rightarrow 1$.

Качественные структуры, последовательно переходящие одна в другую при возрастании μ и λ вдоль прямой $\lambda = \mu$, будут эквивалентны некоторым представленным на фиг. 1. Для любого μ из интервала $0 < \mu < \mu^*$ структура разбиения фазового пространства эквивалентна изображенной на фиг. 1 (II—III), для $\mu^* < \mu < \mu_1$ — на фиг. 1 (III), для $\mu_1 < \mu < \mu_2$ — на фиг. 1 (IV). Для $\mu_2 < \mu < \infty$ расположение сепаратрис будет таким, как на фиг. 1 (V).

Структура разбиения на полупрямой $\mu = \pi(\lambda - 1) + 1 > 1$. При возрастании λ и μ от значений $\lambda = \mu = 1$ вдоль полупрямой кусок изоклины на интервале $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ поворачивается вокруг точки $(\frac{1}{2}(\pi - 1), \pi^{-1})$, и отрезок покоя распадается с возникновением трех особых точек: $O_3(\varphi_3, \rho_3)$ — устойчивый фокус или узел, $O_4(\frac{1}{2}(\pi - 1), \pi^{-1})$ — седло с направлениями для сепаратрис, определяемыми уравнением $\pi^2 k^2 + 2\pi(1 + \mu)k + 4 = 0$, и $O_2(\frac{1}{2}\pi, 0)$ — шитый узел (неустойчивый). Контактная кривая с кривыми вырожденной системы ($\mu = \lambda = 1$) при изменении параметров вдоль прямой будет $\rho = \pi^{-1}$ и, следовательно, всегда проходит через седло. Векторное поле в области $\rho > 1$ поворачивается при возрастании μ по часовой стрелке и поэтому ω -сепаратриса, идущая в седло по направлению $k < -2\pi^{-1}$, не может пересекать интегральную кривую $\rho = \pi^{-1} e^{\pi^{-1} - 2\varphi}$ вырожденной системы, касающуюся отрезка покоя как раз в той точке, в которой при $\mu > 1$ возникает седло, и входящую в седло по направлению $k = -2\pi^{-1}$. Сепаратриса пересекает ось $\varphi = 0$ в точке $\rho^* > \pi^{-1} e^{\pi^{-1}} > 2$ и входит в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов. Предельных циклов, охватывающих цилиндр, нет при любых значениях λ и μ на рассматриваемой полупрямой. Структура разбиения фазового пространства для всех точек этой полупрямой будет одинакова и эквивалентна изображенной на фиг. 2 (8).

Разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой фазового пространства. Проследим за сменой структур и бифуркациями при изменении μ для фиксированного $\lambda = \lambda_0$ из интервала $1 < \lambda < \mu_1$. При $\mu = 0$ качественная картина разбиения фазового пространства эквивалентна представленной на фиг. 2(1). Бесконечность устойчива. Для μ из интервала $0 < \mu < \lambda_0$ качественная картина будет

эквивалентна представленной на фиг. 2(2). Бесконечность неустойчива. Из нее появился устойчивый предельный цикл. При $\mu = \lambda_0$ в точке $(0, 1)$ появляется сшитый седло-фокус (если $\mu < \mu^*$) или сшитый седло-узел с устойчивой узловой областью (если $\mu > \mu^*$). Качественная картина эквивалентна представленной на фиг. 1 (II—III) или 1(III) соответственно. При дальнейшем возрастании μ сложная сшитая особая точка разделяется на две простых: седло O_4 (φ_4, ρ_4) и устойчивый фокус (узел) O_3 (φ_3, ρ_3). Качественная картина эквивалентна представленной на фиг. 2(5). Обе ω -сепаратрисы седла O_4 идут в точку O_2 (неустойчивый узел).

При $\mu \geq \pi(\lambda - 1) + 1$ одна из ω -сепаратрис седла O_4 уходит в бесконечность. Качественная картина эквивалентна представленной на фиг. 2(8). Между линиями $\lambda = \mu$ и $\mu = \pi(\lambda - 1) + 1$ при возрастании μ осуществляются две бифуркации сепаратрис: при некотором $\mu = \mu^{(1)}(\lambda_0)$ возникает сепаратриса, идущая из седла O_4 в седло O_1 , и при $\mu = \mu^{(2)}(\lambda_0) > \mu^{(1)}(\lambda_0)$ возникает петля сепаратрисы вокруг цилиндра.

Характер бифуркации при возникновении и разрушении петли сепаратрисы определяется знаком седловой величины

