

О ВИХРЕВЫХ ЗОНАХ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ СО СКАЧКОМ ПОСТОЯННОЙ БЕРНУЛЛИ НА ГРАНИЦЕ

В. С. Садовский

(Москва)

Рассматривается вопрос о «склеивании» на жидкой линии тока вихревого течения несжимаемой жидкости, имеющего место в некоторой конечной области, с окружающим его потенциальным потоком в случае, когда на разделяющей их линии тока постоянная Бернулли терпит разрыв заданной величины. Для функции тока решение получено в виде интегралов, содержащих две неизвестные функции: контур вихревой области и интенсивность вихревой пелены. Для определения этих величин получена система двух нелинейных интегральных уравнений. Приведены некоторые результаты расчетов на ЭВМ.

Согласно некоторым современным моделям течений несжимаемой жидкости со стационарными срывными зонами при больших числах Рейнольдса [1,2], предельное решение уравнений Навье — Стокса описывает течение с постоянным вихрем в срывной зоне (в плоском случае), которое граничит с внешним потенциальным потоком. Этим обстоятельством вызвано появление ряда работ по исследованию вихревых и потенциальных течений, соприкасающихся на жидкой линии тока. Для течения в заданной конечной области такая задача рассмотрена в [3]. В случае течения в неограниченной области решение аналогичной задачи исследуется в работах [4-6], в [7] дано приложение этого решения к вопросу об исследовании обтекания тел со стационарными срывными зонами при больших числах Рейнольдса. В работе [8] в приближенной постановке рассматривается задача о «склеивании» вихревого и потенциального течений в присутствии тела, когда на границе вихревой зоны постоянная Бернулли терпит разрыв.

Ниже решение задачи о «склеивании» со скачком постоянной Бернулли для течения без жестких границ, что соответствует, согласно [7], случаю бесконечно больших чисел Рейнольдса и специальным граничным условиям в срывной зоне, дается в точной постановке.

1. Рассмотрим двумерное стационарное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, в котором имеется некоторая область Σ , занятая вихревым течением. Пусть ось X имеет направление скорости потенциального потока на бесконечности, а протяженность области вдоль оси равна l . Зададим распределение вихря

$$\Omega(x, y) = -\omega_0 \operatorname{sign} y \quad (\omega_0 = \operatorname{const} > 0)$$

Функцию тока ψ введем обычным способом:

