то получим соотношение

$$\lambda_{nm}^2 P_m{}^n(\cos\theta) - \delta \frac{dP_m{}^n(\cos\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \pi/2$$

которое вместе с (2.4) позволяет определить значения m и $\lambda_{nm}{}^2$ (m не будет целым числом, а $P_m{}^n(x)$ — присоединенная функция Лежандра). При $\delta \ll \lambda^2$ приближенные значения m равны $m = n + k$ ($k = 1, 3, 5, \ldots$) и, следовательно, использование двух различных видов условий на свободной поверхности жидкости приводит к практически одинаковым результатам.

Поступила 5 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничников Г. И. Применение асимптотического метода интегрирования в задаче о свободных колебаниях тонкой упругой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969), М., «Наука», 1970.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
3. Балабух Л. И., Молчанов А. Г. Осесимметричные колебания сферической оболочки частично заполненной жидкостью. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.

О СВЯЗИ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГИХ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. М. Левин

(Петрозаводск)

Рассматриваются микронеоднородные упругие среды (композитные материалы, поликристаллы и др.), для которых тензор упругих модулей c_{ijmn} считается однородной случайной функцией координат. Вопрос о связи между математическими ожиданиями напряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и деформаций $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ в таких средах при условии, что поля напряжений и деформаций статистически однородны, исследован рядом авторов [1-5]. В. В. Новожилов [6] рассмотрел случай неоднородных полей и предложил метод решения неоднородной стохастической задачи. В данной работе реализуется программа, намеченная в [6]

В п. 1 исходная стохастически неоднородная задача сводится к бесконечной последовательности однородных задач. Это достигается представлением решения в виде ряда, удовлетворяющего уравнениям равновесия объемного элемента тела и уравнениям совместности деформаций. Коэффициенты этого ряда являются однородными случайными тензорными функциями, не зависящими ни от формы тела, ни от действующей на него детерминированной внешней нагрузки. Они зависят только от упругих свойств тела и полностью определяются по заданному случайному тензору c_{ijmn}.

В п. 2 коэффициенты упомянутого ряда выражаются через характеристики микроструктуры в предположении, что среда сильно изотропна. Последнее позволяет не ограничиваться случаем малой неоднородности и избежать в то же время задания многоточечных корреляционных функций. Из построенного решения вытекает зависимость между $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$, аналогичная соотношениям между напряжениями и деформациями в мультимоментной теории упругости [7]. Осуществляется переход от дифференциальной формы связи к интегральной, характерной для нелокальной теории упругости ([8] и др.).

1. Рассмотрим микронеоднородную среду, связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} в произвольной точке которой следует обобщенному закону Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn}\varepsilon_{mn} \tag{1.1}$$

причем тензор модулей упругости c_{ijmn} является случайной функцией координат. Предполагается, что случайное поле $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$) однородно и эргодично. Тензоры σ_{ij} и ε_{ij} будут также случайными функциями, вообще говоря, неоднородными, так как они зависят не только от $\mathbf{c}(\mathbf{r})$, но и от внешней нагрузки, которая в дальнейшем считается детерминированной.

Пусть характерный объем микронеоднородной среды (объем в структурном отношении типичный для среды в целом) находится в равновесии под действием внешних сил. Представим тензоры напряжения и деформации в виде

$$\sigma_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle + \sigma_{ij}^*, \qquad \varepsilon_{ij} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \varepsilon_{ij}^* \tag{1.2}$$

Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций, в случае статистически однородной величины совпадающее с усреднением по объему. Звездочки означают центрированные величины. Тензоры σ_{ij} и ε_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия и уравнениям совместности деформаций

$$\partial_j\sigma_{ij} + F_i = 0 \tag{1.3}$$

$$\epsilon_{ikm}\epsilon_{jnl}\partial_m\partial_n\varepsilon_{kl} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь F_i — детерминированный вектор объемных сил, ϵ_{imk} — единичный альтернативный тензор Леви — Чивита. Подставив формулы (1.2) в уравнения (1.3) и (1.4), приходим к двум системам уравнений для регулярных и флуктуационных составляющих тензоров напряжения и деформации

$$\partial_j\langle\sigma_{ij}\rangle + F_i = 0, \qquad \epsilon_{imk}\epsilon_{jnl}\partial_k\partial_l\langle\varepsilon_{mn}\rangle = 0 \tag{1.5}$$

$$\partial_j\sigma_{ij}^* = 0, \qquad \epsilon_{imk}\epsilon_{jnl}\partial_k\partial_l\varepsilon_{mn}^* = 0 \tag{1.6}$$

