

Перемещения u_{ρ_1} , w_1 на границе $\beta = \beta_0$ могут быть представлены в виде разложений (4.1). Коэффициенты $b_0(\tau)$ и $c_0(\tau)$ определяются из системы уравнений (4.2), где $\bar{A}_0'(\tau)$ и $\bar{D}_0'(\tau)$ даются равенствами (4.7), (4.8).

Автор благодарит Н. Н. Лебедева и Я. С. Уфлянда за советы в процессе обсуждения работы.

Поступила 22 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н., Подильчук Ю. Н. Деформация упругого двуполостного гиперболоида вращения. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 2.
2. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. О разложении произвольной функции в интеграл по присоединенным сферическим функциям. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М., Гостехиздат, 1955.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Некоторые краевые задачи математической физики и теории упругости для однополостного гиперболоида вращения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.

ДЕЙСТВИЕ ОСТРЫХ ШТАМПОВ НА БЕСКОНЕЧНО ДЛИННУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

В. М. Толкачев

(Новосибирск)

В рамках теории тонких упругих оболочек дается решение задачи о вдавливании одинаковых между собой острых штампов в оболочку по дугам окружности. Кромки штампов считаются абсолютно жесткими, имеют постоянный радиус и не имеют углов. Определяется характер реакций штампов и величина зоны контакта.

Показано, что, несмотря на отсутствие острых углов, реакции штампов неограниченно возрастают вблизи концов зоны контакта, имея особенность типа корня.

Решение задачи строится на базе теории сингулярных интегральных уравнений и сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

1. Рассмотрим бесконечно длинную тонкую упругую цилиндрическую оболочку (фиг. 1), сжимаемую m одинаковыми острыми штампами (фигура при $m = 2$). Кривизну острой кромки штампов считаем постоянной, равной $1/R_1$. Общий случай, когда кривизна кромки — переменная, рассматривается аналогично. Кромка штампа предполагается абсолютно жесткой. Под действием внешнего усилия P/m , приложенного к каждому штампу, образуется зона контакта, характеризующаяся углом θ (фиг. 1). Если пренебречь трением между оболочкой и штампом, то задача сводится к определению нормальной реакции q , действующей со стороны штампа внутрь оболочки, и величины зоны контакта θ . В рамках линейной теории оболочек предполагается, что либо мал угол θ , либо радиус кромки штампа мало отличается от радиуса оболочки R .

Считая, что в зоне контакта оболочка (толщиной h) плотно прилегает к штампу, получим исходное уравнение задачи, если изгибную деформацию оболочки под штампом положим равной $1/R_1 - 1/R$.

Используя результаты работы [1], изгибную деформацию оболочки на линии контакта $-\theta < \varphi < \theta$ запишем в виде

$$\kappa_2(\alpha) = \frac{1-\nu^2}{4\pi EhRa^2m} \int_{-\beta}^{\beta} \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right| - K(\alpha - \alpha_0) \right] q d\alpha_0 \quad (1.1)$$

$$\alpha = m\varphi, \quad \alpha_0 = m\varphi_0, \quad \beta = m\theta, \quad a^2 = h^2/12R^2$$

$$K(\alpha - \alpha_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos k(\alpha - \alpha_0) \quad (1.2)$$

$$b_k = -1 + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 (a_j c_j + b_j d_j), \quad n = km \quad (1.3)$$

$$a_j = \frac{B_j \mp 4Aq_j^2}{q_j(p_j^2 + q_j^2)}, \quad b_j = \frac{B_j \pm 4Ap_j^2}{p_j(p_j^2 + q_j^2)}, \quad p_j + iq_j = \mu_j$$

$$B_j = A^2 \mp 4(p_1^2 q_1^2 - p_2^2 q_2^2)$$

$$A = p_1^2 - q_1^2 - p_2^2 + q_2^2$$

$$\Delta = [A^2 + 4(p_1 q_1 + p_2 q_2)^2] [A^2 + 4(p_1 q_1 - p_2 q_2)^2]$$

Здесь μ_j — корни характеристического уравнения [1]; верхний знак берется при $j = 1$, нижний — при $j = 2$.

