

Для иллюстрации на фиг. 2 и 3 приведены результаты численного расчета для оболочки при $R/h = 100$, $m = 2$, $1 - R/R_1 = 0.01$, $M = 20$. Значения тех же величин при $M = 40$ отличаются менее чем на 1%.

Поступила 3 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О расчете цилиндрических оболочек, нагруженных по линиям. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. Verhand. Math. Kongr., Bd 1, Zürich, 1932.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 2. М., Физматгиз, 1962.
4. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1950.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Н. Д. Курс современного анализа, ч. 2, изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5, М., Физматгиз, 1966.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1953.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧКАХ

Г. И. Пшеничнов

(Москва)

Рассматриваются малые установившиеся свободные колебания системы, состоящей из упругой оболочки и наполняющей ее идеальной несжимаемой жидкости.

Для описания движения оболочки используются дифференциальные уравнения безмоментной теории, применимость которой для отыскания не слишком высоких частот и форм колебаний обоснована в работе [1]. Движение жидкости считается потенциальным.

Получены точные решения задач о свободных колебаниях следующих типов оболочек, полностью наполненных жидкостью: цилиндрической с двумя или одним жесткими днищами, замкнутой сферической и полусферической.

1. Уравнения движения цилиндрической оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \varphi} - \sigma \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\ & \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + \left[\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] v - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \\ & -\sigma \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \left[1 + \frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w + \frac{(1-\sigma^2)R^2}{2Eh} (p)_{\xi=1} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь кроме обычных обозначений $2h$ — толщина оболочки, ρ — плотность ее материала, $(p)_{\xi=1}$ — гидродинамическое давление жидкости на стенке сосуда.

1°. Рассмотрим свободные колебания цилиндрической оболочки с жесткими днищами, полностью наполненной жидкостью.

Объем жидкости в цилиндрической системе координат ограничен поверхностью оболочки $\xi = 1$ и днищами $\theta = 0$, $\theta = 2H/R$ (R и $2H$ — соответственно радиус и длина оболочки).

Потенциал скоростей движения частиц жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа и условию регулярности в рассматриваемом объеме, представим в виде

$$\Phi_{nm} = A_{nm} I_n(v_m \xi) \cos v_m \theta \cos n \varphi \sin \omega_{nm} t \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

где $I_n(x)$ — цилиндрическая функция чисто мнимого аргумента.

Принимая

$$v_m = m\pi R / 2H \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.3)$$

удовлетворим условиям наличия жестких несмещающихся днищ

$$\partial\Phi / \partial\theta = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \theta = 2H/R$$

Гидродинамическое давление жидкости, входящее в (1.1), определяется по формуле

$$(p)_{\xi=1} = -\rho_* (\partial\Phi / \partial t)_{\xi=1} \quad (1.4)$$

где ρ_* — плотность жидкости.

Из условия равенства скоростей движения частиц жидкости и оболочки по направлению нормали к ее срединной поверхности находим (положительное значение w соответствует перемещению по направлению внутренней нормали)

$$R (\partial w / \partial t) + (\partial\Phi / \partial\xi)_{\xi=1} = 0 \quad (1.5)$$

Система (1.1) с учетом (1.2), (1.4), (1.5) допускает точное решение

$$\begin{aligned} u_{nm} &= C_{nm}^{(1)} \sin v_m \theta \cos n\varphi \cos \omega_{nm} t \\ v_{nm} &= C_{nm}^{(2)} \cos v_m \theta \sin n\varphi \cos \omega_{nm} t \\ w_{nm} &= C_{nm}^{(3)} \cos v_m \theta \cos n\varphi \cos \omega_{nm} t \end{aligned} \quad (1.6)$$