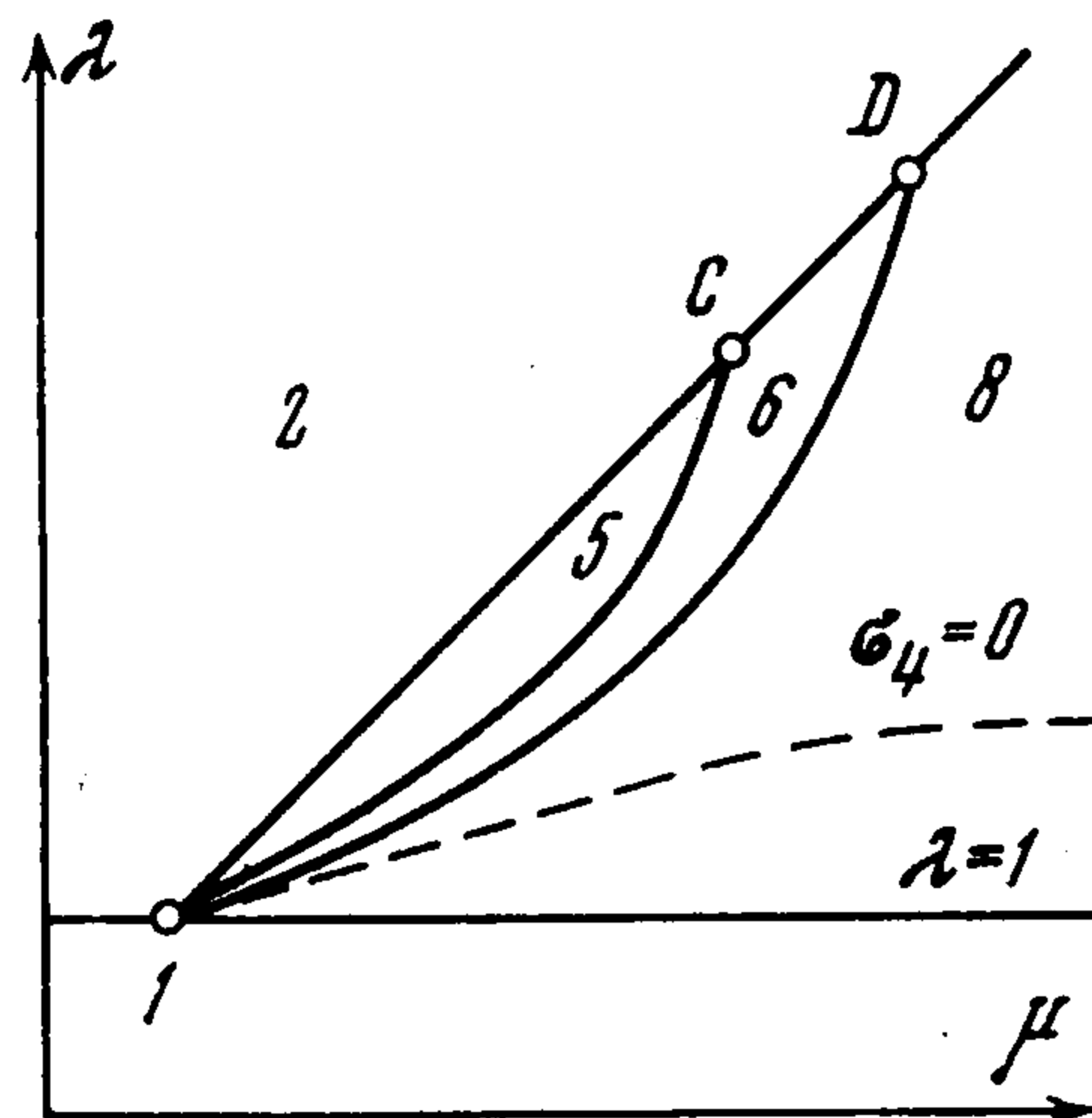
$$\sigma_4 = (P_\varphi' + Q_\rho')_4 = \frac{2}{\pi(\mu - 1)}(\pi\mu + \mu - \pi\mu\lambda - 1)$$

Кривая $\sigma_4 = 0$ касается прямой $\mu = \pi(\lambda - 1) + 1$ в точке $\lambda = \mu = 1$ и располагается справа от нее. Слева от прямой для бифуркационных значений параметров седловая величина имеет отрицательное значение. С возрастанием μ при возникновении петли сепаратрисы к петле стягивается устойчивый предельный цикл.

При фиксированном $\lambda = \lambda_1$ из интервала $\mu_1 < \lambda < \mu_2$ при возрастании μ на интервале $\lambda_1 < \mu < \pi(\lambda_1 - 1) + 1$ осуществляется лишь одна бифуркация: при $\mu = \mu^{(2)}(\lambda_1)$ возникает петля сепаратрисы вокруг цилиндра, к которой стягивается устойчивый предельный цикл. При фиксированном $\lambda = \lambda_2 > \mu_2$ при изменении μ на интервале $\lambda_2 < \mu < \infty$ изменения качественных структур не происходит.

Кривые $\mu = \mu^{(1)}(\lambda)$ и $\mu = \mu^{(2)}(\lambda)$, соответствующие негрубым структурам, качественно эквивалентны изображенным на фиг. 2(5—6) и 2(6—8), образуют бифуркационные кривые, начинающиеся в точке $\lambda = \mu = 1$ и заканчивающиеся на прямой $\lambda = \mu$ соответственно в точках $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$.

На фиг. 5 представлена без соблюдения масштабов схема разбиения пространства параметров $\mu \geq 0, \lambda \geq 1$. Качественный характер разбиения пространства параметров существенно отличается от разбиения для исходной системы (1). В частности, здесь отсутствует область существования двух предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр.



Фиг. 5

3. Рассмотрим систему (1) при аппроксимациях

$$\sin \varphi \sim s_3 = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \varphi - 2 \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right] \\ \frac{2}{\pi} \varphi \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ -\frac{2}{\pi} \varphi + 2 \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases}, \quad \cos \varphi \sim c_3 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \varphi + 1 \left[-\pi, 0 \right] \\ 1 - \frac{4}{\pi^2} \varphi^2 \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \\ -\frac{2}{\pi} \varphi + 1 \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases} \quad (3)$$

отличающихся от (2) тем, что при аппроксимации $\cos \varphi$ отрезок прямой на интервале $0, \frac{1}{2}\pi$ заменен параболой. Такое изменение делает невозможным сложную бифуркацию с совпадением изоклин на отрезке и существенно меняет общую картину возможных бифуркаций.