Для пологой оболочки

$$c_j + id_j = (\mu_j^2 + 1)^2 - \frac{2 + \nu}{n^2} \mu_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

Первое слагаемое в выражении (1.1) есть главная часть функции Грина для деформации κ_2 ; величина $K(\alpha - \alpha_0)$ — регулярное ядро.

Исходное уравнение задачи, согласно сказанному выше, будет иметь вид

$$\int_{-\beta}^{\beta} \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right| q d\alpha_0 = \int_{-\beta}^{\beta} K(\alpha - \alpha_1) q d\alpha_1 - \omega_0 m \quad (1.4)$$

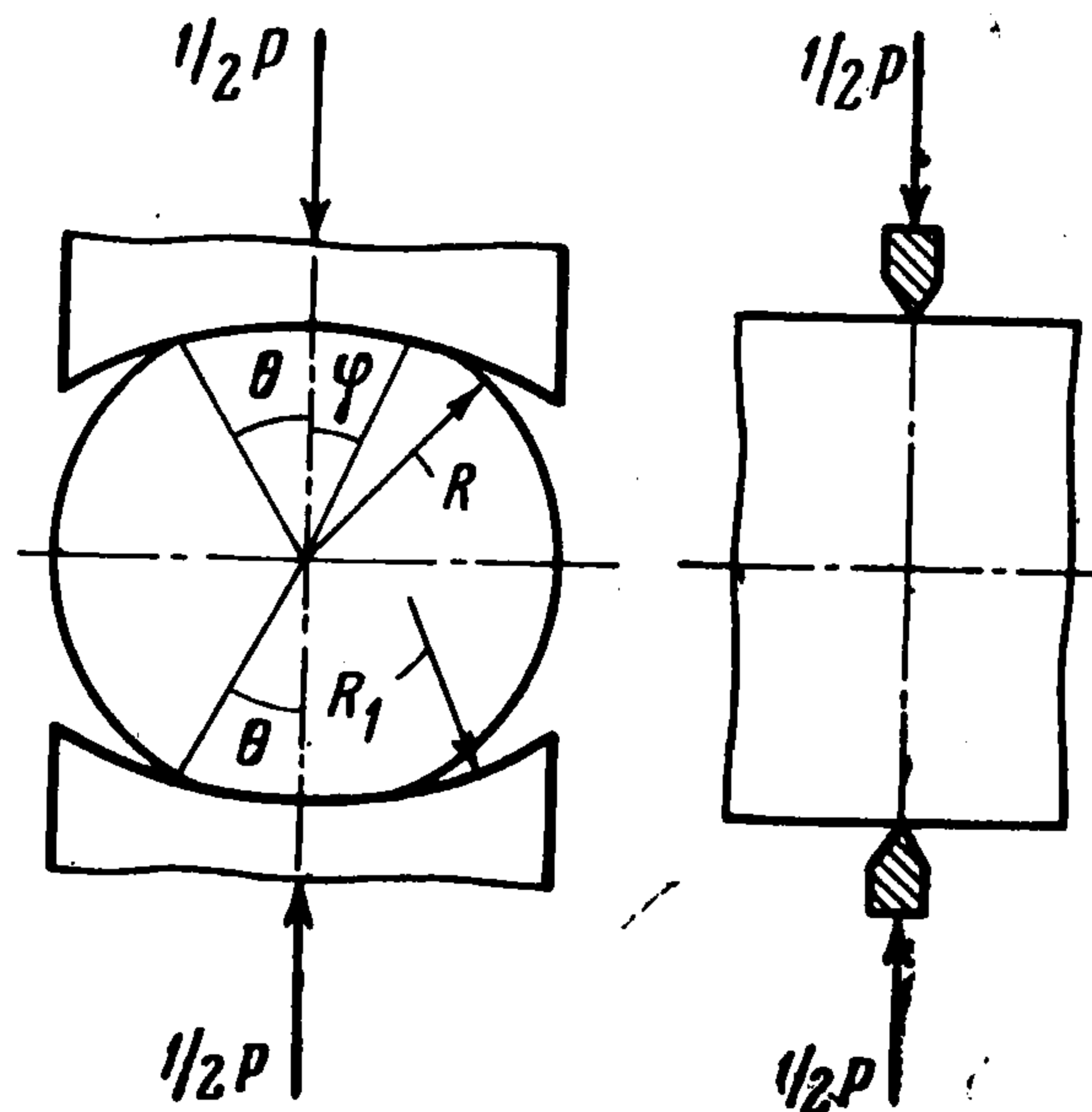
$$\omega_0 = \frac{4\pi Eh a^2}{1 - \nu^2} \left(1 - \frac{R}{R_1} \right) \quad (-\beta < \alpha < \beta)$$

