где f_i — детерминированный вектор поверхностных сил. Подставляя определяющий закон (2.26) с учетом $\langle\varepsilon_{ij}\rangle = {}^1/_2\,(\partial_j\langle u_j\rangle + \partial_j\langle u_i\rangle)$ в уравнение (1.5), получаем систему трех интегро-дифференциальных уравнений для определения вектора $\langle u_i\rangle$.

Представляет интерес приближенная постановка задачи, заключающаяся в том, что интегральный оператор в (2.26) заменяется дифференциальным (2.23) с удержанием в последнем конечного числа членов. Такая замена приводит к системе дифференциальных уравнений относительно $\langle u_i\rangle$, имеющих порядок $2(1+\mu)$, где μ — количество удержанных в (2.23) членов. Однако вопрос о приближенной постановке граничных задач остается открытым и требует дополнительного исследования.

Автор благодарит В. В. Новожилова за постоянное внимание к работе.

Поступила 15 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11.
2. Kröner E. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials. J. Mech. Phys., Solids, 1967, vol. 15, No. 5.
3. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
4. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
5. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Вычисление эффективных упругих модулей композитных материалов с учетом многочастичных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
6. Новожилов В. В. О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистически изотропных однородных упругих телах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
7. Green A. E., Rivlin R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, No. 2.
8. Kröner E. Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces. Internat. J. Solids Structures, 1967, vol. 3, No. 5 (Рус. пер. Теория упругости материалов с дальнодействующими силами связности. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1968, № 3.).
9. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Корреляционные функции упругого поля квазиизотропных твердых тел. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ФУНКЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРОВ

В. Г. Громов

(Ростов-на-Дону)

Получено общее представление резольвенты через приведенную функцию распределения вязко-упругого спектра исходного ядра. Метод иллюстрируется на широко распространенных операторах вязкоупругости. Строятся резольвенты для обобщенного дробно-экспоненциального и логарифмических ядер.

Вязко-упругое поведение реальных тел (в частности, полимерные материалы) описывается [1–3] и др. уравнениями, содержащими оператор Вольтерра

$$P^*(\cdots) = \int_0^t P(t-\tau)(\cdots)\,d\tau \tag{0.1}$$

где $P(t)$ — ядро оператора. Если $I - \varkappa P^*$, $-\infty < \varkappa < \infty$ — полный оператор вязкоупругости, то оператор

$$(I - \varkappa P^*)^{-1} = I + \varkappa R_\varkappa^* \tag{0.2}$$

называют обратным, а $R_\varkappa^*$ — резольвентным для P^*, при этом ядро $R_\varkappa(t)$ является резольвентой для $P(t)$. Общие вопросы, связанные с обратимостью (0.2), хорошо разработаны, речь может идти только о фактическом построении обратного оператора.

Возможность явного построения резольвенты по заданному ядру имеет существенное значение в теории вязкоупругости [3]. С этим фактом до последнего времени связывалось [4, 5] построение алгебры операторов Вольтерра (в связи с решением граничных задач). Хотя, как выяснилось [6, 7], в этом нет необходимости, тем не менее вопрос о построении резольвенты по-прежнему остается не беспредметным.

Применительно к оператору (0.1) существуют два классических способа построения резольвенты: символический метод Вольтерра и методы операционного исчисления. Первый, основан на формальном разложении (0.2) в ряд по степеням параметра $\varkappa$. Тогда

$$R_\varkappa^* = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^{n-1} P^{*n} \tag{0.3}$$

Этот ряд называется рядом Неймана для оператора $R_\varkappa^*$. Здесь под n-й степенью оператора P^* понимается новый оператор, ядро которого итерировано $n-1$ раз [8]

$$P^{*n}(\cdots) = \int_0^t P_n(t-\tau)(\cdots)\,d\tau, \qquad P_n(t-\tau) = \int_\tau^t P_{n-1}(t-s)\,P(s-\tau)\,ds \tag{0.4}$$

При конкретных построениях возникают две трудности: вычисление интегралов при повторном интегрировании и получение общего члена ряда (0.3). За редким исключением эти трудности оказываются непреодолимыми. Метод операционного исчисления состоит в интегральном преобразовании операторов P^* и $R_\varkappa^*$. Поскольку в данном случае они являются операторами типа свертки [9], то, обозначая через $P^\circ(p)$ и $R_\varkappa^\circ(p)$ их функциональные образы по Лапласу, операторное тождество (0.2) переводим в функциональное

$$[1 - \varkappa P^\circ(p)]\,[1 + \varkappa R_\varkappa^\circ(p)] = 1 \tag{0.5}$$

Отсюда

$$R_\varkappa^\circ(p) = \frac{P^\circ(p)}{1 - \varkappa P^\circ(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^{n-1} P^{\circ n}(p) \tag{0.6}$$

Построение резольвенты сводится к обращению (0.6). Даже в рамках хорошо развитых методов [9], задача обращения часто остается практически неразрешимой. Больше того, существуют случаи, когда не только задача обращения, но уже явное построение функционального образа $P^\circ(p)$ оператора наталкивается на известные трудности.