Состояния равновесия на полосе $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ будут: $O_1 (-\frac{1}{2}\pi, 0)$ — сшитое седло, $O_2 (\frac{1}{2}\pi, 0)$ — сшитый неустойчивый узел, $O_3 (\varphi_3, \rho_3)$ — узел или фокус, $O_4 (\varphi_4, \rho_4)$ — седло. Здесь φ_4 — больший корень уравнения

$$\varphi^2 - \frac{\pi}{2\mu} \varphi + \frac{\pi^2(\lambda - \mu)}{4\mu} = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi)$$

а φ_3 — либо меньший его корень, если $\lambda - \mu > 0$, либо определяется по формуле, приведенной в начале п. 2, если $\lambda - \mu < 0$. Величины ρ_4 и ρ_3 находятся из уравнений соответствующих изоклин.

В пространстве параметров на кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$ ($\mu > \frac{1}{2}$) сливаются точки O_3 и O_4 ; на прямой $\lambda = 1$ — точки O_4 и O_2 . В плоскости параметров границей области существования только двух точек (O_1 и O_2) будет отрезок прямой $\lambda = 1, 0 < \mu < \frac{1}{2}$ и ветвь кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0, \mu > \frac{1}{2}$.

Рождение предельного цикла из фокуса. Фокус O_3 меняет устойчивость на кривой

$$\sigma_3 \equiv (P_\varphi' + Q_\rho')_3 = \frac{2 + \pi}{\mu\pi} (1 - \sqrt{1 - 4\mu\lambda + 4\mu^2}) - 2\lambda = 0$$

начинающейся в точке $\lambda = 1, \mu = (2 + \pi) / (2 + 2\pi)$ и заканчивающейся на кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$, которой она касается в точке B

$$\mu = [(4 + \pi) / 4\pi]^{1/2} = \mu_0, \quad \lambda = (2 + \pi) / [\pi(4 + \pi)]^{1/2}$$

При переходе через кривую $\sigma_3 = 0$ в направлении возрастающих μ фокус из неустойчивого становится устойчивым и из него появляется неустойчивый предельный цикл (первая ляпуновская величина для точек кривой $\sigma_3 = 0$ имеет значение)

$$\alpha_3 = \mu \frac{2 + \pi}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\lambda}} \frac{(2 + \pi)^2 + 4\pi^2\lambda\mu}{[2 + \pi - 2\pi\lambda\mu]^{3/2}} > 0$$

Структура разбиения фазового пространства на граничной кривой, разделяющей области двух и четырех точек. Точкам на кривой $4\mu^2 - 4\mu\lambda + 1 = 0$ ($\mu > \frac{1}{2}$) соответствует фазовое пространство с особой точкой седло-узел, возникшей от слияния точек O_3 и O_4 . При $\mu = \mu_0$ совпадают направления, по которым траектории могут идти в особую точку, и седло-узел становится вырожденным. При переходе через значе-

ние $\mu = \mu_0$ седло-узел с неустойчивой узловой областью ($\mu < \mu_0$) переходит в седло-узел с устойчивой узловой областью ($\mu > \mu_0$). Для малых μ сепаратриса седла O_1 накручивается на предельный цикл, охватывающий цилиндр. ω -Сепаратриса седло-узла для больших μ имеет всюду отрицательный наклон (приложение 2) и, следовательно, предельных циклов нет. При возрастании μ вдоль кривой $4\mu^2 - 4\lambda\mu + 1 = 0$, $\mu > 1/2$ последовательность качественных картин, переходящих одна в другую, будет такая же, как на фиг. 1.

Разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой фазового пространства. Обращение в нуль седловой величины

$$\sigma_4 \equiv (P_\varphi' + Q_\rho')_4 = \frac{2 + \pi}{\mu\pi} (1 + \sqrt{1 - 4\lambda\mu + 4\mu^2}) - 2\lambda$$

происходит на кривой, касающейся граничной кривой в точке B и имеющей асимптоту $\lambda = 1 + 2/\pi$. Седловая величина отрицательна выше кривой $\sigma_4 = 0$.

Отправляясь от известных структур разбиения фазового пространства на граничной кривой, можно проследить смену качественных структур при возрастании μ , повторяя почти дословно рассуждения, проведенные в п. п. 1.3° и 1.4°, так как при изменении μ осуществляется монотонный поворот поля направлений, а принятая аппроксимация (3) не изменяет существенно поведение величин σ_3 , α_3 и σ_4 , определяющих характер возможных бифуркаций в окрестности фокуса и петли сепаратрисы. Для аппроксимирующей системы, как и для исходной системы (1), при $(\lambda + 1)/\mu < 1$ предельных циклов нет и все бифуркации осуществляются на отрезке $\lambda = \text{const}$ между граничной кривой и прямой $\mu = \lambda + 1$. Качественный характер разбиений пространства параметров и фазового пространства при аппроксимациях (3) остается таким же, как и для исходной системы (1).