Решение уравнения (1.4), которое при $\omega_0 = \text{const}$ будет, очевидно, четным, подчиняется условию

$$\int_{-\beta}^{\beta} q \cos \frac{\alpha}{m} d\alpha = \frac{P}{R} \quad (1.5)$$

Здесь P/m — сила, приложенная к штампу извне (фиг. 1). Условие (1.5) устанавливает связь между углом β , характеризующим величину зоны контакта, и внешним усилием P .

Наиболее рациональным методом исследования интегрального уравнения первого рода (1.4), по-видимому, будет его преобразование к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Это позволит увидеть характер реакции и применить известные приемы решения. Преобразование проведем решением уравнения (1.4), считая условно известной его правую часть. Аналогично проводится регуляризация сингулярных интегральных уравнений (метод Карлемана [2]), которая в этом случае является равносильной [3].



Фиг. 1

2. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\beta}^{\beta} \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right| q d\alpha = f(\alpha_0) \quad (2.1)$$

где $f(\alpha_0)$ — известная, четная функция. Наиболее просто его можно решить следующим образом. Интегрируя левую часть по частям, приведем уравнение (2.1) к виду

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \alpha_0}{2} Q d\alpha = A_1 \ln X(\alpha_0) - f(\alpha_0) \quad (2.2)$$

$$Q = \int_0^{\alpha} q d\alpha, \quad A_1 = 2 \int_0^{\beta} q d\alpha, \quad X(\alpha) = \sqrt{2(\cos \alpha - \cos \beta)} \quad (2.3)$$

Если в уравнении (2.2) перейти к переменной $t = e^{i\alpha}$, то получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решения которого хорошо известны [3]. Физическое условие интегрируемости реакции q в силу (2.2) требует выбора ограниченного решения для функции Q . Такое решение будет единственным и после перехода к старой переменной α будет иметь вид

$$Q(\alpha_0) = -\frac{X(\alpha_0)}{2\pi^2} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{A_1 \ln X(\alpha) - f(\alpha)}{X(\alpha) \sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} d\alpha \quad (2.4)$$

Решение существует при выполнении условия

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{A_1 \ln X(\alpha) - f(\alpha)}{X(\alpha)} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = 0 \quad (2.5)$$

Имеет место следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{d\alpha_0} \left[X(\alpha_0) \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(\alpha) d\alpha}{X(\alpha) \sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} \right] = \frac{1}{X(\alpha_0)} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{X(\alpha) f'(\alpha)}{|\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)|} d\alpha \quad (2.6)$$

Эта формула справедлива для произвольной функции $f(\alpha)$ такой, что функция $X(\alpha) f(\alpha)$ — непрерывная и обращается в нуль на концах интервала $(-\beta, \beta)$. Эта формула доказана путем перехода в ее левой части к переменной $t = \exp(i\alpha)$ и преобразований с учетом известной теоремы, согласно которой предельное значение производной интеграла типа Коши равно производной от предельного значения.