Следуя методу, предложенному в работе [6], будем искать решение системы (1.6) в виде ряда

$$\varepsilon_{ij}^* = \overset{\circ}{\alpha}_{ijmn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle + \sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha^{\mu}_{ijmnp_1\ldots p_\mu}\partial_{p_1}\ldots\partial_{p_\mu}\langle\varepsilon_{mn}\rangle \tag{1.7}$$

Коэффициенты α°, α^μ предполагаются однородными случайными функциями координат. Воспользовавшись (1.1) и (1.7), будем иметь для тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \overset{\circ}{A}_{ijmn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle + \sum_{\mu=1}^{\infty}A^{\mu}_{ijmnp_1\ldots p_\mu}\partial_{p_1}\ldots\partial_{p_\mu}\langle\varepsilon_{mn}\rangle \tag{1.8}$$

Здесь

$$\overset{\circ}{A}_{ijmn} = c_{ijmn} + c_{ijkl}\overset{\circ}{\alpha}_{klmn}, \quad A^{\mu}_{ijmnp_1\ldots p_\mu} = c_{ijkl}\alpha^{\mu}_{klmnp_1,\ldots r_\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

Коэффициенты ряда (1.8) не являются центрированными величинами, в соответствии с чем

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \overset{\circ}{C}_{ijmn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle + \sum_{\mu=1}^{\infty}C^{\mu}_{ijmnp_1\ldots p_\mu}\partial_{p_1}\ldots\partial_{p_\mu}\langle\varepsilon_{mn}\rangle \tag{1.10}$$

$$\sigma_{ij}^* = A^{(0)*}_{ijmn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle + \sum_{\mu=1}^{\infty}A^{(\mu)*}_{ijmnp_1\ldots p_\mu}\partial_{p_1}\ldots\partial_{p_\mu}\langle\varepsilon_{mn}\rangle \tag{1.11}$$

$$\mathbf{C}^k = \langle\mathbf{A}^k\rangle \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Подставив ряды (1.7) и (1.11) в систему уравнений (1.6), потребуем, чтобы эти уравнения удовлетворялись за счет равенства нулю коэффициентов при тензоре $\langle\varepsilon_{mn}\rangle$

и его частных производных по координатам. В результате приходим к рекуррентной последовательности систем уравнений для определения коэффициентов ряда (1.7)

$$\partial_j A_{ijmn}^{(0)*} = 0, \qquad \epsilon_{irk}\epsilon_{jsl}\partial_k\partial_l \overset{\circ}{\alpha}_{rsmn} = 0 \tag{1.12}$$

$$\partial_j A_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{(\mu)*} = -A_{ip_\mu mnp_1\ldots p_{\mu-1}}^{(\mu-1)*}\Big|_{(p_1\ldots p_\mu)}$$

$$\epsilon_{irk}\epsilon_{jsl}\partial_k\partial_l \alpha_{rsmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu} = -\Psi_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu}\Big|_{(p_1\ldots p_\mu)} \tag{1.13}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots)$$

$$\Psi_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu} = \epsilon_{irk}\epsilon_{jsl}\left[2\delta_{p_\mu(k}\partial_{l)}\alpha_{rsmnp_1\ldots p_{\mu-1}}^{(\mu-1)} + \delta_{kp_\mu}\delta_{lp_{\mu-1}}\alpha_{rsmnp_1\ldots p_{\mu-2}}^{(\mu-2)}\right] \tag{1.14}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, а круглые скобки означают симметризацию по соответствующим индексам.

Таким образом, вместо одной стохастически неоднородной задачи (1.6) имеем бесконечную последовательность однородных задач.