4. Рассмотрим систему (1) при аппроксимациях кусочно-постоянной для $\sin \varphi$ и пилообразной для $\cos \varphi$

$$\sin \varphi \sim s_4 = \begin{cases} -1 & (-\pi, 0) \\ 1 & (0, \pi) \end{cases}, \quad \cos \varphi \sim c_4 = \begin{cases} 2\pi^{-1}\varphi + 1 & [-\pi, 0] \\ -2\pi^{-1}\varphi + 1 & [0, \pi] \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что это интегрируемая аппроксимация. Правая часть системы (1) при аппроксимациях (4) терпит разрыв на линиях сшивания. Кроме прямой $\rho = 0$ роль изоклины горизонтальных наклонов выполняет ломаная, состоящая из кусков интегральных прямых $\rho = (\lambda + 1)/\mu = \rho_3$ $(-\pi, 0)$, $\rho = (\lambda - 1)/\mu = \rho_4$ $(0, \pi)$ и отрезков между ними $\varphi = 0, \pm\pi$; $(\lambda - 1)/\mu < \rho < (\lambda + 1)/\mu$, на которых производная меняет знак. При $(\lambda - 1)/\mu > 1$ на полосе $-\pi < \varphi < \pi$ будет только два состояния равновесия: O_1 $(-1/2\pi, 0)$ — седло и O_2 $(1/2\pi, 0)$ — неустойчивый узел. При $(\lambda - 1)/\mu = 1$ изоклины смыкаются и возникает сшитая сложная особая точка $(0, 1)$, качественно эквивалентная вырожденному седло-узлу без узловой области (фиг. 6). При $(\lambda - 1)/\mu < 1 < (\lambda + 1)/\mu$ сложная особая точка распадается на две: O_3 $(0, 1)$ — сшитый фокус и O_4 (φ_4, ρ_4) — седло. При $(\lambda + 1)/\mu \leq 1$ фокус O_3 превращается в устойчивый узел O_3 (φ_3, ρ_3) . Границей области существования двух и четырех точек будет прямая $\lambda - \mu - 1 = 0$. На прямой $\lambda = 1$ сливаются точки O_4 и O_2 .

Рождение предельного цикла из сшитого фокуса. Сшитый фокус будет устойчив, если будут иметь разные знаки величины

$$\alpha_2 \equiv \frac{1}{3} \left[\frac{F_2'''(0, 1)}{F_2''(0, 1)} - \frac{F_1'''(0, 1)}{F_1''(0, 1)} \right], \quad Q_1(0, 1) = 2(\lambda - \mu + 1)$$

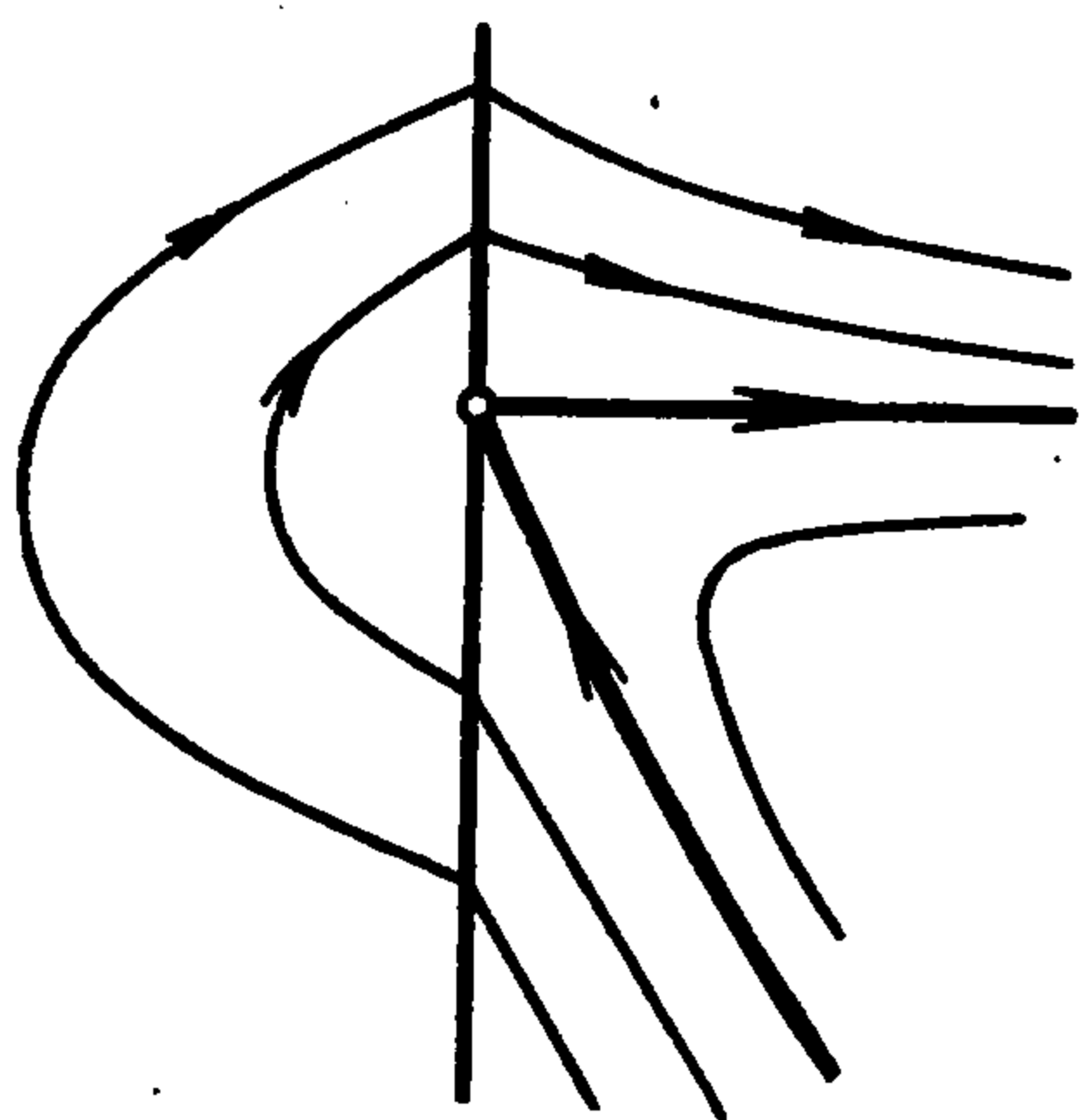
Здесь $F_1(\varphi, \rho) = C_1$ ($\varphi \leq 0$) и $F_2(\varphi, \rho) = C_2$ ($\varphi \geq 0$) — общие интегралы системы [11].