Постоянные в (1.2), (1.6) определяются с точностью до произвольного множителя C_{nm} по формулам

$$\begin{aligned} C_{nm}^{(1)} &= [\sigma v_m^2 - n^2 - 2\sigma(1 + \sigma)\lambda_{nm}^2] v_m C_{nm} \\ C_{nm}^{(2)} &= [n^2 + (2 + \sigma)v_m^2 - 2(1 + \sigma)\lambda_{nm}^2] n C_{nm} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$C_{nm}^{(3)} = [(v_m^2 + n^2)^2 + 2(1 + \sigma)(1 - \sigma^2)\lambda_{nm}^4 - (1 + \sigma)(3 - \sigma)(v_m^2 + n^2)\lambda_{nm}^2] C_{nm}$$

$$[v_m I_{n-1}(v_m) - n I_n(v_m)] A_{nm} = [(v_m^2 + n^2)^2 + 2(1 + \sigma)(1 - \sigma^2)\lambda_{nm}^4 - (1 + \sigma)(3 - \sigma)(v_m^2 + n^2)\lambda_{nm}^2] R \omega_{nm} C_{nm}$$

Безразмерный параметр частоты колебаний $\lambda_{mn}^2 = \rho R^2 \omega_{mn}^2 / E$

находится путем решения уравнения

$$\begin{aligned} [v_m I_{n-1}(v_m) - n I_n(v_m)] \{v_m^4 - 2(1 + \sigma)(1 - \sigma^2)\lambda_{nm}^6 + 2(1 + \sigma)[1 + (3 - \sigma) \times \\ \times (v_m^2 + n^2)]\lambda_{nm}^4 - [n^2 + (3 + 2\sigma)v_m^2 + (v_m^2 + n^2)^2]\lambda_{nm}^2\} c - I_n(v_m) [(v_m^2 + n^2)^2 + \\ + 2(1 + \sigma)(1 - \sigma^2)\lambda_{nm}^4 - (1 + \sigma)(3 - \sigma)(v_m^2 + n^2)\lambda_{nm}^2] \lambda_{nm}^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

в котором $c = 2h\rho / \rho_* R$.

Безмоментные граничные условия для оболочки, соответствующие решению (1.6), будут

$$u = S_1 = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \theta = 2H/R$$

где S_1 — сдвигающее усилие в поперечном сечении оболочки.

Если пренебречь силами инерции оболочки, то в (1.7) следует считать $\lambda_{nm} = 0$ ($\omega_{nm} \neq 0$), а частотное уравнение (1.8) примет вид,

$$[v_m I_{n-1}(v_m) - n I_n(v_m)] c v_m^4 - \lambda_{nm}^2 I_n(v_m) (v_m^2 + n^2)^2 = 0 \quad (1.9)$$

При фиксированных n и m уравнение (1.8) дает три значения λ_{nm}^2 , однако два из них необходимо отбросить, так как они слишком велики (гипотеза о несжимаемости жидкости и безмоментная теория оболочек становятся несправедливыми).

Отметим, что формы колебаний (1.6) при четных значениях m симметричны, а при нечетных — антисимметричны относительно среднего сечения $\theta = H/R$.

2°. Рассмотрим свободные колебания цилиндрической оболочки, полностью наполненной жидкостью и имеющей лишь одно жесткое днище. Длина оболочки равна H , ускорение поля силы тяжести равно g и направлено в сторону, обратную оси θ .

Очевидно, что полученное выше решение остается справедливым и в этом случае, если в (1.3) принимать лишь нечетные значения m . Граничные условия при $\theta = 0$ остаются такими же, как и в предыдущей задаче. Условия, относящиеся к другому сечению, имеют вид

$$v = T_1 = p = 0, \quad \text{при } \theta = H/R$$

где T_1 — продольное усилие в поперечном сечении оболочки.