Решение уравнения (2.1) получим согласно определению (2.3), продифференцировав выражение (2.4) с учетом формулы (2.6) и значения интеграла

$$\int_{-\beta}^{\beta} X(\alpha) \frac{d \ln X(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} = -2\pi \cos \frac{\alpha_0}{2} \quad (2.7)$$

Это решение имеет вид

$$q(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi^2 X(\alpha_0)} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{X(\alpha)}{\sin^{1/2}(\alpha - \alpha_0)} f'(\alpha) d\alpha + \frac{A_1}{\pi} \frac{\cos^{1/2} \alpha_0}{X(\alpha_0)} \quad (2.8)$$

Постоянная A_1 определяется из условия (2.5), которое после вычисления интеграла от $\ln X(\alpha)$ будет

$$A_1 \ln \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{f(\alpha)}{X(\alpha)} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha \quad (2.9)$$

Итак, уравнение (2.1) имеет единственное, неограниченное на концах решение, которое определяется вполне. Иной путь решения уравнения (2.1) можно найти, например, в [4]. Уравнения типа (2.2) входят в класс уравнений с автоморфными ядрами [5], метод их решения развит Л. И. Седовым [6].

3. Подставив теперь в решение (2.8) уравнения (2.1) и уравнение (2.9) вместо функции $f(\alpha)$ правую часть исходного уравнения (1.4), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения реакции q и уравнение для определения постоянной A_1 . После изменения порядка интегрирования в повторных интегралах и вычисления интегралов с учетом четности решения q упомянутые уравнения будут иметь вид

$$q(\alpha_0) + \frac{1}{\pi X(\alpha_0)} \int_{-\beta}^{\beta} R(\alpha_1, \alpha_0) q d\alpha_1 = \frac{A_1 \cos \frac{1}{2}\alpha_0}{\pi X(\alpha_0)} \quad (3.1)$$

$$A_1 \ln \sin \frac{\beta}{2} = \int_{-\beta}^{\beta} \Psi(\alpha_1) q d\alpha_1 - \omega_0 m \quad (3.2)$$

$$R(\alpha_1, \alpha_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\alpha_1 J_k(\alpha_0) \quad (3.3)$$

$$\Psi(\alpha_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} (P_k + P_{k-1}) \cos k\alpha_1 \quad (3.4)$$

Здесь $P_k = P_k(\cos \beta)$ — полиномы Лежандра, при вычислении которых использовалось интегральное представление [7]

$$\int_0^{\beta} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \alpha \frac{d\alpha}{X(\alpha)} = \frac{\pi}{2} P_k$$

$$J_k(\alpha_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} X(\alpha) \sin k\alpha \frac{d\alpha}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)} = \sum_{m=0}^k a_m \cos \left(k - m + \frac{1}{2}\right) \alpha_0 \quad (3.5)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\cos \beta, \quad a_m = \frac{P_{m-2} - P_m}{2m-1} \quad (m = 2, 3, \dots) \quad (3.6)$$

Интегралы (3.5) вычислялись путем перехода к переменной $t = e^{i\alpha}$ по теории вычетов ([8], стр. 398).

Уравнение (3.1) имеет единственное, неограниченное на концах решение с особенностью типа $1/X(\alpha)$, где $X(\alpha)$ — каноническая функция (2.3).

Это решение определяется вполне, если задать величину зоны контакта β . Последняя определяется условием (1.5). Следует отметить, что концентрация реакции на границе зоны контакта наблюдается также при контакте пластины с жесткой поверхностью [9], при контакте оболочки с оболочкой и т. д. Подобная картина принципиально отличает контактные задачи теории тонких оболочек от контактных задач теории упругости, где нормальная реакция обращается в нуль на границе зоны контакта, если штамп не имеет острых кромок. Это следствие специфики уравнений теории оболочек, построенных на гипотезе Кирхгофа — Лява.

4. Опуская исследование сходимости ряда (1.2), приводим значения его коэффициентов (1.3) для оболочек с параметром $R/h = 100$ при $m = 2$

| | | | | | | | |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|
| k | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| $-b_k 10^4$ | 8799 | 4838 | 1801 | 629 | 258 | 124 | 68.4 |
| k | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| $-b_k 10^4$ | 41.2 | 26.8 | 18.5 | 13.3 | 9.97 | 7.71 | 6.12 |