Сшитый фокус меняет устойчивость на кривой

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3} \frac{(1 + \pi)\mu - \lambda}{(\lambda - \mu + 1)(\lambda - \mu - 1)} = 0$$

начинающейся в точке $\mu = (1 + \pi)^{-1}$, $\lambda = 1$ и заканчивающейся на граничной прямой в точке $\mu = \pi^{-1}$, $\lambda = (1 + \pi)\pi^{-1}$.

При переходе через кривую $\alpha_2 = 0$ в направлении возрастающих μ сшитый фокус из неустойчивого становится устойчивым и из него появляется неустойчивый предельный цикл (величина α_4 — аналог первой ляпуновской величины [11] — для точек бифуркационной прямой $(1 + \pi)\mu - \lambda = 0$ положительна).



Фиг. 6

Разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой фазового пространства. Вдоль всей граничной кривой характер сложной особой точки и структура разбиения фазового пространства на траектории сохраняются. Бесконечность неустойчива.

α -Сепаратриса седла O_1 не может идти в особую точку и накручивается на устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр. Качественная картина разбиения на траектории на всей граничной кривой эквивалентна изображенной на фиг. 1 (II—III).

При $(\lambda + 1) / \mu < 1$ ω -сепаратриса седла O_4 , входящая в особую точку по направлению $k = -2\pi^{-1} - 2\mu$, попадает при $\varphi = 0$ в область отрицательных наклонов и идет в бесконечность. Предельных циклов нет. Качественная картина эквивалентна изображенной на фиг. 2(8).

Обращение в нуль седловой величины

$$\sigma_4 = (P_\varphi' + Q_\rho')_4 = 2\pi^{-1}(1 + \pi - \lambda\pi)$$

происходит на прямой $\lambda = (1 + \pi) / \pi$, смыкающейся с линией, на которой фокус O_3 меняет устойчивость, в точке пересечения с граничной прямой $\lambda - \mu - 1 = 0$. Седловая величина отрицательна выше прямой $\sigma_4 = 0$.

Отправляясь от известных структур разбиения фазового пространства на граничной прямой и в области $\lambda - \mu + 1 < 0$, опять легко проследить все бифуркации и смену качественных структур при монотонном повороте векторного поля с возрастанием параметра μ .

Последовательность качественных структур, переходящих одна в другую при возрастании μ , эквивалентна представленным на фиг. 2 последовательностям грубых структур (2) — (8) (если $1 < \lambda < 1 + \pi^{-1}$) или структур (2), (5), (6), (8) (если $1 + \pi^{-1} < \lambda$). Негрубые структуры, разделяющие перечисленные грубые, также качественно

эквивалентны негрубым, представленным на фиг. 2, за исключением структур (2—3) и к (2—5) (последней нет на фиг. 2), которые должны быть заменены структурой (II—III) фиг. 1 (вместо седло-узла с неустойчивой или устойчивой узловой областью будет вырожденный седло-узел).

Качественная структура разбиения пространства параметров отличается от структуры разбиения для исходной системы (1) лишь тем, что бифуркационные кривые {5.6} и {6.8} не пересекаются с граничной кривой {2.5} и уходят в бесконечность.

5. Малым изменением аппроксимации (4) можно получить картину разбиения пространства параметров, качественно совпадающую с разбиением для исходной системы (1). Рассмотрим систему (1) при аппроксимациях

$$\sin \varphi \sim s_5 = \begin{cases} -1(-\pi, -\varphi_0] \\ \frac{\varphi}{\varphi_0}[-\varphi_0, \varphi_0], \\ +1[\varphi_0, \pi] \end{cases} \quad \cos \varphi \sim c_5 = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\varphi + 1[-\pi, 0] \\ -\frac{2}{\pi}\varphi + 1[0, \pi] \end{cases} \quad (5)$$

отличающихся от (4) аппроксимацией $\sin \varphi$ на интервале $-\varphi_0, \varphi_0$. При малом φ_0 аппроксимация (5) близка к (4). Точки $O_1(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ и $O_2(\frac{1}{2}\pi, 0)$ будут иметь такой же характер, как и при аппроксимации (4). На прямой $\lambda = 1$ сливаются точки O_4 и O_2 . Граничной кривой, на которой сливаются точки O_3 и O_4 , будет ломаная, составленная из двух звеньев: отрезка прямой $\lambda = (1 - 2\pi^{-1}\varphi_0)\mu + 1$ для $0 < \mu < \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$ и полупрямой $\lambda = \mu$ для $\mu > \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$. Вдоль граничной кривой характер сшитой сложной особой точки и качественные структуры разбиения на траектории будут изменяться.