§ 1. Метод функций распределения. Класс операторов вязкоупругости характеризуется тем, что каждому из них можно поставить в соответствие неотрицательный спектр (непрерывный или дискретный) с положительной функцией распределения. В зависимости от смысла оператора этими спектрами являются спектр релаксации либо спектр запаздывания [1–3] и др. Считая в (0.2), например, $\varkappa > 0$, оператор P^* будет оператором релаксации, а $R_\varkappa^*$ — оператором запаздывания (ползучести). Значения соответствующих полных операторов на единичной функции будут функциями релаксации $\varphi(t)$ и ползучести $\psi_\varkappa(t)$. Известны [1, 3] и др. представления этих функций через вязко-упругие спектры

$$\varphi(t) = \int_0^\infty H(\gamma)\, e^{-t/\gamma}\, d\gamma, \qquad \psi_\varkappa(t) = \int_0^\infty Q_\varkappa(\gamma)\,(1 - e^{-t/\gamma})\, d\gamma \tag{1.1}$$

Здесь $H(\gamma)$, $Q_\varkappa(\gamma)$ — функции распределения спектров времен релаксации и запаздывания. Эти функции не подлежат прямому измерению в эксперименте, поэтому используются в основном для теоретических интерпретаций свойств вязкоупругости [10–12]. Однако имеется возможность их применения в вопросе построения резольвент.

По определению функций релаксации и ползучести имеем

$$P(t) = -\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varphi}{dt}, \qquad R_\varkappa(t) = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\psi_\varkappa}{dt} \tag{1.2}$$

Опираясь на представление (1.1), из (1.2) получаем спектральные представления для ядра и резольвенты

$$P(t) = \frac{1}{\varkappa}\int_0^\infty h(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda, \qquad R_\varkappa(t) = \frac{1}{\varkappa}\int_0^\infty q_\varkappa(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda \tag{1.3}$$

Здесь приведенные функции распределения

$$h(\lambda) = \lambda^{-1}H(\lambda^{-1}), \qquad q_\varkappa(\lambda) = \lambda^{-1}Q(\lambda^{-1}), \qquad \lambda = \gamma^{-1} \tag{1.4}$$

строятся из основных через преобразование инверсии.

Заметим, что представление (1.3) является частным случаем представления Бохнера для положительно определенных функций [13]. Идея метода функций распределения состоит в том, что построение резольвенты $R_\varkappa(t)$ по заданному ядру $P(t)$ посредством (1.3) сводится к построению приведенной функции распределения $q_\varkappa(\lambda)$.

Рассмотрим функциональные образы $P^\circ(p)$ и $R_\varkappa^\circ(p)$ операторов P^* и $R_\varkappa^*$. Опираясь на представления (1.3), легко показать, что

$$P^\circ(p) = \frac{1}{\varkappa}\int_0^\infty \frac{h(\lambda)}{p+\lambda}d\lambda, \qquad R_\varkappa^\circ(p) = \frac{1}{\varkappa}\int_0^\infty \frac{q_\varkappa(\lambda)}{p+\lambda}d\lambda \tag{1.5}$$

В силу интегрируемости $h(\lambda)$ и $q(\lambda)$ функции $P^\circ(p)$ и $R_\varkappa^\circ(p)$ определены и непрерывны во всей плоскости комплексного переменного $p = \alpha + i\beta$, кроме точек, лежащих на отрицательной части действительной оси: $p = -\alpha$, $\alpha > 0$. Вычислим предел функции в этих точках. Для простоты рассмотрим случай, когда стремление в точку происходит параллельно мнимой оси. Например

$$\lim_{p\to-\alpha} P^\circ(p) = \lim_{\beta\to0} P^\circ(\alpha \pm i\beta) \tag{1.6}$$

Верхний знак соответствует стремлению на действительную ось из верхней, нижний — из нижней полуплоскости. Далее находим

$$\varkappa P^\circ(-\alpha \pm i\beta) = \int_0^\infty \frac{\lambda-\alpha}{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2}h(\lambda)\,d\lambda \mp i\int_0^\infty \frac{\beta}{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2}h(\lambda)\,d\lambda \tag{1.7}$$