Если задачу решать с учетом условия

$$R (\partial^2 \Phi / \partial t^2) + g (\partial \Phi / \partial \theta) = 0 \quad \text{при } \theta = H/R \quad (1.10)$$

которое является более строгим, чем $(p)_{\theta=H/R} = 0$, то появляется соотношение

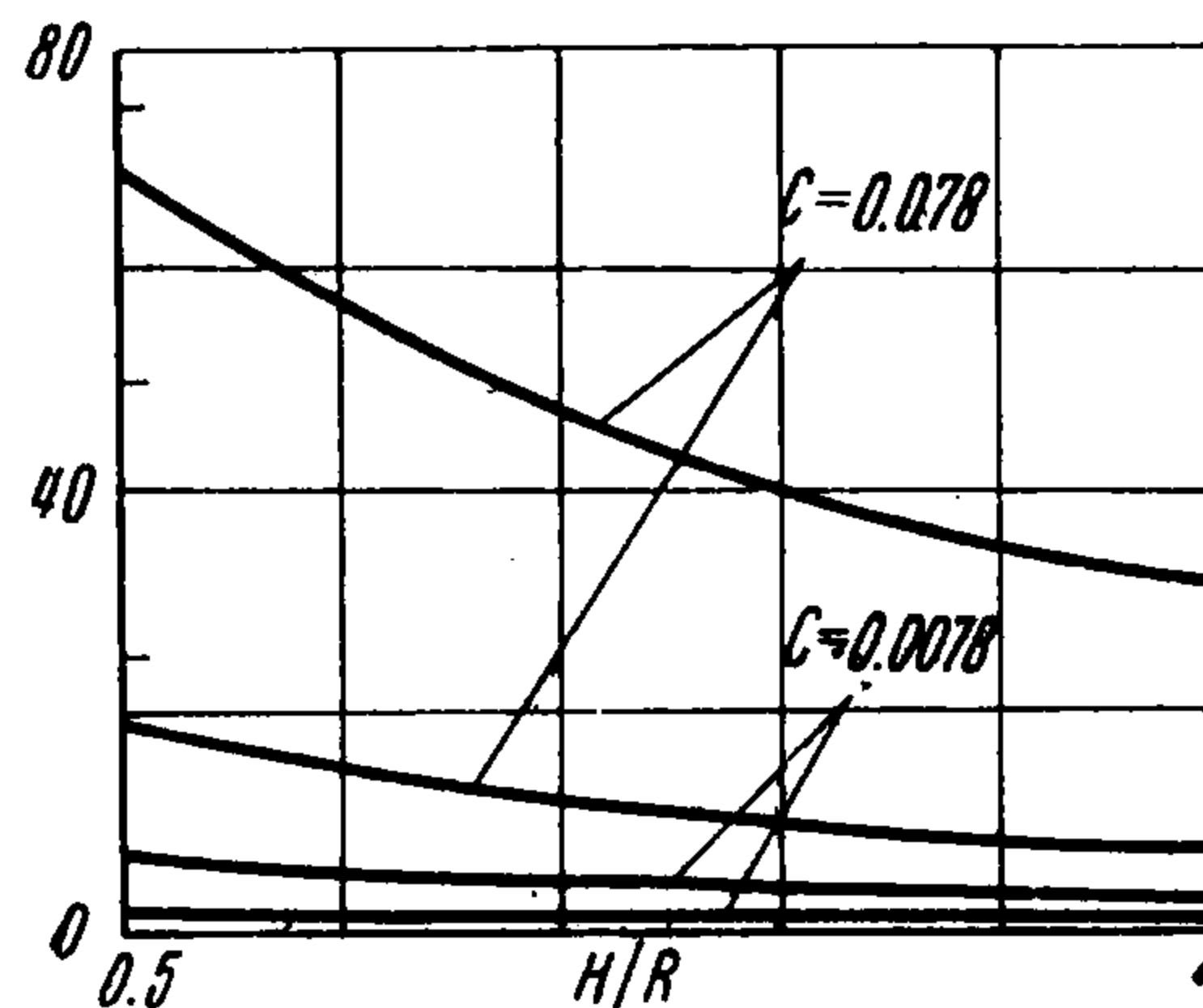
$$\lambda_{nm}^2 + \delta v_m \operatorname{tg}(v_m H/R) = 0 \quad (1.11)$$

позволяющее совместно с уравнением (1.8) определить v_m и λ_{nm}^2 . В этом соотношении $\delta = \rho g R / E$. Обычно для встречающихся на практике конструкций имеет место сильное неравенство $\delta \ll \lambda^2$. Тогда из (1.11) находим, что значения v_m с высокой степенью точности совпадают с (1.3) при нечетных m и, следовательно, приведенные здесь два различных условия на свободной поверхности жидкости приводят к практически одинаковым результатам.