$$\partial\psi/\partial x = -v, \quad \partial\psi/\partial y = u$$

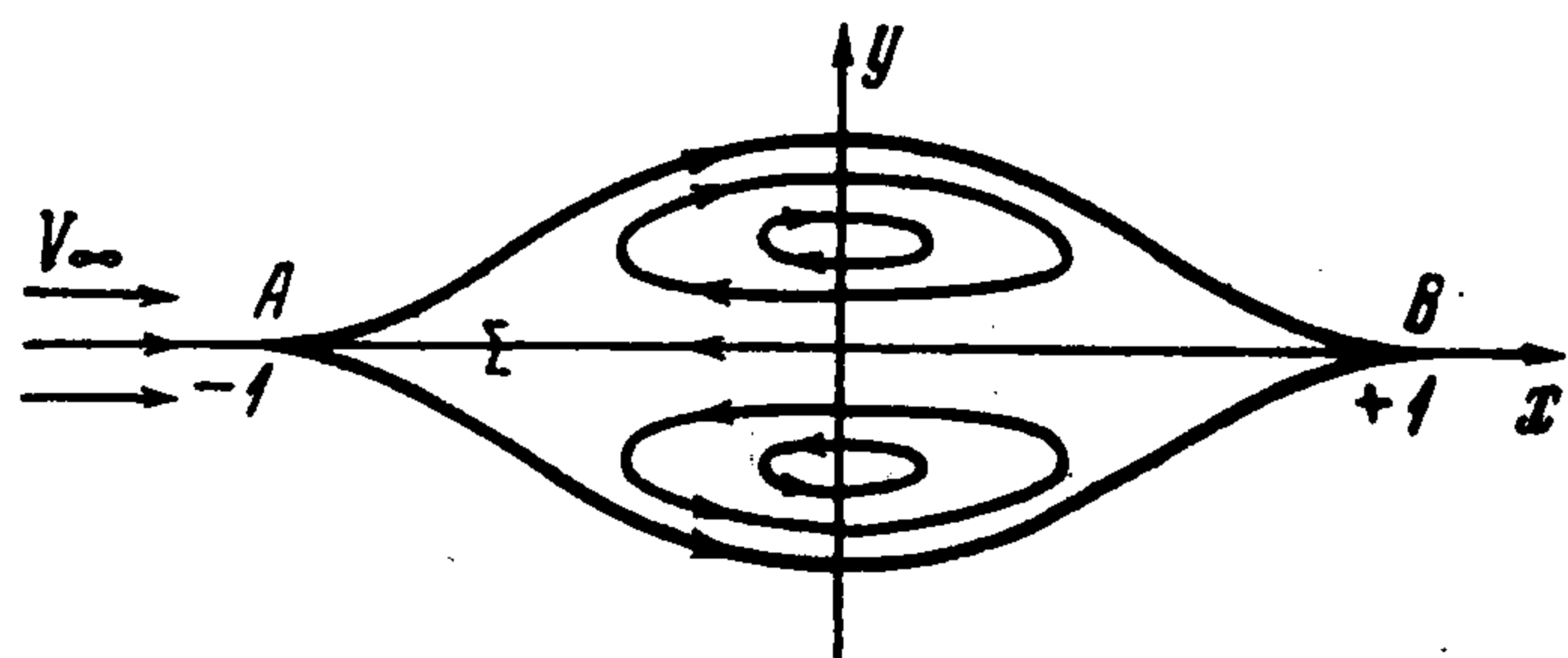
Здесь u, v — составляющие вектора скорости по осям X и Y , безразмерные, как и все остальные величины, при помощи ω_0 и $1/2 l$. Известно, что введенная таким образом функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа вне области Σ , а внутри — уравнению Пуассона $\nabla^2\psi = \operatorname{sign} y$.

Пусть на граничной линии тока L (границе области Σ) константа Бернулли претерпевает разрыв.

Используя условия непрерывности давления и уравнение Бернулли, легко показать, что $V_e^2 - V_i^2 = h$ на L . Здесь V — величина скорости, h — константа, равная удвоенному скачку постоянной Бернулли на граничной линии тока, а индексы i и e соответствуют вихревому и потенциальному течениям. Так как величина скорости с точностью до знака равна производной от ψ по нормали к линии тока, то

$$h = (\partial\psi/\partial n_e)^2 - (\partial\psi/\partial n_i)^2 \quad (1.1)$$

Здесь справа — предельные значения [нормальной производной на границе области Σ ; нормаль направлена в сторону потенциального течения.



Фиг. 1

Сформулируем следующую задачу. Необходимо определить функцию тока $\psi(x, y)$, гармоническую вне области Σ и удовлетворяющую уравнению $\nabla^2\psi = \text{sign } y$ внутри нее, при граничных условиях: а) на контуре L , подлежащем определению, $\psi_e = \psi_i = \psi(x, 0) = \text{const}$ и выполняется

условие (1.1) при заданной величине h ; б) на бесконечности $\partial\psi/\partial x = 0$, $\partial\psi/\partial y = V_\infty$, причем V_∞ также подлежит определению.

2. Пусть Σ — искомая область и пусть кривизна ее границы удовлетворяет условию Гельдера везде, за исключением малых областей, включающих точки A и B (фиг. 1). Функцию $\psi(x, y)$ будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 \quad (2.1)$$