Известно, что

$$\lim_{\beta\to0}\frac{\beta}{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2} = \pi\delta(\lambda-\alpha), \quad \delta(x) - \text{дельта-функция} \tag{1.8}$$

Поэтому из (1.7) при $\beta \to 0$ получим

$$\varkappa P_\pm^\circ(-\alpha) = \int_0^\infty \frac{h(\lambda)}{\lambda-\alpha}d\lambda \mp i\pi h(\alpha) \tag{1.9}$$

Здесь $P_+^\circ(-\alpha)$ и $P_-^\circ(-\alpha)$ означают соответственно предел из верхней и нижней полуплоскостей. Из (1.9) следует, что при переходе через отрицательную часть действительной оси функция $P^\circ(p)$ терпит скачок

$$\Delta P^\circ(-\alpha) = P_+^\circ(-\alpha) - P_-^\circ(-\alpha) = -2\pi i\varkappa^{-1}h(\alpha) \tag{1.10}$$

величина которого (с точностью до множителя) определяется функцией распределения

$h(\alpha)$. Это позволяет элементарным способом находить функцию $h(\alpha)$ по заданному ядру $P(t)$

$$h(\alpha) = -\frac{\varkappa}{2\pi i} \Delta P_0(-\alpha) \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) можно упростить. Полагая

$$P^\circ_\pm(-\alpha) = \operatorname{Re} P^\circ_\pm(-\alpha) + i \operatorname{Im} P^\circ_\pm(-\alpha) \tag{1.12}$$

из (1.9) имеем

$$\operatorname{Re} P^\circ_+(-\alpha) = \operatorname{Re} P^\circ_-(-\alpha), \qquad \operatorname{Im} P^\circ_+(-\alpha) = -\operatorname{Im} P^\circ_-(-\alpha) \tag{1.13}$$

Тогда

$$\Delta P^\circ(-\alpha) = \pm 2i \operatorname{Im} P^\circ_\pm(-\alpha) \tag{1.14}$$

Отсюда

$$h(\alpha) = \mp \frac{\varkappa}{\pi} \operatorname{Im} P^\circ_\pm(-\alpha) \tag{1.15}$$

Здесь должно соблюдаться соответствие верхних и нижних знаков. Совершенно аналогично устанавливается, что

$$\varkappa R^\circ_{\varkappa\pm}(-\alpha) = \int_0^\infty \frac{q_\varkappa(\lambda)}{\lambda-\alpha} d\lambda \mp i\pi q_\varkappa(\alpha), \qquad q_\varkappa(\alpha) = -\frac{\varkappa}{\pi} \operatorname{Im} R^\circ_{\varkappa-}(-\alpha) \tag{1.16}$$

Несобственные интегралы в (1.9) и (1.16) понимаются в смысле их главных значений.

Ядро $P(t)$ и резольвента $R_\varkappa(t)$ связаны функциональным тождеством [8], являющимся следствием операторного тождества (0.2). Из этого следует, что приведенные функции распределения $h(\alpha)$ и $q_\varkappa(\alpha)$ так же должны быть подчинены определенной связи. Проще всего эту связь получить из равенства (0.5) после предельного перехода на отрицательную часть действительной оси. Используя предельные значения $P^\circ_\pm(-\alpha)$ и $R^\circ_{\varkappa\pm}(-\alpha)$, получаем

$$J_1 J_2 + J_1 - J_2 + \pi^2 h q_\varkappa = 0, \qquad -J_1 q_\varkappa - J_2 h + q_\varkappa - h = 0 \tag{1.17}$$

Здесь через J_1 и J_2 обозначены несобственные интегралы соответственно в (1.9) и (1.16). Эти равенства служат для выражения одной функции распределения через другую. Например, считая неизвестными $q_\varkappa$ и J_2, для их определения имеем систему

$$(1-J_1)J_2 + \pi^2 h q_\varkappa = J_1, \qquad -hJ_2 + (1-J_1)q_\varkappa = h \tag{1.18}$$

Отсюда

$$q_\varkappa(\alpha) = h(\alpha)\left\{\left[1 - \int_0^\infty \frac{h(\lambda)}{\lambda-\alpha} d\lambda\right]^2 + \pi^2 h^2(\alpha)\right\}^{-1} \tag{1.19}$$

Записывая (1.17) в виде системы относительно h и J_1, аналогично предыдущему получаем

$$h(\alpha) = q_\varkappa(\alpha)\left\{\left[1 + \int_0^\infty \frac{q_\varkappa(\lambda)}{\lambda-\alpha} d\lambda\right]^2 + \pi^2 q_\varkappa^2(\alpha)\right\}^{-1} \tag{1.20}$$

Соотношения (1.19) и (1.20) позволяют по одной известной функции распределения находить другую. По своему смыслу они аналогичны классическим соотношениям для пересчета спектров релаксации и запаздывания [1, 10].