Для выполнения нетангенциальных граничных условий, накладываемых на функцию w и ее производные, к безмоментному решению следует добавить решения с большой изменчивостью, которые имеют характер краевого эффекта [1].

Во многих работах, посвященных свободным колебаниям упругой оболочки с жидкостью, силы инерции оболочки не учитываются. В рассматриваемой задаче связанную с таким допущением погрешность легко оценить путем сравнения частот, получаемых по (1.8) и (1.9).

Частоты, найденные по (1.9), как и следовало ожидать, оказываются завышенными, причем величина ошибки растет с номером частоты и существенно зависит от значений c и H/R . На фигуре эта зависимость при $n = 0$ приведена для первых двух частот свободных колебаний ($m = 1, 3$). Ось ординат соответствует ошибкам в процентах при определении параметра λ^2 по (1.9) вместо (1.8). Считалось, что $\sigma = 0.3$.



В случае осесимметричных свободных колебаний ($n = 0$) рассматриваемая задача нами была решена численно при помощи ЭВМ. При этом толщина стенки цилиндрической оболочки считалась линейной функцией координаты θ . Оказалось, что изменения постоянных a и b в граничном условии

$$au + bT_1 = 0 \quad \text{при } \theta = H/R \quad (1.12)$$

на спектре частот заметно сказывалось лишь в том случае, когда силы инерции оболочки играют существенную роль. Поэтому, если разница в частотах свободных колебаний, определенных по (1.8) и (1.9) мала, полученное здесь решение можно рассматривать как достаточно хорошее приближение для решения задачи о свободных колебаниях оболочки при граничных условиях (1.12) с любыми значениями постоянных a и b (например, при частичном заполнении цилиндрической оболочки на глубину H).

Рассматриваемая задача допускает еще один класс решений. Примем потенциал скоростей движения частиц жидкости в форме

$$\Phi_{nm} = A_{nm} J_n(\kappa_{nm} \xi) \operatorname{ch} \kappa_{nm} \theta \cos n\varphi \sin \omega_{nm} t$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента. В этом виде Φ_{nm} будет регулярной функцией в объеме жидкости удовлетворяющей условию наличия жесткого дна при $\theta = 0$.

Тогда вместо (1.9), (1.11), получим

$$(2Eh / \rho_* g R^2) [\kappa_{nm} J_{n-1}(\kappa_{nm}) - n J_n(\kappa_{nm})] \kappa_{nm}^3 - (n^2 - \kappa_{nm}^2)^2 J_n(\kappa_{nm}) \operatorname{th}(\kappa_{nm} H / R) = 0 \quad (1.13)$$

$$\omega_{mn}^2 = (g \kappa_{nm} / R) \operatorname{th}(\kappa_{nm} H / R)$$

Если принять, что

$$A_{nm} = \frac{\omega_{nm} R (\kappa_{nm}^2 - n^2)^2}{\kappa_{nm} J_{n-1}(\kappa_{nm}) - n J_n(\kappa_{nm})} C_{nm} \quad (1.14)$$

то найдем

$$\begin{aligned} u_{nm} &= (n^2 + \sigma \kappa_{nm}^2) \kappa_{nm} C_{nm} \operatorname{sh} \kappa_{nm} \theta \cos n\varphi \cos \omega_{nm} t \\ v_{nm} &= [n^2 - (2 + \sigma) \kappa_{nm}^2] n C_{nm} \operatorname{ch} \kappa_{nm} \theta \sin n\varphi \cos \omega_{nm} t \\ w_{nm} &= (n^2 - \kappa_{nm}^2)^2 C_{nm} \operatorname{ch} \kappa_{nm} \theta \cos n\varphi \cos \omega_{nm} t \end{aligned} \quad (1.15)$$

