5. Н о в о ж и л о в В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2.
6. Ф е д о р о в Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
7. T r u e s d e l l C., N o l l W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics, ed by Flügge S., vol. III/3, Berlin, Springer-Verlag, 1965.
8. E r i c k s e n J. L., R i v l i n R. S. Large Elastic Deformations of Homogeneous Anisotropic Elastic Materials. J. Rat. Mech. Anal., 1954, vol. 3, No. 3.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НА ГРАНИЦЕ

Б. А. Васильев

(Ленинград)

Получено решение второй основной задачи теории упругости для однополостного гиперболоида вращения. В качестве примера решена задача об упругой деформации под действием осевой сосредоточенной силы, расположенной в центре симметрии гиперболоида, при условии, что граничная поверхность жестко закреплена.

В работе [1] показано, что использование вырожденных эллипсоидальных координат и обобщенного интегрального разложения Мелера —Фока позволяет получить решения основных задач математической теории упругости для областей, ограниченных двуполостным гиперболоидом вращения. В данной работе получены аналогичные результаты для случая однополостного гиперболоида вращения, причем используются интегральные разложения по сферическим функциям, рассмотренные в работах [2,3]. Характерной особенностью этих разложений является наличие дискретной части спектра собственных значений, поэтому в разложении произвольной функции наряду с интегралом имеются конечные алгебраические суммы.

1. Рассмотрим частные решения уравнений теории упругости [1]

$$\frac{1}{1-2\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}=0,\qquad \mathbf{u}=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, μ — коэффициент Пуассона.

Первые два решения находятся из уравнений

$$\Delta\mathbf{u}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.2}$$

Третье решение строится при помощи вектор-потенциала $\mathbf{B}$

$$\mathbf{u}=\frac{1}{2G}\left[4(1-\mu)\mathbf{B}-\operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\right] \tag{1.3}$$

$$\mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k},\qquad \Delta\mathbf{B}=0$$

Здесь G — модуль упругости.

Для решения уравнений (1.2), (1.3) используем вырожденные эллипсоидальные координаты, которые определяются равенствами [4].

$$x=c\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\cos\varphi,\quad y=c\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\sin\varphi,\quad z=c\operatorname{sh}\alpha\cos\beta \tag{1.4}$$

$$(-\infty<\alpha<+\infty,\quad 0<\beta<\beta_0,\quad -\pi<\varphi\leqslant+\pi)$$

Совокупность частных решений уравнения Лапласа, подходящих для рассмотрения краевых задач при граничных условиях, заданных на поверхности однополостного гиперболоида, имеет вид [5]

$$u = u_{\nu m} = \begin{matrix} \varphi_\nu{}^m(\operatorname{sh}\alpha) \\ \psi_\nu{}^m(\operatorname{sh}\alpha) \end{matrix} P_\nu^{-m}(\cos\beta)\,[M_m(\nu)\cos m\varphi + N_m(\nu)\sin m\varphi] \tag{1.5}$$

$$\varphi_\nu{}^m(x) = {}^1/_2\,[e^{\mp{}^1/_2 i\pi m} P_\nu^{-m}(ix) + e^{\pm{}^1/_2 i\pi m} P_\nu^{-m}(-ix)] \quad (x \gtrless 0)$$

$$\psi_\nu{}^m(x) = -{}^1/_2\, i\,[e^{\mp{}^1/_2 i\pi m} P_\nu^{-m}(ix) - e^{\pm{}^1/_2 i\pi m} P_\nu^{-m}(-ix)] \quad (x \gtrless 0)$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Здесь параметр ν имеет непрерывную и дискретную части спектра, $\varphi_\nu{}^m(x)$ и $\psi_\nu{}^m(x)$ соответственно четная и нечетная комбинации сферических функций мнимого аргумента [3].

2. Как следует из (1.2), (1.3), решение уравнения (1.1) сводится к решению уравнения Лапласа для каждой компоненты векторов **u** и **B**.

Частные решения уравнения Лапласа (1.5) допускают четыре вида решений, отличающихся типом симметрии по углу φ и переменной α. Для простоты записи рассмотрим только случай четности перемещений w относительно плоскости $z = 0$ и плоскости $\varphi = 0$. В этом случае решения уравнений (1.2) могут быть получены суперпозицией частных решений вида

$$u_{\nu m}^{(1)} = a_m(\nu)\,\psi_\nu^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m+1}(\cos\beta)\cos(m-1)\varphi \tag{2.1}$$

$$v_{\nu m}^{(1)} = -a_m(\nu)\,\psi_\nu^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m+1}(\cos\beta)\sin(m-1)\varphi$$