Коэффициенты b_k убывают при больших $n = mk$ как $1/n^4$. Оборвав ряд (3.3) на M членах, вместо (3.1) получим уравнение с вырожденным ядром. Его решение имеет вид

$$q = \frac{A_1 y(\alpha)}{\pi X(\alpha)}, \quad y(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} - \sum_{k=1}^M C_k b_k \sum_{s=0}^k a_s \cos \left(k - s + \frac{1}{2} \right) \alpha \quad (4.1)$$

Здесь b_k , a_s — коэффициенты (1.3) и (3.6), C_k — коэффициенты, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$C_k + \sum_{n=1}^M \alpha_{kn} C_n = \frac{1}{2} (P_k + P_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, M) \quad (4.2)$$

$$\alpha_{kn} = \frac{1}{2} b_n \sum_{s=0}^n a_s (P_{n-s+k} + P_{n-s-k}) \quad (4.3)$$

$P_k = P_k(\cos \beta)$ — полиномы Лежандра, $P_{-n} = P_{n-1}$.

Постоянную A_1 определим из условия (3.2), подставляя туда q из (4.1). Вычислив интегралы, получим

$$A_1 = -\omega_0 m \left[\ln \sin \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{b_k C_k}{k} (P_k + P_{k-1}) \right]^{-1} \quad (4.4)$$

Связь между внешним усилием P и величиной зоны контакта осуществляется уравнением (1.5). Разложив $\cos(\alpha/m)$ в ряд по $\cos n\alpha$ и подставив q из (4.1), уравнение (1.5) приведем к виду