Каждая из систем уравнений (1.12), (1.13) идентична уравнениям теории упругости микронеоднородной среды с источниками внутренних напряжений, в которой роль тензора деформации играет тензор α^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). В системе (1.12) в качестве заданной величины фигурирует случайный тензор c_{ijmn}, а правые части каждой из последующих систем уравнений представляют собой величины, определенные при решении предыдущих.

Требование однородности тензоров α^k (в некотором смысле аналогичные требованию периодичности решения) заменяет в системах (1.12), (1.13) краевые условия и, таким образом, коэффициенты ряда (1.7) могут быть последовательно определены.

Очевидно, что эти коэффициенты являются функциями только упругих свойств тела и не зависят от действующей на него внешней нагрузки, которая входит в ряд (1.7) посредством детерминированного тензора $\langle\varepsilon_{mn}\rangle$. Последний определяется в зависимости от размеров тела и действующих на него сил в результате решения системы уравнений (1.5).

2. Воспользуемся методом возмущений [1-4] и перепишем системы уравнений (1.12), (1.13) в виде

$$\partial_j \langle c_{ijrs}\rangle \alpha^{\circ}{}_{rsmn} = -\partial_j a_{ijmn}^{(\circ)*}, \quad \epsilon_{irk}\epsilon_{jsl}\partial_k\partial_l \overset{\circ}{\alpha}_{rsmn} = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial_j \langle c_{ijrs}\rangle \alpha_{rsmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu} = -\partial_j a_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{(\mu)*} - \langle c_{ip_\mu rs}\rangle \alpha_{rsmnp_1\ldots p_{\mu-1}}^{(\mu-1)} - \tag{2.2}$$

$$- a_{ir_\mu mnp_1\ldots p_{\mu-1}}^{(\mu-1)*}\Big|_{(p_1\ldots p_\mu)}$$

$$\epsilon_{irk}\epsilon_{jsl}\partial_k\partial_l \alpha_{rsmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu} = -\Psi_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu}\Big|_{(p_1\ldots p_\mu)}$$

Здесь

$$\overset{\circ}{a}_{ijmn} = \overset{\circ}{A}_{ijmn} - \langle c_{ijrs}\rangle \overset{\circ}{\alpha}_{rsmn} \tag{2.3}$$

$$a_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu} = A_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu} - \langle c_{ijrs}\rangle \alpha_{rsmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots)$$

Для дальнейшего понадобятся только частные решения систем уравнений (2.1), (2.2), подчиняющиеся дополнительному стохастическому условию: $\langle\alpha^k\rangle = 0$ ($k = 0,1,2\ldots$). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что выражения

$$\overset{\circ}{\alpha}_{klmn}(\mathbf{r}) = \int_V U_{i(k,l)j}(\rho)\, a_{ijmn}^{(0)*}(\mathbf{r}')\, dV' \qquad \rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

$$\alpha_{klmnp_1\ldots p_\mu}^{\mu}(\mathbf{r}) = \Phi_{klmnp_1\ldots, p_\mu}^{\mu}(\mathbf{r}) + \int_V U_{i(k,l)j}(\rho)\, a_{ijmnp_1\ldots p_\mu}^{(\mu)*}(\mathbf{r}')\, dV' \tag{2.4}$$

обращают в тождества уравнения системы (2.1), (2.2) и удовлетворяют указанному условию. В (2.4) обозначено

$$\Phi^{\mu}_{klmnp_1\ldots p_\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu!}\int\limits_V Q^{\mu}_{ijklp_1\ldots p_\mu}(\rho)\, \overset{*}{c}_{ijmn}(\mathbf{r}')\, dV' + \int\limits_V U_{i\,(k,\,l)}(\rho)\, a^{(\mu-1)*}_{ip_\mu mnp_1\ldots p_{\mu-1}}(\mathbf{r}')\,dV'$$

$$Q^{\mu}_{ijklp_1\ldots p_\mu}(\mathbf{r}) = U_{i\,(k,\,l)\,j}(\mathbf{r})\, x_{p_1}\ldots x_{p_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