Если φ_0 не велико, то сложная особая точка $O_{34}(\varphi_0, (\lambda - 1)/\mu)$ на интервале $0 < \mu < \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$ сшивается из седла O_4 и фокуса или узла O_3 . Для $\mu > \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$ сложная особая точка $\bar{O}_{34}(0, 1)$ будет седло-узел. Для φ_0 , удовлетворяющих условию $1 + \pi^{-1} < \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$, граничная точка $\lambda = \lambda^*$, разделяющая седло-узлы и седло-фокусы, лежит в интервале $1 + \pi^{-1} < \lambda^* < \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$.

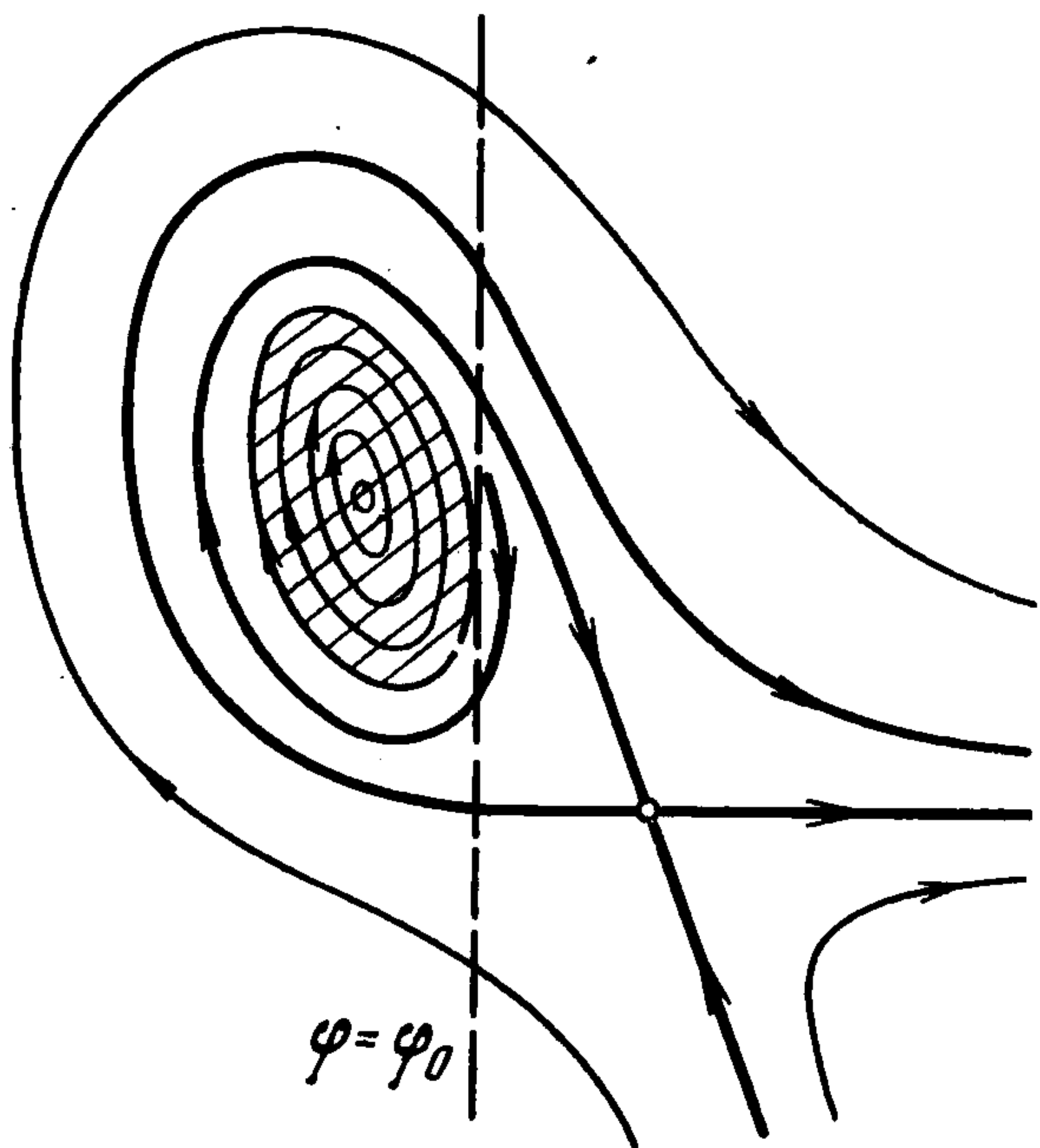
Если $1 < \lambda < \lambda^*$ и, следовательно, точка $O_{34}(\varphi_0, (\lambda - 1)/\mu)$ — седло-фокус, то α -сепаратриса седла O_1 не может идти в особую точку и должна накручиваться на устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр (бесконечность неустойчива). Качественная картина эквивалентна представленной на фиг. 1 (II—III). Для больших $\mu = \lambda$ ω -сепаратриса седло-узла $\bar{O}_{34}(0, 1)$ имеет всюду отрицательный наклон. Предельных циклов нет. Качественная картина эквивалентна представленной на фиг. 1 (V). При возрастании параметра μ вдоль граничной кривой осуществляются все относительно-грубые и бифуркационные структуры, представленные на фиг. 1 от (II—III) до (V).

Разбиение пространства параметров на области с различной качественной структурой фазового пространства. Фокус $O_3(\varphi^*, \rho^*)$ всегда устойчив, если он расположен слева от оси $\varphi = 0$ ($\lambda < \mu$), и может менять устойчивость, если расположен справа ($\mu < \lambda < (1 - 2\pi^{-1}\varphi_0)\mu + 1$).