Теперь имеется все необходимое, чтобы наметить схему построения резольвенты. По заданному ядру $P(t)$ находим приведенную функцию распределения $h(\alpha)$. В зависимости от условий задания $P(t)$, здесь могут быть использованы соотношения (1.15), либо (1.1) — (1.3). По (1.15) это делается посредством вычисления мнимой части $P^\circ(p)$ на отрицательной части действительной оси. В зависимости от того, какой берется аргумент (π или $-\pi$) выбирается знак, причем под $P^\circ(p)$ нужно понимать аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного p — обычного преобразования Лапласа от ядра $P(t)$. Функция распределения $q_\varkappa(\alpha)$ находится из (1.19). После этого резольвента $R_\varkappa(t)$ представляется посредством (1.3).

Все перечисленные операции носят сравнительно элементарный характер и, что самое важное, представляются в явном виде. Это значительно облегчает как аналитическое построение резольвенты, так и ее численный анализ.

§ 2. **Приложения метода.** Проиллюстрируем приведенную выше методику на распространенных операторах вязкоупругости. Одновременно построим резольвенты, не найденные до настоящего времени. Начнем с простейшего случая.

1°. *Экспоненциальный оператор.* Пусть

$$P^*(\cdots) = Э^*(\cdots) = \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}(\cdots)\,d\tau \quad \text{или} \quad P(t) = e^{-\mu t}, \quad \mu > 0 \tag{2.1}$$

Находим

$$Э^\circ(p) = \frac{1}{p+\mu}, \qquad \operatorname{Im}\frac{1}{-\alpha+\mu} = 0 \tag{2.2}$$

Последнее означает, что спектр оператора дискретный. Из (1.3) следует

$$e^{-\mu t} = \frac{1}{\varkappa}\int_0^\infty h(\lambda)\,e^{-\lambda t}\,d\lambda, \qquad h(\lambda) = \varkappa\delta(\lambda-\mu) \tag{2.4}$$

Здесь $\lambda = \mu$ — точка спектра. Далее

$$q_\varkappa(\alpha) = \frac{\varkappa\delta(\alpha-\mu)}{[1-\varkappa/\mu-\alpha]^2 + \pi^2\varkappa^2\delta^2(\alpha-\mu)} = \varkappa\delta[\alpha-(\mu-\varkappa)] \tag{2.5}$$

так как (2.5), подобно (1.8), представимо [1] пределом

$$q_\varkappa(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{M^2(\alpha)+\varepsilon^2} = \frac{\delta(\alpha-\alpha_*)}{|M'(\alpha_*)|}, \qquad M(\alpha_*) = 0 \tag{2.6}$$

$$M(\alpha) = 1 - \frac{\varkappa}{\mu-\alpha}, \qquad |M'(\alpha_*)| = \frac{1}{\varkappa}, \qquad \alpha_* = \mu - \varkappa \tag{2.7}$$

Резольвента имеет вид

$$R_\varkappa(t) = \int_0^\infty \delta[\lambda-(\mu-\varkappa)]\,e^{-\lambda t}\,d\lambda = e^{-(\mu-\varkappa)t} \tag{2.8}$$

Нетрудно убедиться, что тот же результат получается путем прямого обращения оператора $Э^*(\cdots)$.

2°. *Обобщенный дробно-экспоненциальный оператор.* Рассмотрим оператор вида

$$P^*(\cdots) = E^*(\cdots) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}e^{-\mu(t-\tau)}(\cdots)\,d\tau \qquad (0<\nu\leqslant 1) \tag{2.9}$$

Находим

$$E^\circ(p) = \frac{1}{(p+\mu)^\nu}, \qquad \operatorname{Im} E_+^\bullet(-\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha<\mu \\ -\dfrac{\sin\pi\nu}{(\alpha-\mu)^\nu}, & \alpha>\mu \end{cases} \tag{2.10}$$

Отсюда и из (1.15) следует, что

$$h(\alpha) = 0 \quad (\alpha<\mu), \qquad h(\alpha) = \varkappa\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\frac{1}{(\alpha-\mu)^\nu} \quad (\alpha>\mu) \tag{2.11}$$

т. е. доумножение ядра Абеля на экспоненту соответствует простому сдвигу спектра. Для определения $q_\varkappa(\alpha)$ воспользуемся известным [14] интегралом