Здесь $U_{kl}(\mathbf{r})$ — тензор Грина для однородной среды с упругими модулями $\langle c_{ijkl}\rangle$, являющийся решением уравнения

$$\langle c_{ijkl}\rangle\, \partial_i \partial_k U_{ln}(\rho) = -\delta_{jn}\delta(\rho) \tag{2.6}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. В частности, если среда макроскопически изотропна, то

$$\langle c_{ijkl}\rangle = \bar\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\bar\mu I_{ijkl}$$
$$U_{kl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\bar\mu}\left(\frac{\delta_{kl}}{r} - \frac{1}{2}g\frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_l}\right) \qquad r = |\mathbf{r}| \tag{2.7}$$
$$g = \frac{\bar\lambda' + \bar\mu}{\bar\lambda + 2\bar\mu}, \qquad I_{ijkl} = \delta_{i\,(k}\delta_{j)\,l}$$

Выражения (2.4) представляют собой интегро-дифференциальные уравнения относительно α^k и могут быть решены методом итераций. Однако нам нужны не сами функции $\alpha^k(r)$, а математические ожидания от их свертки с тензором флуктуаций упругих модулей: $\langle c^*\alpha^k\rangle$ $(k = 0,1, 2,\ldots)$. Эти выражения могут быть найдены при помощи уравнений (2.4) и итерационного процесса, предложенного в работе [4].

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только макроскопически изотропных микронеоднородных сред. Более того, будем считать, что среда сильно изотропна [3,4]. Последнее означает, что одноточечные корреляционные функции для c^*_{ijmn} зависят только от расстояния между точками поля, т. е.

$$\langle \mathbf{c}^*(\mathbf{r})\,\mathbf{c}^*(\mathbf{r})\ldots \mathbf{c}^*(\mathbf{r}')\rangle = \mathbf{C}(\rho) \tag{2.8}$$

Кроме того, в работах [3,4] полагалось

$$\langle \mathbf{c}^*(\mathbf{r})\,\mathbf{c}^*(\mathbf{r})\ldots \mathbf{a}^{(0)*}(\mathbf{r}')\rangle = \mathbf{B}^{\circ}(\rho) \tag{2.9}$$

Естественно дополнить условие сильной изотропии требованием

$$\langle \mathbf{c}^*(\mathbf{r})\,\mathbf{c}^*(\mathbf{r})\ldots \mathbf{a}^{(\mu)*}(\mathbf{r}')\rangle = \mathbf{B}^{\mu}(\rho) \tag{2.10}$$

Но тогда

$$\mathbf{B}^{\mu}(\rho) = 0 \qquad (\mu = 1, 3, 5, \ldots) \tag{2.11}$$

как тензоры нечетной валентности. Условия (2.8) — (2.11) позволяют произвести вычисления по той же схеме, что и в работе [4].

Умножим правые и левые части уравнений (2.4) на $\overset{*}{c}_{ijkl}(\mathbf{r})$ и вычислим математические ожидания обеих частей

$$\langle \overset{*}{c}_{ijkl}\overset{\circ}{\alpha}_{klmn}\rangle = \int\limits_V U_{\lambda\,(k,\,l)\,\nu}(\rho)\, B^{(\circ)\,ijkl}_{\lambda\nu mn}(\rho)\,dV \tag{2.12}$$

$$\langle \overset{*}{c}_{ijkl}\alpha^{\mu}_{klmnp_1\ldots p_\mu}\rangle = \int\limits_V Q_{\lambda\nu klp_1\ldots p_\mu}(\rho)\, C^{ijkl}_{\lambda\nu mn}(\rho)\,dV + $$
$$+ \int\limits_V U_{\lambda(k,\,l)\,\nu}(\rho)\, \mathbf{B}^{(\mu)\,ijkl}_{\lambda\nu mnp_1\ldots p_\mu}(\rho)\,dV \qquad (\mu = 2, 4, \ldots)$$

Вторая производная от функции Грина равна

$$U_{\lambda(k,\,l)\nu}(\mathbf{r}) = -E_{kl\lambda\nu}\delta(\mathbf{r}) + G_{kl\lambda\nu}(\mathbf{r}) \tag{2.13}$$