В обычных случаях $2Eh / \rho_* g R^2 \gg 1$. Тогда из (1.13) следует, что значения κ_{nm} приближенно равны корням уравнения

$$J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$$

которое совпадает с известным уравнением, относящимся к свободным колебаниям жидкости в жестком цилиндрическом сосуде [2]. Отметим, что в этом случае в соответствии с (1.14) и (1.15) скорости движения оболочки будут значительно меньше скоростей движения частиц жидкости.

2. Перейдем к рассмотрению задачи о свободных колебаниях упругой сферической оболочки, заполненной жидкостью.

Уравнения движения оболочки при обычных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - (1 + \sigma) \frac{\partial w}{\partial \theta} + (1 - \sigma) \left[u + \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v \sin \theta}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{(1 - \sigma^2) \rho R^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{1 + \sigma}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + (1 - \sigma) \left[v + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial v \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{(1 - \sigma^2) \rho R^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1) \\ \frac{1 + \sigma}{\sin \theta} \left(\frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - 2(1 + \sigma) w - \frac{(1 - \sigma^2) \rho R^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{(1 - \sigma^2) R^2}{2Eh} \times \\ \times (p)_{\xi=1} = 0 \end{aligned}$$

1°. Пусть свободная от закреплений замкнутая сферическая оболочка, полностью заполненная жидкостью, совершает установившиеся колебания. Потенциал скоростей движения жидкости в сферической системе координат примем в форме

$$\Phi_{nm} = B_{nm} \xi^m P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi \sin \omega_{nm} t \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

где $P_m^n(x)$ — присоединенные функции полиномов Лежандра.

Тогда решение системы (2.1) с учетом (1.4), (1.5) имеет вид

$$u_{nm} = (1 + \sigma) C_{nm} \frac{dP_m^n(\cos \theta)}{d\theta} \cos n\varphi \cos \omega_{nm} t \quad (2.3)$$

$$v_{nm} = -(1 + \sigma) n C_{nm} \frac{P_m^n(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin n\varphi \cos \omega_{nm} t$$

$$\omega_{nm} = [1 - \sigma - m(m+1) + (1 - \sigma^2)\lambda_{nm}^2] C_{nm} P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi \cos \omega_{nm} t$$

где $m = n + k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). При этом параметр частоты определяется из уравнения

$$(1 - \sigma^2)(1 + cm)\lambda_{nm}^4 - [m^2 + m - 1 + \sigma + (m^2 + m + 1 + 3\sigma)cm]\lambda_{nm}^2 + (m^2 + m - 2) \times \\ \times cm = 0 \quad (2.4)$$

Постоянная в (2.2) принималась равной значению

$$B_{nm} = [1 - \sigma - m(m+1) + (1 - \sigma^2)\lambda_{nm}^2] R\omega_{nm} C_{nm} / m$$

В случае, когда силы инерции оболочки не учитываются, вместо (2.4) получим

$$\lambda_{nm}^2 = \frac{[m(m+1) - 2] cm}{m(m+1) - (1 - \sigma)} \quad (2.5)$$

Одно из значений λ_{nm}^2 , определяемое из (2.4), будет велико и его по соображениям, указанным в п. 1, следует отбросить.

Если инерционность оболочки не учитывать, то при достаточно большой величине c можно получить сильно завышенные значения частот, причем с ростом номера частоты свободных колебаний эта ошибка увеличивается. Так, в случае, когда $c = 0.078$, параметр частоты λ^2 , подсчитанный по (2.5), при $m = 3, 5, 7, 9$, оказывается соответственно на 27, 41, 57, 71% больше его значения, определяемого путем решения квадратного уравнения (2.4).