Здесь ψ_0 — функция тока однородного потока со скоростью V_∞ , а ψ_1 — функция тока течения, индуцируемого вихрями из области Σ . Третье слагаемое в (2.1) введено для создания разрыва величины скорости на граничной линии тока и представляет собой логарифмический потенциал простого слоя (с гидродинамической точки зрения это слагаемое соответствует функции тока от вихревой пелены, распределенной вдоль границы L). Обозначим величину интенсивности вихревой пелены через $\Gamma(x)$, при этом слагаемые в (2.1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \psi_0 &= V_\infty y, \quad \psi_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \text{sign } \eta \ln r \, d\xi \, d\eta \\ \psi_2 &= \frac{1}{2\pi} \oint_L \Gamma(\xi) \text{sign } \eta \ln r \, dl, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\psi_1(x, y)$ — логарифмический потенциал площади, удовлетворяющий уравнениям Лапласа и $\nabla^2\psi_1 = \text{sign } y$ вне области Σ и внутри нее соответственно. Известно, что его первые производные (т. е. составляющие вектора скорости) непрерывны везде, в том числе и на границе.

Аналогично $\psi_2(x, y)$ — функция, непрерывная на границе L и гармоническая везде, за исключением точек контура. Предельные значения ее нормальной производной удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n_e} - \frac{\partial \psi_2}{\partial n_i} = \Gamma \operatorname{sign} y, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n_e} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n_i} = 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n_0} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n_0} \Big|_K = - \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{\Gamma(\xi) \cos \varphi_0 \operatorname{sign} \eta dl}{r} \quad (2.4)$$

Здесь φ_0 — угол между нормалью в точке K границы и радиус-вектором r , проведенным в точку интегрирования из точки K . Пользуясь соотношениями (2.1) и (2.3), для величины разрыва скорости на граничной линии тока имеем

$$V_e - V_i = [V] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \operatorname{sign} y = \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right] \operatorname{sign} y = \Gamma(x) \quad (2.5)$$

Так как первые производные логарифмических потенциалов площади и простого слоя равны нулю на бесконечности, то $\partial \psi / \partial x = 0$, $\partial \psi / \partial y = V_\infty$ при $(x, y) = \infty$. Таким образом, (2.1) и (2.2) дают решение поставленной задачи при условии, что будут определены контур L и интенсивность вихревой пелены $\Gamma(x)$, необходимая для удовлетворения условия (1.1).

Пусть область Σ обладает симметрией относительно оси X , тогда из (2.1) и (2.2) легко получить, что $\psi(x, 0) \equiv 0$, и поэтому граничная линия тока $y = f(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$yV_\infty + \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) = 0$$

После однократного интегрирования в $\psi_1(x, y)$ это интегральное уравнение приводится к виду

$$y = - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-1}^1 \left\{ 2(\xi - x) \left[\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arctg} \frac{\eta + y}{\xi - x} \right] - \right. \\ \left. - (\eta + y + \Gamma \sqrt{1 + \eta'^2}) \ln [(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2] \right\} d\xi - \\ - \frac{1}{4\pi V_\infty} \left\{ \int_{-1}^1 (\eta - y + \Gamma \sqrt{1 + \eta'^2}) \ln [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] d\xi - I \right\} \quad (2.6)$$

$$I = 2 \left\{ 2y - y \{ (1+x) \ln [(1+x)^2 + y^2] + (1-x) \ln [(1-x)^2 + y^2] \} - \right. \\ \left. - y^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{1+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{y} \right] - (1+x)^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x} - \right. \\ \left. - (1-x)^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right\}, \quad \eta' = \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

Здесь (ξ, η) и (x, y) — точки контура L , а выражение для V_∞ через $\Gamma(x)$ и $f(x)$ будет получено ниже.

Условие (1.1) на границе области преобразуем следующим образом. Из (1.1) и (2.5) имеем

$$\Gamma(x) = \frac{h}{V_i + V_e} = h \left(\frac{\partial \psi}{\partial n_i} + \frac{\partial \psi}{\partial n_e} \right)^{-1} \operatorname{sign} y$$

Далее

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} + \frac{\partial \psi}{\partial n_e} = 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial n} + 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n_e} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n_i} = 2 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial n} + \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n_0} \right)$$

Вычисляя $\partial \psi_0 / \partial n$ и $\partial \psi_1 / \partial n$ и используя (2.3) и (2.4), получаем окончательно

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} h \left| V_\infty \cos \alpha - \frac{1}{2\pi} \oint_L \text{sign } \eta \ln r \cos(n, n_0) dl + \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln [(\xi - x)^2 + y^2] d\xi - \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{\Gamma \cos \varphi_0 \text{sign } \eta dl}{r} \right|^{-1} \quad (2.7)$$

Здесь α — угол наклона касательной к контуру в точке (x, y) , n и n_0 — нормали к контуру в точках (ξ, η) и (x, y) .