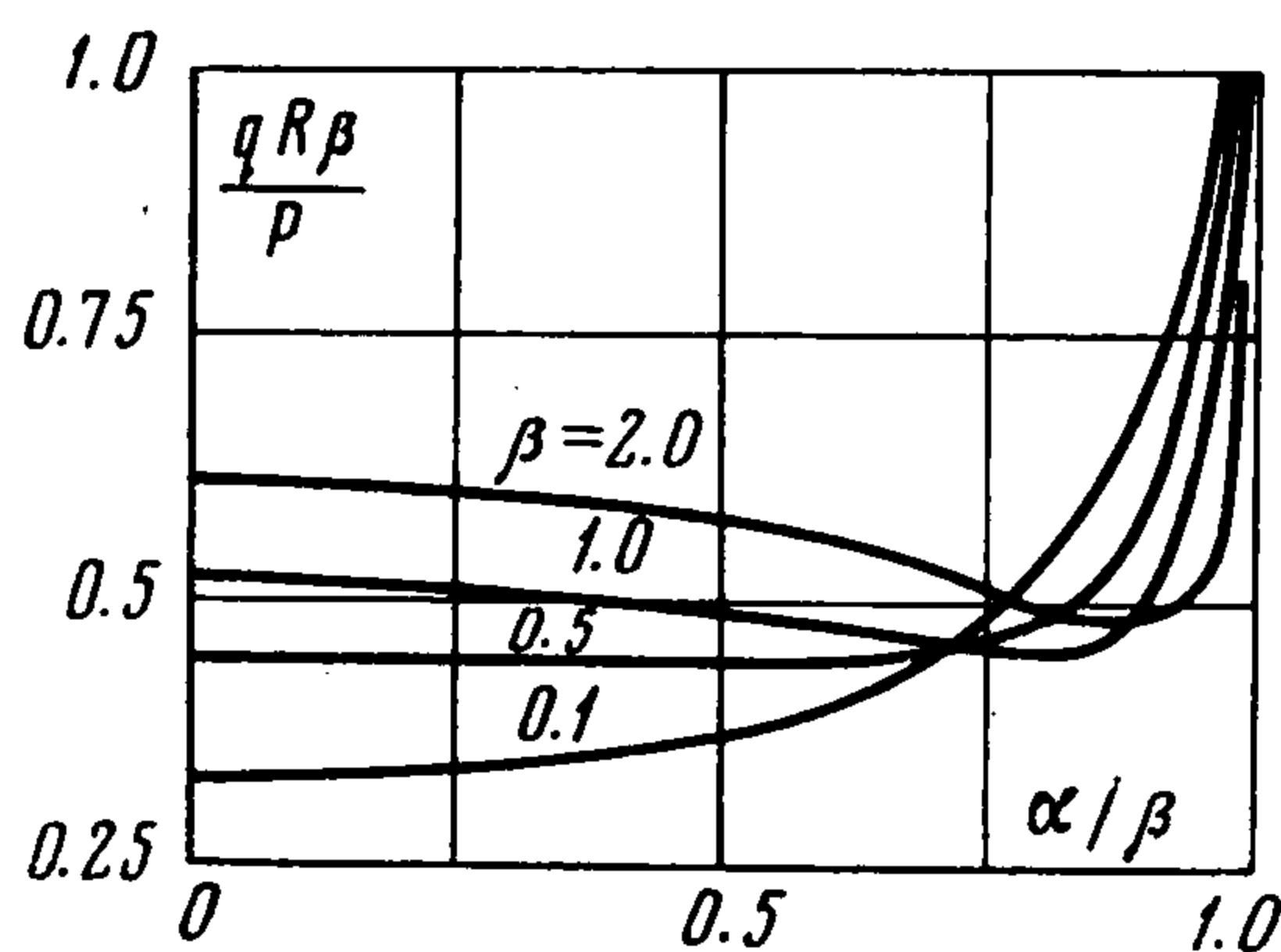
$$\frac{P}{R} = A_1 C_1, \quad m = 1$$

$$\frac{P}{R} = A_1 \frac{2m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M C_k b_k \sum_{s=0}^k a_s P_{k-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} C_n}{n^2 m^2 - 1} \right) \quad (m > 1) \quad (4.5)$$

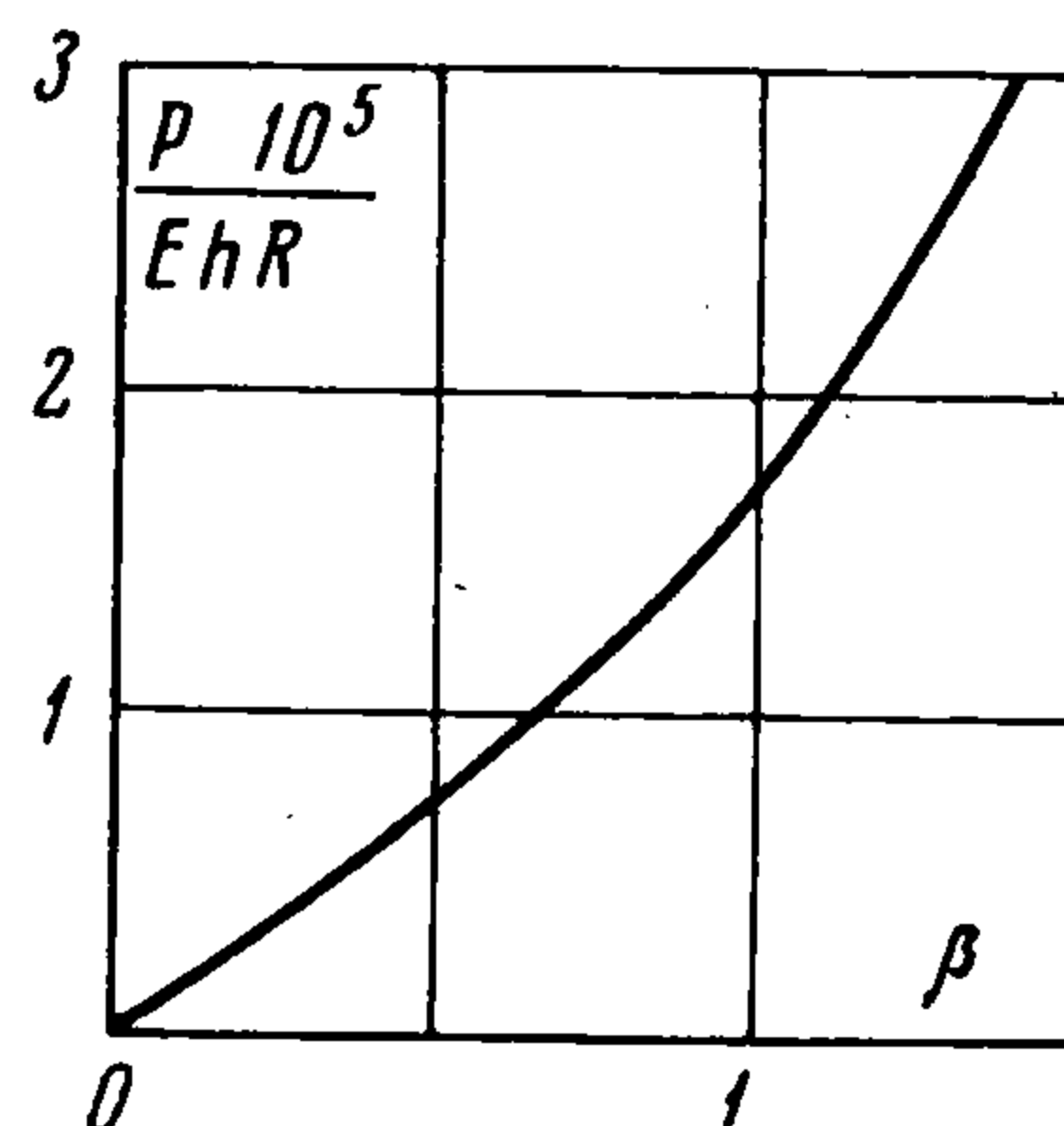
где C_k — решение системы (4.2).