Здесь

$$E_{kl\lambda\nu} = \frac{\alpha}{9\bar{k}}\delta_{kl}\delta_{\lambda\nu} + \frac{\beta}{2\bar{\mu}}\left(I_{kl\lambda\nu} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{\lambda\nu}\right) \tag{2.14}$$

$$\alpha = 3 - 5\beta = \bar{k} \Big/ \left(\bar{k} + \frac{4}{3}\bar{\mu}\right)', \quad \bar{k} = \bar{\lambda} + \frac{2}{3}\bar{\mu}$$

$$G_{kl\lambda\nu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\bar{\mu}r^3}\Big\{\delta_{\lambda k}(3\psi_{l\nu} - \delta_{l\nu}) - \frac{1}{2}g\,[-\delta_{kl}\delta_{\lambda\nu} - 2I_{kl\lambda\nu} +$$

$$+ 18\delta_{(kl}\psi_{\lambda\nu)} - 15\psi_{k\nu}\psi_{\lambda\nu}]\Big\}_{(kl)}, \quad \psi_{kl} = \frac{x_k x_l}{r^2} \tag{2.15}$$

$$6\delta_{(kl}\psi_{\lambda\nu)} = \delta_{kl}\psi_{\lambda\nu} + \delta_{k\nu}\psi_{l\lambda} + \delta_{k\lambda}\psi_{l\nu} + \delta_{l\lambda}\psi_{k\nu} + \delta_{l\nu}\psi_{k\lambda} + \delta_{\lambda\nu}\psi_{kl}$$

Заметим, что

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\psi G_{kl\lambda\nu}(r, \theta, \psi) \equiv 0 \tag{2.16}$$

где r, θ, ψ — сферические координаты в $\mathbf{r}$-пространстве. Корреляционную функцию (2.8) можно представить в виде [9]

$$\mathbf{C}(\rho) = \mathbf{C}(0)\,\varphi(\rho) \tag{2.17}$$

где $\mathbf{C}(0)$, $\varphi(\rho)$ — тензорная и координатная зависимости корреляционной функции $\mathbf{C}(\rho)$, причем $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$. Интегрируя в (2.12) с учетом (2.13) — (2.17), получим, переходя к бескоординатному способу, записи

$$\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle = \langle \mathbf{c}^*\mathbf{P}^k\mathbf{c}^*\rangle - \langle \mathbf{c}^*\mathbf{E}\mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle \qquad (k = 0, 2, 4, \ldots) \tag{2.18}$$

$$\mathbf{P}^\circ = -\mathbf{E} \tag{2.19}$$

$$\mathbf{P}^\mu = (P^\mu_{kl\lambda\nu p_1 \ldots p_\mu}) = \int_V G_{kl\lambda\nu}(\mathbf{r})\, x_{p_1} \ldots x_{p_\mu} \varphi(r)\, dV$$

Выражение $\langle \mathbf{c}^*\mathbf{E}\mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle$, входящие в правую часть (2.18), может быть вычислено при помощи уравнений (2.12) и условий сильной изотропии

$$\langle \mathbf{c}^*\mathbf{E}\mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle = \langle \mathbf{c}^*\mathbf{E}\mathbf{c}^*\mathbf{P}^k\mathbf{c}^*\rangle - \langle (\mathbf{c}^*\mathbf{E})^2\mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle + \langle (\mathbf{c}^*\mathbf{E})^2\rangle\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle$$

Повторяя процесс, находим

$$\langle (\mathbf{c}^*\mathbf{E})^{n-1}\mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle = \langle \mathbf{c}^*(\mathbf{E}\mathbf{c}^*)^{n-1}\,\mathbf{P}^k\mathbf{c}^*\rangle - \langle (\mathbf{c}^*\mathbf{E})^n\mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle + \langle (\mathbf{c}^*\mathbf{E})^n\rangle\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда приходим к уравнению

$$\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle = \mathbf{L}^k - \mathbf{L}^\circ\mathbf{E}\,\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle \tag{2.20}$$