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{x+a}\,dx = \begin{cases} \pi a^{-\nu}\csc(1-\nu)\pi & (a>0) \\ -\pi a^{-\nu}\operatorname{ctg}(1-\nu)\pi & (a<0) \end{cases} \tag{2.12}$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{h(\lambda)}{\lambda-\alpha}\,d\lambda = \frac{\varkappa \sin \pi\nu}{\pi}\int_\mu^\infty \frac{(\lambda-\mu)^{-\nu}}{\lambda-\alpha}\,d\lambda = \frac{\varkappa \sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\gamma^{-\nu}d\gamma}{\gamma+\mu-\alpha} = \frac{\varkappa\cos\pi\nu}{(\alpha-\mu)^\nu} \tag{2.13}$$

Подставляя (2.11) и (2.13) в (1.16), получаем

$$q_\varkappa(\alpha) = \begin{cases} 0, & (\alpha<\mu) \\ \pi^{-1}\varkappa(\alpha-\mu)^\nu \sin\pi\nu\,[(\alpha-\mu)^{2\nu} - 2\varkappa(\alpha-\mu)^\nu\cos\pi\nu + \varkappa^2]^{-1}, & (\alpha>\mu) \end{cases} \tag{2.14}$$

Из (1.3) следует представление для резольвенты

$$R_\varkappa(t) = \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_\mu^\infty \frac{(\lambda-\mu)^\nu e^{-\lambda t}}{(\lambda-\mu)^{2\nu} - 2\varkappa(\lambda-\mu)^\nu\cos\pi\nu + \varkappa^2}\,d\lambda \tag{2.15}$$

Чтобы получить неймановское разложение, нужно подынтегральное выражение представить рядом по степеням $\varkappa$. Обозначая $\lambda-\mu=\rho$, находим

$$q_\varkappa(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\rho_1}{\rho-\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho^\nu-\rho_2}\right) \tag{2.16}$$

Здесь $\rho_1 = \varkappa e^{i\pi\nu}$, $\rho_2 = \varkappa e^{-i\pi\nu}$ — корни знаменателя. Учитывая это в (2.16), получаем

$$q_\varkappa(\rho) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\rho^\nu}{\varkappa}\right)^n \sin n\pi\nu, \qquad \rho<|\varkappa|^{1/\nu}$$

$$q_\varkappa(\rho) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\varkappa}{\rho^\nu}\right)^n \sin n\pi\nu, \qquad \rho>|\varkappa|^{1/\nu} \tag{2.17}$$

Интеграл

$$\int_0^\infty q_\varkappa(\rho)\,e^{-\rho t}\,d\rho = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \varkappa^n t^{n\nu-1}\Gamma(1-n\nu)\sin n\pi\nu \tag{2.18}$$

Поэтому, из (2.15) имеем

$$R_\varkappa(t) = e^{-\mu t}\mathrm{Э}_\nu(\varkappa, t) \tag{2.19}$$

Здесь $\mathrm{Э}_\nu$ — экспонента дробного порядка [4, 5].

3°. *Оператор Бронского — Слонимского.* Дальнейшим обобщением экспоненциального оператора является оператор

$$P^*(\cdots) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}e^{-\mu(t-\tau)^\gamma}(\cdots)\,d\tau, \qquad \gamma>0 \tag{2.20}$$

Степень в показателе экспоненты существенно осложняет вычисления. Здесь уже не существует единого аналитического выражения для функционального образа $P^\circ(p)$ во всей p-плоскости. Действительно, представляя экспоненту рядом, находим

$$P^\circ(p) = \frac{1}{p^\nu}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\Gamma(n\gamma+\nu)}{\Gamma(\nu)\,n!}\left(\frac{\mu}{p\gamma}\right)^n \tag{2.21}$$

причем ряд сходится при $|p|>\mu^{1/\gamma}$, т. е. вне круга радиусом $\mu^{1/\gamma}$. Аналитическое продолжение $P^\circ(p)$ внутрь круга строим исходя из интегрального представления (по определению)

$$P^\circ(p) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-\mu t^\gamma}e^{-pt}\,dt \tag{2.22}$$

Разлагая (3.22) в ряд по степеням p в окрестности нулевой точки, получаем

$$P^\circ(p) = \frac{1}{\gamma\mu^{1/\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu)\, n!} \Gamma\left(\frac{\nu+n}{\gamma}\right)\left(\frac{p}{\mu^{1/\gamma}}\right)^n \tag{2.23}$$