Соотношения (2.6) и (2.7) представляют собой систему двух нелинейных интегральных уравнений для определения неизвестных $f(x)$ и $\Gamma(x)$.

3. Рассмотрим граничные условия, которым должны удовлетворять $f(x)$ и $\Gamma(x)$. При $h > 0$ (а только этот случай в дальнейшем и рассматривается) точки A и B (фиг. 1) будут для внутреннего течения критическими, причем наклон граничной линии тока в них должен быть равен нулю. (В противном случае эти точки были бы критическими и для внешнего течения, а это невозможно в силу непрерывности давления и различия предельных значений констант Бернулли на граничной линии тока). Итак, для $f(x)$ имеем

$$f(-1) = f(1) = f'(-1) = f'(1) = 0 \quad (f' = df/dx) \quad (3.1)$$

Аналогично, так как

$$V_e^2 - V_i^2 = h, \quad V_e - V_i = \Gamma$$

в критических точках A и B получается

$$\Gamma(-1) = \Gamma(1) = \sqrt{h} \quad (3.2)$$

Наконец, выражение для величины V_∞ через $f(x)$ и $\Gamma(x)$ можно получить следующим образом. Как показано в [7], в критических точках $V_e(-1, 0) = V_e(1, 0) = \sqrt{h}$, что следует из соотношения $V_e^2 - V_i^2 = h$. Далее для любой точки M , лежащей на оси X слева от точки A

$$u(M) = V_\infty + \partial \psi_1 / \partial y|_M + \partial \psi_2 / \partial y|_M$$

В пределе, когда точка M стремится вдоль оси X к точке A , $u(M) \rightarrow V_e(-1, 0) = \sqrt{h}$ и для V_∞ получаем

$$V_\infty = \sqrt{h} - \partial \psi_1 / \partial y - \partial \psi_2 / \partial y \quad \text{при } x = -1 - 0, \quad y = 0 \quad (3.3)$$

В силу непрерывности производной $\partial \psi_1 / \partial y$ вычисление ее не представляет труда

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Big|_A = - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln \left[1 + \left(\frac{\eta}{\xi + 1} \right)^2 \right] d\xi \quad (3.4)$$

Для определения $\partial\psi_2/\partial y$ при $x = -1 - 0$, $y = 0$ заметим, что

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y} \Big|_M = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\Gamma(\xi) \cos(R, y) dl}{R} \equiv I(\delta) \quad (3.5)$$

Здесь L_1 — верхняя часть контура L , а остальные обозначения показаны на фиг. 2.

Справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I(\delta) = I(0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\Gamma(\xi) \cos(r, y) dl}{r} \quad (3.6)$$