Здесь

$$\mathbf{L}^k = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\langle \mathbf{c}^*(\mathbf{E}\mathbf{c}^*)^n\mathbf{P}^k\mathbf{c}^*\rangle = \langle \mathbf{c}^*(\mathbf{I} + \mathbf{E}\mathbf{c}^*)^{-1}\mathbf{P}^k\mathbf{c}^*\rangle \tag{2.21}$$

Разрешая уравнение (2.20) относительно $\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle$, находим окончательно

$$\langle \mathbf{c}^*\boldsymbol{\alpha}^k\rangle = (\mathbf{I} + \mathbf{L}^\circ\mathbf{E})^{-1}\mathbf{L}^k \qquad (k = 0, 2, 4, \ldots,) \tag{2.22}$$

В соответствии с (1.10) можно теперь написать

$$\langle \sigma\rangle = \mathbf{C}^\circ\langle \varepsilon\rangle + \sum_\mu \mathbf{c}^\mu\,\underbrace{\nabla \cdots \nabla}_{\mu}\langle \varepsilon\rangle \qquad (\mu = 2, 4, \ldots) \tag{2.23}$$

Здесь

$$\mathbf{C}^\circ = \langle \mathbf{c}\rangle + (\mathbf{I} + \mathbf{L}^\circ\mathbf{E})^{-1}\mathbf{L}^\circ, \qquad \mathbf{C}^\mu = (\mathbf{I} + \mathbf{L}^\circ\mathbf{E})^{-1}\mathbf{L}^\mu \tag{2.24}$$

Если рассматриваемый объем находится в макроскопически однородном деформированном состоянии, т. е. $\langle \varepsilon\rangle = \text{const}$, то

$$\langle \sigma\rangle = \mathbf{C}^\circ\langle \varepsilon\rangle \tag{2.25}$$

При этом C° — это тензор макроскопических упругих модулей микронеоднородной среды при однородной ее деформации. Выражение для C° (2.24) было получено в работе [4].

Можно показать, что дифференциальный оператор бесконечно высокого порядка в (2.23) эквивалентен интегральному оператору, т. е.

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}^\circ \langle \varepsilon \rangle + \int\limits_V \mathbf{C}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \langle \varepsilon(\mathbf{r}') \rangle \, dV' \tag{2.26}$$

При этом ядро этого оператора следующим образом выражается через микроупругие свойства материала:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{L}^\circ \mathbf{E})^{-1} \mathbf{L}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{L}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{c}^* (\mathbf{I} + \mathbf{c}^* \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H}(r) \mathbf{c}^* \rangle$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = (H_{ijkl}(\mathbf{r})) = G_{ijkl}(\mathbf{r}) \varphi(r) \tag{2.27}$$

В самом деле, представив (2.26) в виде

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}^\circ \langle \varepsilon \rangle + \int\limits_V \mathbf{C}(\rho) \langle \varepsilon(\mathbf{r} + \rho) \rangle \, d\rho$$

и разложив $\langle \varepsilon(\mathbf{r} + \rho) \rangle$ в ряд Тэйлора в окрестности точки r

$$\langle \varepsilon_{mn}(\mathbf{r} + \rho) \rangle = \langle \varepsilon_{mn} \rangle + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu \langle \varepsilon_{mn} \rangle}{\partial x_{p_1} \ldots \partial x_{p_\mu}} \xi_{p_1} \ldots \xi_{p_\mu}$$
$$\xi_p = x'_p - x_p$$

получим выражение (2.23).

Если неоднородность мала [1], то в ряду (2.21) можно пренебречь членами, имеющими порядок выше, чем $(c^*)^2$. Формулы (2.24) и (2.27) упрощаются

$$C^\circ_{ijmn} = \langle c_{ijmn} \rangle - E_{klrs} C^{ijkl}_{rsmn} \tag{2.28}$$

$$C^\mu_{ijmnp_1 \ldots, p_\mu} = P^\mu_{klrsp_1 \ldots p_\mu} C^{ijkl}_{rsmn} \quad (\mu = 2, 4, \ldots) \quad C_{ijmn} = C^{ijkl}_{rsmn} G_{klrs}(\mathbf{r}) \varphi(r) \tag{2.29}$$

Выражение (2.28) было получено в работе [1]. Заметим, что для вывода формул 2.28), (2.29) нет необходимости в предположениях (2.8) — (2.11).