с областью сходимости $|p| < \mu^{1/\gamma}$. Итак, соотношения (2.21) и (2.22) дают аналитическое выражение для $P^\circ(p)$ во всех точках p-плоскости, кроме точек промежутка $(-\infty, -\mu^{1/\gamma}]$, принадлежащего отрицательной части действительной оси. Отсюда находим

$$\operatorname{Im} P_+{}^\circ(-\alpha) = 0, \qquad 0 < \alpha < \mu^{1/\gamma}$$

$$\operatorname{Im} P_+{}^\circ(-\alpha) = -\frac{1}{\alpha^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n\gamma+\nu)\sin(n\gamma+\nu)\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} \left(\frac{\mu}{\alpha^\gamma}\right)^n, \quad \alpha > \mu^{1/\gamma} \tag{2.24}$$

Теперь по (1.15) имеем

$$h(\alpha) = 0, \qquad 0 < \alpha < \mu^{1/\gamma}$$

$$h(\alpha) = \frac{\varkappa}{\pi\alpha^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\theta_n)\sin\theta_n\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} \left(\frac{\mu}{\alpha^\gamma}\right)^n, \qquad \alpha > \mu^{1/\gamma}, \quad \theta_n = \gamma n + \nu \tag{2.25}$$

Далее

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{h(\lambda)}{\lambda - \alpha} d\lambda = \frac{\varkappa}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu)^n \frac{\Gamma(\theta_n)\sin\theta_n\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} J_n \tag{2.26}$$

$$J_n = \int_{\mu^{1/\gamma}}^{\infty} \frac{\lambda^{-\theta_n}}{\lambda - \alpha} d\lambda = \int_0^\infty \frac{(x+\mu^{1/\gamma})^{-\theta_n}}{x - (\alpha - \mu^{1/\gamma})} dx \tag{2.27}$$

Воспользуемся табличным интегралом [14]

$$\int_0^\infty \frac{(x+a)^{1-s}}{x-c} dx = \frac{\pi(a+c)^{1-s}}{\operatorname{tg}(s-1)\pi} - \frac{a^{2-s}}{a+c} \mathrm{B}(s-2,1)\, F\left(2-s,\ 1;\ 3-s;\ \frac{a}{a+c}\right) \tag{2.28}$$

$$a > 0, \quad c > 0, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Здесь B — бета-функция, F — гипергеометрическая функция. Тогда из (2.27) получаем

$$J_n = a^{-\theta_n}[\pi \operatorname{ctg}\theta_n\pi - (\alpha/\mu^{1/\gamma})^{\theta_n - 1} A_n], \qquad \alpha > \mu^{1/\gamma} \tag{2.29}$$

$$A_n = \mathrm{B}(\theta_n - 1, 1)\, F(1, 1-\theta_n;\ 2-\theta_n;\ z), \qquad z = \alpha^{-1}\mu^{1/\gamma} \tag{2.30}$$

Подставляя (2.29), (2.30) в (2.26), после некоторых преобразований находим

$$J(\alpha) = \varkappa\alpha^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\Gamma(\theta_n)\cos\theta_n\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} z^{\gamma n} - \frac{1}{\pi z} C_n z^n\right] \tag{2.31}$$

Коэффициенты C_n получаются разложением в ряд по степеням z второго слагаемого в (2.29). Это делается посредством представления для гипергеометрической функции [14]. В результате

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\theta_n - k - 1}, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\theta_k)\sin\theta_k\pi}{\Gamma(\nu)\, k!\, (\theta - n - 1)} \tag{2.32}$$

Опираясь на соотношения (2.25), (2.29) и (1.19), получаем представление для резольвенты

$$R_\varkappa(t) = \frac{\mu^{1-\nu/\gamma}}{\pi} \int_0^\infty \left\{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\theta_n)\sin\theta_n\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} z^{n\gamma}\right\} \left\{1 - \varkappa\frac{z^\nu}{\mu^{\nu/\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\theta_n)\cos\theta_n\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} z^{n\gamma} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} C_n z^{n-1}\right]^2 + \varkappa^2 \frac{z^{2\nu}}{\mu^{2\nu/\gamma}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\theta_n)\sin\theta_n\pi}{\Gamma(\nu)\, n!} z^{n\gamma}\right]^2\Bigg\}^{-1} e^{-\frac{t\mu^{1/\gamma}}{z}} dz \tag{2.33}$$

Ряд Неймана для $R_\varkappa(t)$ следует из (2.33) путем разложения по степеням параметра $\varkappa$. Дело сводится к разложению в ряд обратной степени квадратного трехчлена. Ввиду громоздкости здесь на этом не останавливаемся. Отметим только, что полагая $\gamma = 1$ в (2.31) получаем, как и следовало ожидать, резольвенту (2.19). Действительно, в этом случае; во-первых

$$C_n = \sin \nu\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)}{(\nu+k-n-1)\,k!} \equiv 0 \tag{2.34}$$