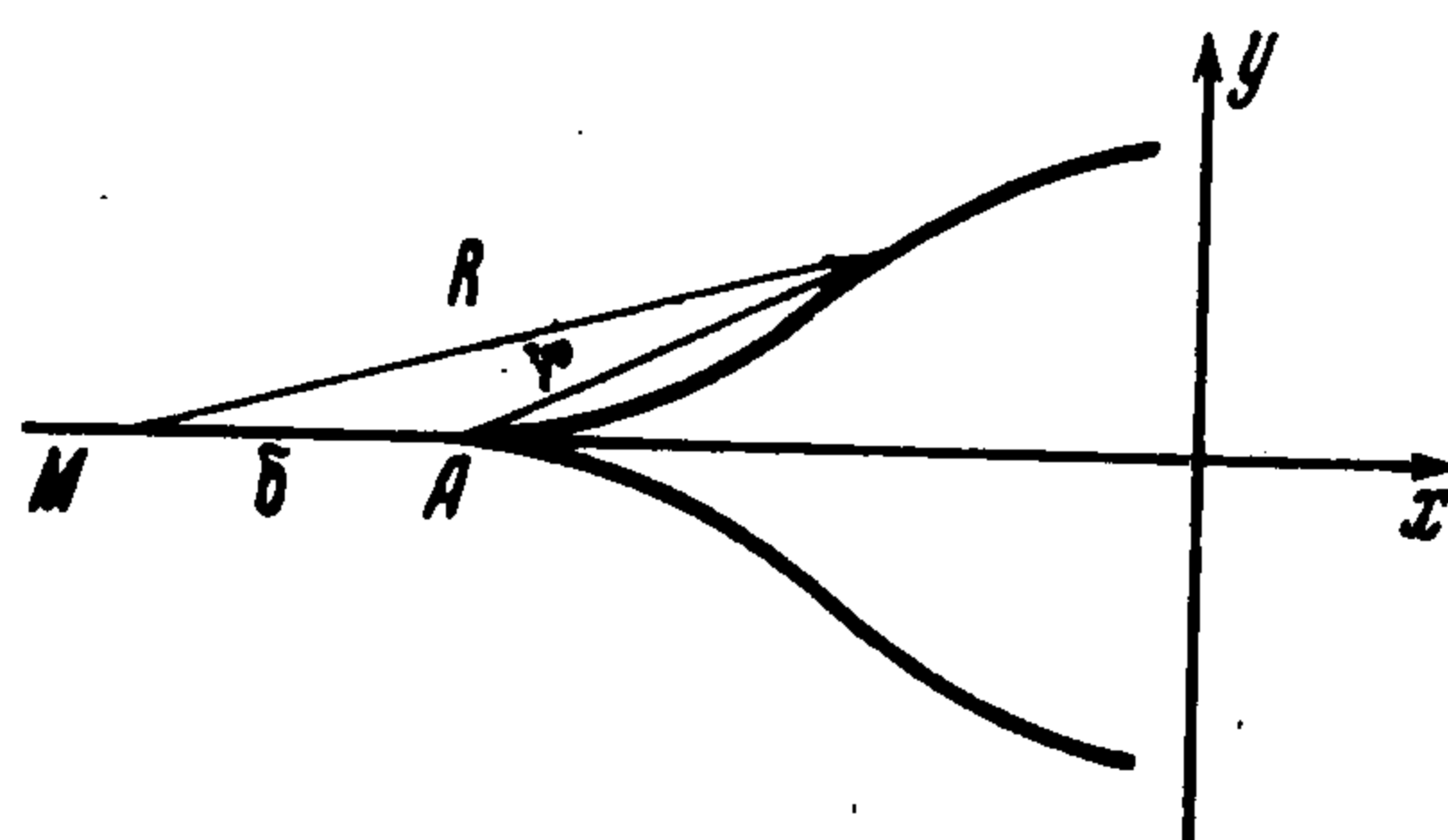
Для доказательства (3.6) оценим разность

$$I(\delta) - I(0) \leq \int_{\varepsilon} \Gamma \left| \frac{\cos(R, y)}{R} - \frac{\cos(r, y)}{r} \right| dl + \int_{L_1 - \varepsilon} \Gamma \left| \frac{\cos(R, y)}{R} - \frac{\cos(r, y)}{r} \right| dl \quad (3.7)$$

Здесь ε — достаточно малая, но фиксированная часть контура L_1 , включающая точку A . Интеграл в (3.7) по кривой $L_1 - \varepsilon$ при $\delta \rightarrow 0$ исчезает, так как его подынтегральная функция равномерно непрерывна в $L_1 - \varepsilon$ и можно переходить к пределу под знаком интеграла. Для оценки оставшегося интеграла заметим, что

$$\lim [r^{-1} \cos(r, y)] = 1/2 K_0 \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

Здесь K_0 — кривизна контура L_1 в точке A [9]. С учетом этого сделаем следующие оценки:



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} \Gamma(\xi) \left| \frac{\cos(R, y)}{R} - \frac{\cos(r, y)}{r} \right| dl &= \int_{\varepsilon} \Gamma \frac{\cos(r, y)}{r} \frac{R^2 - r^2}{R^2} dl \leq \\ &\leq M_0 \int_{\varepsilon} \frac{R^2 - r^2}{R^2} dl \leq M_0 \delta \int_{\varepsilon} \frac{R + r}{R^2} dl \leq 2M_0 \delta \int_0^{r_{\varepsilon}} \frac{dr}{\sqrt{\delta^2 + r^2}} \\ M_0 &= \max \left[\frac{\cos(r, y)}{r} \right] \quad \text{при } (\xi, \eta) \in \varepsilon \end{aligned}$$

После вычисления определенного интеграла получаем окончательно (при $\delta \rightarrow 0$)

$$\int_{\varepsilon} \Gamma \left| \frac{\cos(R, y)}{R} - \frac{\cos(r, y)}{r} \right| dl \leq 2M_0 \delta \ln \frac{r_{\varepsilon} + \sqrt{r_{\varepsilon}^2 + \delta^2}}{\delta} \rightarrow 0$$

Таким образом, соотношение (3.6) доказано.

Для V_{∞} после преобразований имеем

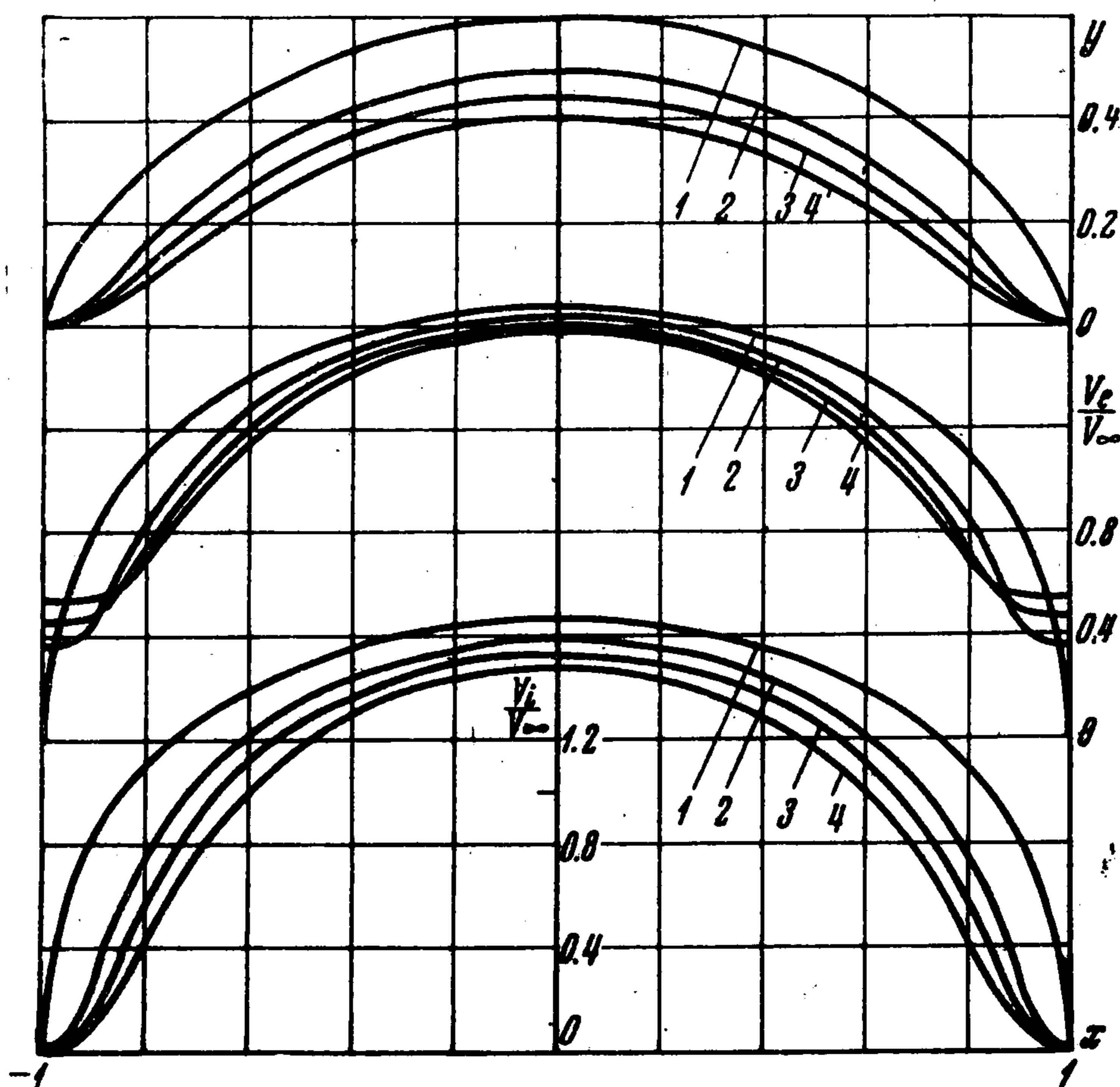
$$V_{\infty}' = \sqrt{h} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \ln \left[1 + \left(\frac{\eta}{\xi + 1} \right)^2 \right] + \frac{2\Gamma\eta \sqrt{1 + \eta'^2}}{(\xi + 1)^2 + \eta^2} \right\} d\xi \quad (3.8)$$