Таким образом, отказ от макроскопической однородности поля деформаций ($\langle \varepsilon \rangle \neq \mathrm{const}$) приводит к нелокальной связи между метематическими ожиданиями тензоров напряжений и деформаций (2.23) или (2.26). Эта нелокальность вызвана, с одной стороны, неоднородностью средних деформаций в материале, с другой — наличием корреляции поля флуктуаций упругих модулей. Она исчезает, если $\langle \varepsilon \rangle = \mathrm{const}$ в силу (2.8) и (2.16), а также при отсутствии корреляции, т. е. если $\varphi(r) = 0$ при $r \neq 0$ («идеально неупорядоченная» модель микронеоднородной среды Крёнера [2]). Если считать, что неоднородность материала связана с наличием детерминированных границ раздела между зернами, т. е. свойства среды при переходе от зерна к зерну меняются скачком, то пространственная часть корреляционной функции $\varphi(r)$ может быть выбрана в виде [9]

$$\varphi(r) = e^{-r/a} \tag{2.30}$$

Здесь a — масштаб корреляции, и тогда ядро интегрального оператора в (2.26) полностью определяется через заданные величины.

Определяющий закон (2.26) решает вопрос о связи между средними напряжениями и деформациями в материале. Сами тензоры $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ должны определяться в результате решения системы уравнений (1.5), дополненной обычными граничными условиями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle n_j = f_i$$

где f_i — детерминированный вектор поверхностных сил. Подставляя определяющий закон (2.26) с учетом $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = {}^1/_2 \, (\partial_j \langle u_j \rangle + \partial_j \langle u_i \rangle)$ в уравнение (1.5), получаем систему трех интегро-дифференциальных уравнений для определения вектора $\langle u_i \rangle$.

Представляет интерес приближенная постановка задачи, заключающаяся в том, что интегральный оператор в (2.26) заменяется дифференциальным (2.23) с удержанием в последнем конечного числа членов. Такая замена приводит к системе дифференциальных уравнений относительно $\langle u_i \rangle$, имеющих порядок $2(1 + \mu)$, где μ — количество удержанных в (2.23) членов. Однако вопрос о приближенной постановке граничных задач остается открытым и требует дополнительного исследования.

Автор благодарит В. В. Новожилова за постоянное внимание к работе.

Поступила 15 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11.
2. Kröner E. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials. J. Mech. Phys., Solids, 1967, vol. 15, No. 5.
3. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
4. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
5. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Вычисление эффективных упругих модулей композитных материалов с учетом многочастичных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
6. Новожилов В. В. О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистически изотропных однородных упругих телах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
7. Green A. E., Rivlin R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, No. 2.
8. Kröner E. Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces. Internat. J. Solids Structures, 1967, vol. 3, No. 5 (Рус. пер. Теория упругости материалов с дальнодействующими силами связности. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1968, № 3.).
9. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Корреляционные функции упругого поля квазиизотропных твердых тел. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ФУНКЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРОВ

В. Г. Громов

(Ростов-на-Дону)

Получено общее представление резольвенты через приведенную функцию распределения вязко-упругого спектра исходного ядра. Метод иллюстрируется на широко распространенных операторах вязкоупругости. Строятся резольвенты для обобщенного дробно-экспоненциального и логарифмических ядер.

Вязко-упругое поведение реальных тел (в частности, полимерные материалы) описывается [1-3] и др. уравнениями, содержащими оператор Вольтерра

$$P^*(\cdots) = \int_0^t P(t-\tau)(\cdots)\,d\tau \tag{0.1}$$

где $P(t)$ — ядро оператора. Если $I - \varkappa P^*$, $-\infty < \varkappa < \infty$ — полный оператор вязкоупругости, то оператор

$$(I - \varkappa P^*)^{-1} = I + \varkappa R_\varkappa^* \tag{0.2}$$