во-вторых

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma(n+\nu)\sin(n+\nu)\pi}{\Gamma(\nu)\,n!}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n = \sin\nu\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)}{n!}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n = \frac{\sin\nu\pi}{1-\mu/\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Gamma(n+\nu)\cos(n+\nu)\pi}{\Gamma(\nu)\,n!}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n = \frac{\cos\nu\pi}{1-\mu/\alpha} \tag{2.35}$$

Подставляя это в (2.33), получаем (2.15) и, следовательно, (2.19). Во всем этом весьма нетривиальным является тождество (2.34). Чтобы убедиться в его справедливости, нужно воспользоваться промежуточным равенством

$$\frac{1}{k-\nu} = \frac{1}{k} + \frac{\nu(\nu+1)}{k(k+1)} + \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{k(k+1)(k+2)} + \ldots \tag{2.36}$$

которое можно извлечь из интегрального представления для гипергеометрической функции [14].

Асимптотические свойства, а также анализ точности полученных ранее [15–17] приближенных выражений для резольвенты и т. д. здесь не рассматривается.

4°. *Оператор Больцмана.* Еще Больцманом и рядом других исследователей [3] отмечался логарифмический закон изменения деформации во времени при постоянном напряжении. Современные прецезионные измерения для ряда полимерных материалов [18,19] подтверждают эту точку зрения, в особенности при небольших временах испытаний. Однако использование логарифмического закона в расчетах тормозилось прежде всего отсутствием разработанного математического аппарата, в частности отсутствием резольвенты. Попытки получить последнюю традиционными методами, так же как и в случае ядра Бронского — Слонимского [17], неизменно терпели неудачу.

Выясним прежде всего свойства спектра логарифмического закона деформирования. Полагая в (1.3)

$$q(\lambda) = q_0 = \mathrm{const}, \qquad 0 \leqslant \lambda < \infty$$

находим

$$R(t) = q_0/\varkappa t, \qquad \psi(t) = q_0 \ln t + C \tag{2.38}$$

т. е. оператору Больцмана формально соответствует постоянный приведенный спектр запаздывания. Но, как следует из (2.38), ни сам оператор, ни логарифмический закон не имеют физического смысла на полной временной шкале $[0, \infty)$ из-за сингулярности в окрестности нуля. Это находит выражение так же и в том, что для выбранного спектра запаздывания не существует спектр релаксации. Последнее легко видеть из (1.20), поскольку входящий сюда несобственный интеграл расходится. Можно указать два способа устранения этого недостатка. Первый состоит в видоизменении оператора Больцмана. Положим [3]

$$R(t) = \frac{q_0}{\varkappa}\frac{1}{t+t_0}, \qquad t_0 > 0 \tag{2.39}$$

Из (1.3) следует, что (2.38) равносильно доумножению постоянного спектра на затухающую экспоненту

$$q(\lambda) = q_0 e^{-\lambda t_0} \tag{2.40}$$

Теперь

$$\int_0^\infty \frac{q(\lambda)}{\lambda-\alpha}\,d\lambda = -q(\alpha)\operatorname{Ei}(\alpha t_0) \tag{2.41}$$

где $\operatorname{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция [14]. Представление для резольвенты получается из (1.3), (1.20), (2.39) и (2.40)

$$P(t) = q_0 \int_0^\infty \{[1 + q_0 e^{-\lambda t_0} \operatorname{Ei}(\lambda t_0)]^2 + \pi^2 q_0^2 e^{-2\lambda t_0}\}^{-1} e^{-\lambda(t+t_0)}\,d\lambda \tag{2.42}$$

Отсюда следует, что время в $P(t)$ входит так же, как и в (2.38), только в виде суммы $t + t_0$. Ряд Неймана для $P(t)$ здесь будет по степеням параметра q_0.

Второй способ заключается в замене постоянного спектра «ящикообразным» [1, 10]. Пусть

$$q(\lambda) = q_0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0); \quad q(\lambda) = 0 \quad (\lambda > \lambda_0) \tag{2.43}$$

Выбираем $\lambda_0 = 1/t_0$. Из (1.3) находим

$$R(t) = q_0 \varkappa^{-1} t^{-1} (1 - e^{-t/t_0}) \tag{2.44}$$

При $t_0 \to 0$ ядро (2.44) стремится к ядру Больцмана (2.38). Опуская промежуточные выкладки, приводим резольвенту для (2.44)

$$P(t) = q_0 t_0^{-1} \int_0^1 \{[1 - q_0 \ln(x^{-1} - 1)]^2 + \pi^2 q_0^2\}^{-1} \exp\frac{-xt}{t_0}\,dx \tag{2.45}$$

Анализ полученных резольвент (2.41) и (2.45) подобно предыдущему оставляем в стороне.