Отметим, что в подынтегральном выражении

$$\frac{\eta}{\xi + 1} \rightarrow 0, \quad \frac{\eta}{(\xi + 1)^2 + \eta^2} \rightarrow \frac{1}{2} K_0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -1 + 0$$

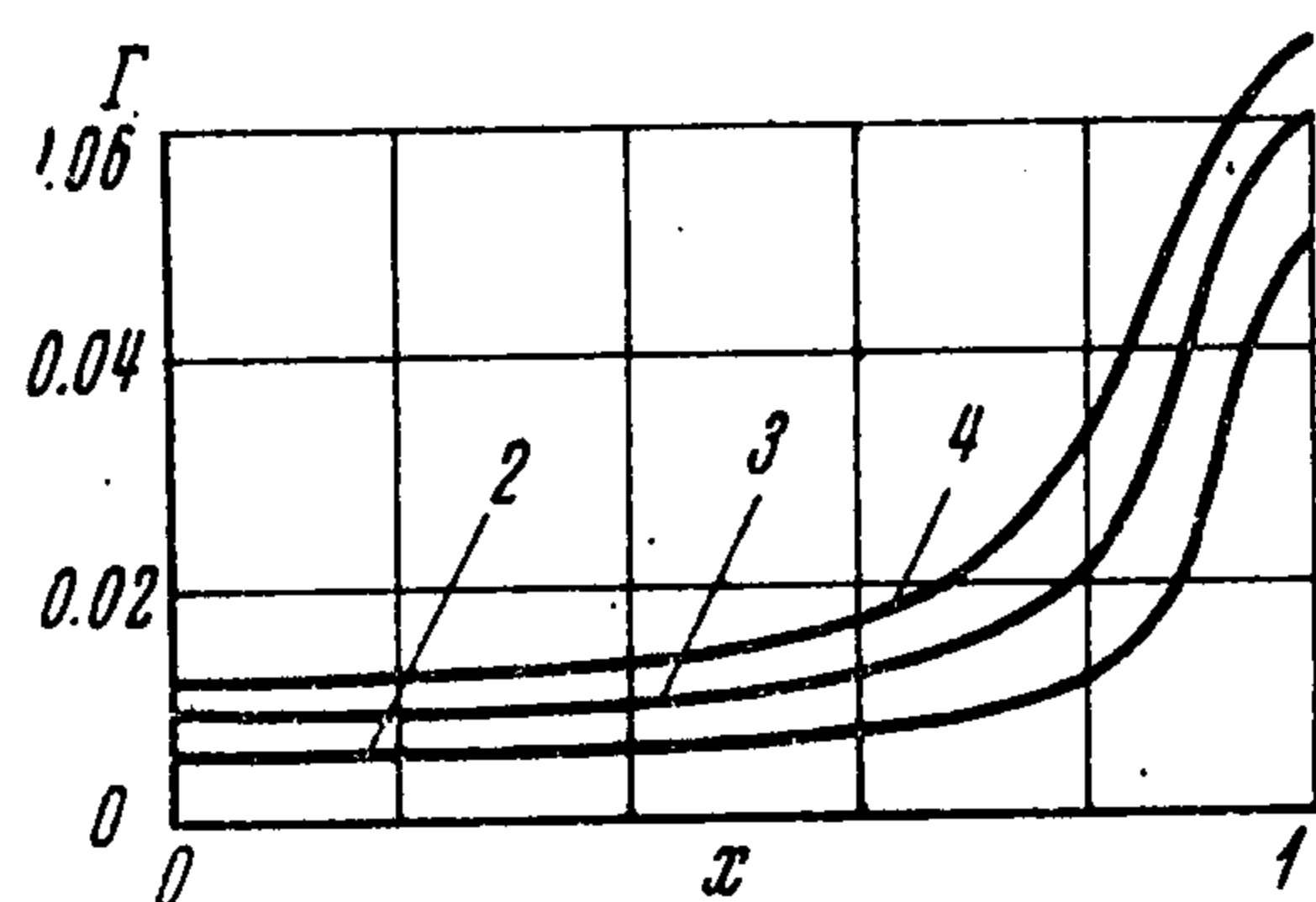
С учетом (3.8) система уравнений (2.6) — (2.7) содержит только две неизвестные функции $f(x)$ и $\Gamma(x)$, удовлетворяющие граничным условиям (3.1) и (3.2).