Если $\varphi^* > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= (P_\varphi' + Q_\rho')_3 = \frac{2}{\pi} - 2\lambda^* - 4\mu\rho^* = \frac{2}{\pi} - 2\mu\rho^* = \\ &= \frac{2 [2\varphi_0\lambda\mu - (2\varphi_0^2 + \pi^2)\mu + \pi]}{\pi(\pi - 2\varphi_0\mu)} \\ &\left(\varphi^* = \frac{\pi\varphi_0(\lambda - \mu)}{\pi - 2\varphi_0\mu}, \quad \rho^* = \frac{\pi - 2\varphi_0\lambda}{\pi - 2\varphi_0\mu} \right) \end{aligned}$$

Фокус меняет устойчивость на кривой, начинающейся в точке $\lambda = 1$, $\mu = \pi [\pi^2 - (2\pi - 2)\varphi_0]^{-1}$, и заканчивается на граничной кривой в точке, где $\lambda = 1 + \pi^{-1}$. При переходе через кривую $\sigma_3 = 0$ в направлении возрастающих μ фокус из неустойчивого становится устойчивым.



Фиг. 7

Обращение в нуль седловой величины

$$\sigma_4 = (P_\varphi' + Q_\rho')_4 = \frac{2}{\pi} (1 + \pi - \pi\lambda),$$

происходит на прямой $\lambda = 1 + \pi^{-1}$, смыкающейся с линией, на которой фокус O_3 меняет устойчивость, в точке пересечения с граничной кривой $\lambda = (1 - 2\pi^{-1}\varphi_0)\mu + 1$.

Отправляясь от известных структур разбиения фазового пространства на граничной кривой (структуры фиг. 1 от (II—III) до (V) и в области $\lambda - \mu + 1 < 0$ (структура фиг. 2(8)), можно проследить все бифуркации и смены структур при монотонном повороте поля с возрастанием μ .

Качественная структура разбиения пространства параметров не отличается от структуры разбиения исходной системы (1). Структуры, соответствующие внутренним точкам областей разбиения пространства параметров, эквивалентны структурам в областях разбиения для системы (1).

Для системы с аппроксимацией (5) возникает одна особая бифуркация. Точкам кривой $\sigma_3 = 0$ на полосе $0 < \varphi < \varphi_0$ соответствует особая точка типа центр в точке O_3 . При возрастании μ и перемене знака величины σ_3 неустойчивый предельный цикл появляется из границы области, заполненной замкнутыми кривыми. Точкам кривой $\sigma_3 = 0$ соответствует разбиение в окрестности состояний равновесия O_3 и O_4 , представленное на фиг. 7.

Замечание. Область замкнутых кривых в окрестности точки O_3 не может иметь своей границей спитую петлю сепаратрисы седла O_4 , так как седловая величина в седле отлична от нуля. В возможности осуществления структуры разбиения, представленной на фиг. 7, проявляется неаналитичность правых частей системы при аппроксимации (5).

6. Если φ_0 не мало, то при аппроксимациях (5) изменением параметра φ_0 можно изменить поведение величин σ_3 и σ_4 таким образом, что исчезнут условия, делавшие неизбежным появление областей существования двух предельных циклов, охватывающих цилиндр. При возрастании φ_0 до зна-

чения $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ в пространстве $\mu > 0$, $\lambda > 1$ исчезает область, в которой возникновение петли сепаратрисы происходит при положительном значении седловой величины σ_4 .

При $\varphi_0 > \frac{1}{2}\pi^2 (\pi + 1)^{-1}$ кривая $\sigma_3 = 0$ будет состоять из куска гиперболы

$$2\varphi_0\pi\lambda\mu - (2\varphi_0 + \pi^2)\mu + \pi = 0$$

между прямой $\lambda = 1$ и точкой $\lambda = \mu = \frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1}$ на изломе граничной кривой. Кривая $\sigma_4 = 0$ будет состоять из куска этой же гиперболы в интервале $\frac{1}{2}\pi\varphi_0^{-1} < \lambda < 1 + \pi^{-1}$ (седло O_4 — в интервале $0 < \varphi < \varphi_0$) и примыкающей к нему полупрямой $\lambda = 1 + \pi^{-1}$, $\mu > (\pi - 2\varphi_0)^{-1}$ (седло — в интервале $\varphi_0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$).

При $\varphi_0 \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ граничная кривая переходит в ломаную $\lambda = 1$ ($0 < \mu < 1$), $\lambda = \mu$ ($\mu > 1$); кривая $\sigma_3 = 0$ уходит за границу рассматриваемой области $\lambda > 1$, а кривая $\sigma_4 = 0$ превращается в ветвь гиперболы $\pi\lambda\mu - \pi\mu - \mu + 1 = 0$ и, следовательно, совпадает с кривой $\sigma_4 = 0$, полученной при аппроксимациях (2). Разбиение пространства параметров будет качественно эквивалентно разбиению при аппроксимациях (2).