Первой формулой (4.5) можно пользоваться и при $m > 1$ для небольших β , когда $\cos(\alpha/m) \approx \cos \alpha$.

Отметим, что угол $\beta < \pi$ всегда, так как при $\beta = \pi$ в силу (4.4) величина $A_1 = \infty$, что соответствует неограниченной внешней силе P .



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнение (3.1) можно также решать численно, используя формулы численного интегрирования. Однако в этом случае необходимо перейти к новой переменной x , определяемой формулой $\sin \frac{1}{2} \alpha = \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} x$, деформирующей отрезок интегрирования $(-\beta, \beta)$ в отрезок $(-\pi, \pi)$ и делающей ограниченными подынтегральные выражения ($d\alpha / X(\alpha) = dx / 2 \cos \frac{1}{2} \alpha$).

Для иллюстрации на фиг. 2 и 3 приведены результаты численного расчета для оболочки при $R/h = 100$, $m = 2$, $1 - R/R_1 = 0.01$, $M = 20$. Значения тех же величин при $M = 40$ отличаются менее чем на 1%.

Поступила 3 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О расчете цилиндрических оболочек, нагруженных по линиям. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. Verhand. Math. Kongr., Bd 1, Zürich, 1932.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 2. М., Физматгиз, 1962.
4. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1950.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Н. Д. Курс современного анализа, ч. 2, изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5, М., Физматгиз, 1966.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1953.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧКАХ

Г. И. Пшеничнов

(Москва)

Рассматриваются малые установившиеся свободные колебания системы, состоящей из упругой оболочки и наполняющей ее идеальной несжимаемой жидкости.

Для описания движения оболочки используются дифференциальные уравнения безмоментной теории, применимость которой для отыскания не слишком высоких частот и форм колебаний обоснована в работе [1]. Движение жидкости считается потенциальным.

Получены точные решения задач о свободных колебаниях следующих типов оболочек, полностью наполненных жидкостью: цилиндрической с двумя или одним жесткими днищами, замкнутой сферической и полусферической.

1. Уравнения движения цилиндрической оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \varphi} - \sigma \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\ & \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + \left[\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] v - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \\ & -\sigma \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \left[1 + \frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w + \frac{(1-\sigma^2)R^2}{2Eh} (p)_{\xi=1} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь кроме обычных обозначений $2h$ — толщина оболочки, ρ — плотность ее материала, $(p)_{\xi=1}$ — гидродинамическое давление жидкости на стенке сосуда.

1°. Рассмотрим свободные колебания цилиндрической оболочки с жесткими днищами, полностью наполненной жидкостью.