Доказать существование и единственность (или неединственность) решения этой системы аналитически не удается. В связи с этим система решалась численно на ЭВМ БЭСМ-6



Фиг. 3

методом последовательных приближений (именно этим обстоятельством объясняется столь специфический вид записи уравнений (2.6) и (2.7)). Необходимо отметить, что затраты машинного времени на расчет течения для одного значения h весьма значительны. Поэтому в данной работе приходится ограничиться приведением лишь отдельных расчетных данных.



Фиг. 4

На фиг. 3, 4 представлены линии тока $\psi = 0$ для верхней полуплоскости, а также распределение вихревой пелены $\Gamma(x)$ и величин скорости вдоль по контуру, вычисленные для нескольких значений h . Кривые 1 — 4 соответствуют значениям $10^3 h = 0, 2.5, 3.6, 4.4$; при этом величина вихря ω_0 , отнесенная к $2u_\infty / l$, где u_∞ — размерная скорость на бесконечности, оказалась равной 7.063, 7.400, 7.841, 8.263 соответственно. Данные при $h = 0$ взяты из работы [5].

Результаты расчетов показывают, что все кривые на фиг. 3, 4 в пределах точности расчетов симметричны относительно оси Y .

Автор благодарит Г. И. Таганова за ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Поступила 8 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 1, p. 4.
2. Таганов Г. И. К теории стационарных срывных зон. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 5.
3. Гольдштиг М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. *Докл. АН СССР*, 1962, т. 147, № 6.
4. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание. *Докл. АН СССР*, 1963, т. 150, № 6.
5. Садовский В. С. Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке. *Уч. зап. ЦАГИ*, 1970, т. 1, № 4.
6. Садовский В. С. О некоторых свойствах вихревого и потенциального течений, граничащих на замкнутой жидкой линии тока. *Уч. зап. ЦАГИ*, 1971, т. 2, № 1.
7. Таганов Г. И. О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при $R \rightarrow \infty$. *Уч. зап. ЦАГИ*, 1970, т. 1, № 3.
8. Childress S. Solution of Euler's Equations containing Finite Eddies. *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, No. 5.
9. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М., «Высшая школа», 1964.