Таким образом, приведенный способ представления резольвент дает новые возможности для более гибкого аналитического описания явлений вязкоупругости как на стадии изучения самих свойств, так и при решении граничных задач.

Поступила 30 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Gross B. Mathematical structure of the theories of viscoelasticity, Paris, Harmaun, 1953.
2. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
5. Громов В. Г. Об одном способе описания вязко-упругого поведения полимерных тел, Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 2.
6. Громов В. Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости. Механика полимеров, 1967, № 6.
7. Громов В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1.
8. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
9. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1965.
10. Ферри Д. Вязко-упругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр., лит., 1963.
11. Шермергор Т. Д. Реологические характеристики упруго-вязких материалов, обладающих асимметричным релаксационным спектром. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
12. Листовничный В. Ф., Шермергор Т. Д. Ползучесть упруго-вязких сред с ядром типа вырожденной гипергеометрической функции. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
13. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей, изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.

15. Бронский А. П. Явление последействия в твердом теле. ПММ, 1941, т. 5, вып. 1.
16. Слонимский Г. Л. О законе деформации реальных материалов, I. Ж. техн. физ., 1939, т. 9, № 20.
17. Колтунов М. А. Функции влияния в теории оболочек с наследственными свойствами. Сб. «Исслед. по теории пластин и оболочек», сб. 5, Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1967.
18. Громов В. Г., Калинин В. А., Степаненко Ю. П., Шляфман Е. М. Об аппроксимации экспериментальных данных по испытаниям вязко-упругих свойств полимерных материалов. В кн.: Аннот. докл. III Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., М., «Наука», 1968.
19. Степаненко Ю. П. Вопросы экспериментального исследования вязко-упругих свойств полимеров. Тр. Ростовск. ин-та инж. ж-д. трансп., М., «Транспорт», 1967, вып. 69.

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ОБЛАСТЕЙ

Г. А. Гринберг, В. А. Косс

(Ленинград)

1. Применим метод, изложенный в работе [1], к решению первой краевой задачи для пространственного уравнения Фурье в декартовых координатах

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + f(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

определенного в области, ограниченной координатными плоскостями, движущимися по некоторым законам $R_i^{(0)}(t)$ и $R_i^{(1)}(t)$ так, что

$$x_i \in (R_i^{(0)}(t), \; R_i^{(1)}(t)) \qquad (i \text{ — номер координатной оси})$$

Предполагая относительно функций $R_i^{(0)}$ и $R_i^{(1)}$, что они обладают непрерывными производными до второго порядка включительно, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} + \frac{1}{4} (\eta_i^3 \ddot{\eta}_i y_i^2 + 2\eta_i^3 \ddot{R}_i^{(0)} y_i) \, V\right] = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f}{q} \tag{1.2}$$

$$U = q(y_1, \ldots, y_n, t) \, V(y_1, \ldots, y_n, t), \qquad y_i = \frac{x_i - R_i^{(0)}}{\eta_i} \qquad (\eta_i = R_i^{(1)} - R_i^{(0)}) \tag{1.3}$$

$$q = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\eta_i}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\eta_i \dot{\eta}_i y_i^2 + 2\eta_i \dot{R}_i^{(0)} y_i + \int (\dot{R}_i^{(0)})^2 dt\right.\right], \qquad y_i \in (0, 1)$$

Уравнение (1.2) допускает точное решение в известных функциях, если для всех i одновременно выполняются условия

$$\eta_i^3 \ddot{\eta}_i = \mathrm{const}, \qquad \eta_i^3 \ddot{R}_i^{(0)} = \mathrm{const}$$

если

$$(1) \qquad \eta_i = \mathrm{const}, \qquad R_i^{(0)} = M_i t^2 + A_i t + B_i \tag{1.4}$$

или

$$(2) \qquad \eta_i = \sqrt{M_i t^2 + A_i t + B_i}, \qquad R_i^{(0)} = C_i \sqrt{M_i t^2 + A_i t + B_i} + D_i t + E_i \tag{1.5}$$

или

$$(3) \qquad \eta_i = A_i t + B_i, \qquad R_i^{(0)} = \frac{C_i}{A_i t + B_i} + D_i t + E_i \tag{1.6}$$