Приложение 1. По направлению

$$\kappa_2 = -2\mu^2 / \lambda = 2(1 - \lambda^2) / \lambda$$

входит в особую точку ω -сепаратриса седло-узла. Касательная к ней в особой точке (φ_0, ρ_0) будет

$$\rho - \rho_0 = \kappa_2(\varphi - \varphi_0) \quad (\varphi_0 = \arcsin \lambda^{-1}, \rho_0 = \mu / \lambda)$$

Касательная пересекает ось ρ в точке с ординатой

$$\rho_1 = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\lambda} \arcsin \frac{1}{\lambda}$$

Если ω -сепаратриса седло-узла попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонов $(\mu + 1) / \mu$, то, очевидно, предельные циклы, охватывающие цилиндр, не могут существовать. Это заведомо осуществляется для значений параметров, при которых выполняется неравенство $(1 + \mu) / \mu < \rho_1$ и для которых ω -сепаратриса на интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ лежит выше касательной. При $\lambda \rightarrow \infty$ будет $(1 + \mu) / \mu \rightarrow 1$ и $\rho_1 \rightarrow 3$ и, следовательно, указанное неравенство выполняется для достаточно больших λ .

Покажем, что ω -сепаратриса для достаточно больших λ лежит выше касательной. Рассмотрим точки пересечения изоклины направления κ_2 и касательной. Исключая ρ и заменяя ρ_0 и κ_2 их значениями, приходим к уравнению

$$[1 - 2\mu(\varphi - \varphi_0)] [1 + 2\mu^3(\varphi - \varphi_0) - \lambda \sin \varphi] = \mu [\lambda \cos \varphi - \mu + 2\mu^2(\varphi - \varphi_0)]$$

Левая и правая части этого уравнения, рассматриваемые как функции φ , в точке $\varphi = \varphi_0$ обращаются в нуль и имеют совпадающие первые производные. Разность значений вторых производных сохраняет знак при достаточно больших λ на всем интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, т. е. изоклина и касательная не пересекаются. Изоклина лежит ниже касательной (величина ρ_* — корень уравнения, определяющего ординату точки пересечения изоклины κ_2 с осью ρ , стремится к единице при $\lambda \rightarrow \infty$ и, следовательно, при больших λ будет $\rho_* < \rho_1$).

Так как ω -сепаратриса вблизи точки $\varphi = \varphi_0$ при больших λ лежит выше касательной (это будет показано), а изоклина направления κ_2 — ниже касательной и так как изоклина и касательная на интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ не пересекаются, то, очевидно, ω -сепаратриса также не может пересекаться с касательной и располагается выше касательной на всем интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.

Указанное расположение сепаратрисы и касательной вблизи точки следует из того, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{\mu(8\mu^4 - 5\mu^2 - 1)}{\lambda(2\mu^2 - 1)}, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{d\rho}{d\varphi} = \kappa_2$$

и, следовательно, при больших λ на ω -сепаратрисе $d^2\rho/d\varphi^2 > 0$ вблизи точки $\varphi = \varphi_0$.

Приложение 2. Доказательство подобно приведенному в приложении 1. ω -сепаратриса седло-узла входит в особую точку по направлению $\kappa_2 = -1/2(4\mu^2 - 1)\mu^{-1}$ и для $\mu \gg 1$ на интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_3$ располагается выше касательной, так как при этом

$$1. \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_3} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{(4\pi^2 - 1)[\pi(4\mu^2 - 1) - 4(\pi + 1)]}{\pi[\pi(4\mu^2 - 1) - 4]} > 0, \quad \text{если } \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_3} \frac{d\rho}{d\varphi} = \kappa_2$$

2. Изоклина направления κ_2 не пересекается с касательной на интервале $0 < \varphi < \varphi_3$. Уравнение

$$[1 - 2\mu(\varphi - \varphi_3)] \left[\frac{1}{2\mu} + \frac{4\mu^2 - 1}{2}(\varphi - \varphi_3) - \frac{2}{\pi}\varphi \right] = \frac{1}{4\mu} + \frac{4\mu^2 - 1}{2}(\varphi - \varphi_3) - \frac{4\mu}{\pi^2}\varphi^2$$

не имеет корней; это доказывается аналогично приложению 1.

3. Ордината точки пересечения изоклины κ_2 с осью ρ определяется из уравнения $4\mu^2(\rho - 1)^2 = 1$ и меньше соответствующей ординаты касательной $\rho_1 = (1 - 1/4\mu^{-2})(1 + 1/2\pi)$.

Предельное значение ρ_1 при $\mu \rightarrow \infty$ будет $1 + 1/2\pi$ и, следовательно, ω -сепаратриса для больших μ попадает в область выше максимума изоклины горизонтальных наклонных $\rho_{\max} = (\lambda + 1)\mu^{-1} = (1 + 1/2\mu^{-1})^2$.

Поступила 18 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
2. Жуковский Н. Е. О парении птиц. В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч., т. 4. Аэродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Fuchs — Норф — Сеewald. Aerodynamik, Berlin, Springer, 1934.
4. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Исследование продольной устойчивости аэроплана. М., Гос. авиац. и автотракт. изд., 1932.
5. Prölll A. Zur mechanik der Längsbewegung von Flugzeug. ZAMM, Hft. 4, 1935, Bd. 15, S. 233—237.
6. Ikonnikov E. On the dynamics of symmetrical flight of an aeroplane. Technical Physics of the USSR, 1937, vol. 4, No. 6, p. 1—5.
7. Баутин Н. Н. О продольных движениях самолета, близких к фугоидным движениям. Уч. зап. Горьковск. гос. ун-та, 1947, вып. 13.
8. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
9. Белюстина Л. Н. К динамике симметричного полета самолета. Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 11.
10. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
11. Губарь Н. А. О бифуркациях в окрестности «спитого фокуса». ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.