15. Бронский А. П. Явление последействия в твердом теле. ПММ, 1941, т. 5, вып. 1.
16. Слонимский Г. Л. О законе деформации реальных материалов, I. Ж. техн. физ., 1939, т. 9, № 20.
17. Колтунов М. А. Функции влияния в теории оболочек с наследственными свойствами. Сб. «Исслед. по теории пластин и оболочек», сб. 5, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1967.
18. Громов В. Г., Калинин В. А., Степаненко Ю. П., Шляфман Е. М. Об аппроксимации экспериментальных данных по испытаниям вязко-упругих свойств полимерных материалов. В кн.: Аннот. докл. III Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., М., «Наука», 1968.
19. Степаненко Ю. П. Вопросы экспериментального исследования вязко-упругих свойств полимеров. Тр. Ростовск. ин-та инж. ж-д. трансп., М., «Транспорт», 1967, вып. 69.

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ОБЛАСТЕЙ

Г. А. Гринберг, В. А. Косс

(Ленинград)

1. Применим метод, изложенный в работе [1], к решению первой краевой задачи для пространственного уравнения Фурье в декартовых координатах

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + f(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

определенного в области, ограниченной координатными плоскостями, движущимися по некоторым законам $R_i^{(0)}(t)$ и $R_i^{(1)}(t)$ так, что

$$x_i \in (R_i^{(0)}(t), R_i^{(1)}(t)) \qquad (i \text{ — номер координатной оси})$$

Предполагая относительно функций $R_i^{(0)}$ и $R_i^{(1)}$, что они обладают непрерывными производными до второго порядка включительно, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} + \frac{1}{4}(\eta_i^3 \eta_i^{\cdot\cdot} y_i^2 + 2\eta_i^3 R_i^{(0)\cdot\cdot} y_i) V\right] = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f}{q} \tag{1.2}$$

$$U = q(y_1, \ldots, y_n, t) V(y_1, \ldots, y_n, t), \qquad y_i = \frac{x_i - R_i^{(0)}}{\eta_i} \qquad (\eta_i = R_i^{(1)} - R_i^{(0)}) \tag{1.3}$$

$$q = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\eta_i}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\eta_i \eta_i^{\cdot} y_i^2 + 2\eta_i R_i^{(0)\cdot} y_i + \int (R_i^{(0)\cdot})^2 dt\right)\right], \qquad y_i \in (0, 1)$$

Уравнение (1.2) допускает точное решение в известных функциях, если для всех i одновременно выполняются условия

$$\eta_i^3 \eta_i^{\cdot\cdot} = \text{const}, \qquad \eta_i^3 R_i^{(0)\cdot\cdot} = \text{const}$$

если

$$(1) \qquad \eta_i = \text{const}, \qquad R_i^{(0)} = M_i t^2 + A_i t + B_i \tag{1.4}$$

или

$$(2) \qquad \eta_i = \sqrt{M_i t^2 + A_i t + B_i}, \qquad R_i^{(0)} = C_i \sqrt{M_i t^2 + A_i t + B_i} + D_i t + E_i \tag{1.5}$$

или

$$(3) \qquad \eta_i = A_i t + B_i, \qquad R_i^{(0)} = \frac{C_i}{A_i t + B_i} + D_i t + E_i \tag{1.6}$$

Здесь A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, M_i — постоянные, зависящие от индекса i.

В работах [1–3] получены частные случаи типов движения (1.4) и (1.5).

2. Если область задана в цилиндрической системе координат и ограничена по оси z плоскостями, а по радиусу r — поверхностями, перемещающимися по законам

$$z = R_3^{(0)}(t), \quad z = R_3^{(1)}(t); \qquad r = R_1(t), \quad r = R_2(t) \equiv \alpha R_1(t) \quad (\alpha = \mathrm{const})$$

то указанный метод переводит уравнение Фурье относительно искомой функции U в следующее уравнение относительно новой функции V:

$$\frac{1}{R_1^2}\left[\frac{1}{y_1}\frac{\partial}{\partial y_1} y_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{1}{4} y_1^2 R_1^3 R_1^{\cdot\cdot} V + \frac{1}{y_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\eta^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_3^2} + \frac{1}{4}(\eta^3\eta^{\cdot\cdot} y_3^2 + 2\eta^3 R_3^{(0)\cdot\cdot} y_3) V\right] = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f(y_1 R_1, \varphi, y_3\eta, t)}{q} \tag{2.1}$$

Здесь

$$U = q(y_1, y_3, t)\, V(y_1, \varphi, y_3, t) \tag{2.2}$$

$$y_1 = \frac{r}{R_1} \quad (y_1 \in (\alpha, 1)), \qquad y_3 = \frac{x_3 - R_3^{(0)}}{\eta} \quad (\eta = R_3^{(1)} - R_3^{(0)})$$

$$q = \frac{1}{R_1\sqrt{\eta}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(y_1^2 R_1 R_1^{\cdot} + \eta\eta^{\cdot} y_3^2 + 2\eta R_3^{(0)\cdot} y_3 + \int (R_3^{(0)\cdot})^2 dt\right)\right]$$

Уравнение (2.1) допускает точное решение в известных функциях, если одновременно имеют место условия

$$R_1^3 R_1^{\cdot\cdot} = \mathrm{const}, \qquad \eta^3\eta^{\cdot\cdot} = \mathrm{const}, \qquad \eta^3 R_3^{(0)\cdot\cdot} = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

при

$$R_1 = \sqrt{M_1 t^2 + A_1 t + B_1}, \qquad R_2 = \alpha R_1 \qquad (\alpha,\ A_1,\ B_1,\ M_1 = \mathrm{const}) \tag{2.4}$$

а $R_3^{(0)}$ и $R_3^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям движения вида (1.4) — (1.6).

Отметим, что к числу указанных выше областей относятся, в частности, следующие:

а) параллелепипед, одна пара параллельных граней которого движется в направлении своей оси по закону (1.4), другая — по закону (1.5) и третья — по закону (1.6);

б) ограниченный полый цилиндр, боковые поверхности которого перемещаются по законам (2.4), а торцы — по любому из законов (1.4), (1.5) или (1.6).

3. Очевидно, что в том случае, когда область представляет собой сферически симметричный слой, ограниченный сферическими поверхностями, уравнения движения которых совпадают с одним из уравнений (1.4), (1.5) или (1.6), применение этой же методики позволяет получить точное решение исходной задачи в сферических координатах, так как подстановкой $W = U/r$ (r — координата, W — новая функция) уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial t} + f(r, t)$$

переходит в рассмотренное уравнение (1.1).

Поступила 11 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Гринберг Г. А., Косс В. А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей, форма которых меняется со временем без соблюдения подобия. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. Гринберг Г. А. О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри бесконечной или конечной области движущимися поверхностями, на которых задан временно́й ход температуры или концентрации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.