Если четности n и m совпадают, то формы свободных колебаний являются симметричными относительно экваториального сечения системы $\theta = \pi/2$. В противном случае они будут антисимметричными относительно этого сечения. Случай $m = 1$ соответствует перемещению системы как жесткого тела ($\lambda = 0$).

В работе [3] рассмотрена задача об осесимметричных ($n = 0$) колебаниях упругой замкнутой сферической оболочки, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Оболочка по экватору закреплена от тангенциальных смещений ($u = 0$) и считается безынерционной. Отдельно рассмотрен случай, когда оболочка целиком заполнена жидкостью. Решения в этом последнем случае и в случае свободной от закреплений замкнутой сферической оболочки при симметричных относительно экваториального сечения формах колебаний должны совпадать. Это подтверждается сравнением наших результатов (без учета сил инерции оболочки) с результатами работы [3].

2°. Полученное решение, относящееся к замкнутой сферической оболочке, при антисимметричных формах колебаний является также решением задачи о свободных колебаниях полусферической оболочки, полностью заполненной жидкостью, с граничными условиями

$$v = T_1 = p = 0 \quad \text{при } \theta = \pi/2$$

Если последнее из этих условий заменить условием

$$R(\partial^2 \Phi / \partial t^2) + g(\partial \Phi / \partial \theta) = 0 \quad \text{при } \theta = \pi/2$$

то получим соотношение

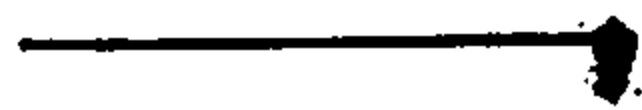
$$\lambda_{nm}^2 P_m^n(\cos \theta) - \delta \frac{dP_m^n(\cos \theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \pi/2$$

которое вместе с (2.4) позволяет определить значения m и λ_{nm}^2 (m не будет целым числом, а $P_m^n(x)$ — присоединенная функция Лежандра). При $\delta \ll \lambda^2$ приближенные значения m равны $m = n + k$ ($k = 1, 3, 5, \dots$) и, следовательно, использование двух различных видов условий на свободной поверхности жидкости приводит к практически одинаковым результатам.

Поступила 5 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. П ш е н и ч н и к о в Г. И. Применение асимптотического метода интегрирования в задаче о свободных колебаниях тонкой упругой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969), М., «Наука», 1970.
2. Л а м б Г. Гидродинамика. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
3. Б а л а б у х Л. И., М о л ч а н о в А. Г. Осесимметричные колебания сферической оболочки частично заполненной жидкостью. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.



О СВЯЗИ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГИХ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. М. Л е в и н

(Петрозаводск)

Рассматриваются микронеоднородные упругие среды (композитные материалы, поликристаллы и др.), для которых тензор упругих модулей c_{ijmn} считается однородной случайной функцией координат. Вопрос о связи между математическими ожиданиями напряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и деформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ в таких средах при условии, что поля напряжений и деформаций статистически однородны, исследован рядом авторов [1-5]. В. В. Новожилов [6] рассмотрел случай неоднородных полей и предложил метод решения неоднородной стохастической задачи. В данной работе реализуется программа, намеченная в [6]

В п. 1 исходная стохастически неоднородная задача сводится к бесконечной последовательности однородных задач. Это достигается представлением решения в виде ряда, удовлетворяющего уравнениям равновесия объемного элемента тела и уравнениям совместности деформаций. Коэффициенты этого ряда являются однородными случайными тензорными функциями, не зависящими ни от формы тела, ни от действующей на него детерминированной внешней нагрузки. Они зависят только от упругих свойств тела и полностью определяются по заданному случайному тензору c_{ijmn} .

В п. 2 коэффициенты упомянутого ряда выражаются через характеристики микроструктуры в предположении, что среда сильно изотропна. Последнее позволяет не ограничиваться случаем малой неоднородности и избежать в то же время задания многоточечных корреляционных функций. Из построенного решения вытекает зависимость между $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, аналогичная соотношениям между напряжениями и деформациями