$$w_{\nu m}^{(1)} = a_m(\nu)(\nu+m)(\nu-m+1)\,\varphi_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m}(\cos\beta)\cos m\varphi$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$u_{\nu m}^{(2)} = b_m(\nu)(\nu-m)(\nu+m+1)\,\psi_\nu^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m-1}(\cos\beta)\cos(m+1)\varphi$$

$$v_{\nu m}^{(2)} = b_m(\nu)(\nu-m)(\nu+m+1)\,\psi_\nu^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m-1}(\cos\beta)\sin(m+1)\varphi \tag{2.2}$$

$$w_{\nu m}^{(2)} = b_m(\nu)\,\varphi_\nu^m(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m}(\cos\beta)\cos m\varphi$$

Для построения решений (2.1), (2.2) необходимо воспользоваться рекуррентными соотношениями

$$\frac{d\varphi_\nu{}^m}{dx} = -\frac{mx}{x^2+1}\varphi_\nu{}^m + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\psi_\nu^{m-1}$$

$$\frac{d\varphi_\nu{}^m}{dx} = \frac{mx}{x^2+1}\varphi_\nu{}^m - \frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{\sqrt{x^2+1}}\psi_\nu^{m+1} \tag{2.3}$$

$$\frac{d\psi_\nu{}^m}{dx} = -\frac{mx}{x^2+1}\psi_\nu{}^m - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\varphi_\nu^{m-1}$$

$$\frac{d\psi_\nu{}^m}{dx} = \frac{mx}{x^2+1}\psi_\nu{}^m + \frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{\sqrt{x^2+1}}\varphi_\nu^{m+1}$$

Компоненты вектор-потенциала **B** получаются суперпозицией частных решений вида

$$B_{x\nu m} = -c_m(\nu)(\nu-m)(\nu+m+1)\,\psi_\nu^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m-1}(\cos\beta)\cos(m+1)\varphi \tag{2.4}$$

$$B_{y\nu m} = -c_m(\nu)(\nu-m)(\nu+m+1)\,\psi_\nu^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m-1}(\cos\beta)\sin(m+1)\varphi$$

$$B_{z\nu m} = c_m(\nu)\operatorname{tg}^2\beta_0\varphi(\operatorname{sh}\alpha)\,P_\nu^{-m}(\cos\beta)\cos m\varphi \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Подставляя (2.4) в (1.3), для компонент вектора перемещений на границе $\beta = \beta_0$ получим

$$\begin{matrix} u_{\nu m}^{(3)} \\ \vartheta_{\nu m}^{(3)} \end{matrix} = -c_m(\nu)(\nu - m)(\nu + m + 1)\lambda_m(\nu)\psi_\nu^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha) \begin{matrix} \cos(m+1)\varphi \\ \sin(m+1)\varphi \end{matrix} \mp$$

$$\mp {}^1/_2 \operatorname{tg} {}^1/_2\beta_0 c_m(\nu)\psi_\nu^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha) \begin{matrix} \cos(m-1)\varphi \\ \sin(m-1)\varphi \end{matrix}$$

$$w_{\nu m}^{(3)} = c_m(\nu)\lambda_m'(\nu)\varphi_\nu^{\ m}(\operatorname{sh}\alpha)\cos m\varphi \tag{2.5}$$

$$\lambda_m(\nu) = (3 - 4\mu)P_\nu^{-m-1}(\cos\beta_0) + {}^1/_2 \operatorname{tg}\beta_0(\nu + m + 2)(\nu - m - 1)P_\nu^{-m-2}(\cos\beta_0)$$

$$\lambda_m'(\nu) = \operatorname{tg}^2\beta_0(3 - 4\mu)P_\nu^{-m}(\cos\beta_0) - \operatorname{tg}\beta_0(\nu + m + 1)(\nu - m)P_\nu^{-m-1}(\cos\beta_0)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\nu = \nu_\tau = i\tau - {}^1/_2 \qquad (0 < \tau < \infty)$$

$$\nu = \nu_n = m - 2n - 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, n^*), \quad n^* = [{}^1/_2(m-1)] \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Таким образом, компоненты векторов перемещения на границе $\beta = \beta_0$ могут быть записаны в виде [3]

$$\begin{matrix} u_\rho^{(1)} \\ u_\varphi^{(1)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_0^\infty a_m(\tau)\,\psi_{i\tau-1/2}^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha)P_{i\tau-1/2}^{-m+1}(\cos\beta_0)\,d\tau\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{matrix} +$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{n^*}\alpha_{mn}\psi_{m-2n-1}^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha)P_{m-2n-1}^{-m-1}(\cos\beta_0)\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{matrix} \tag{2.6}$$

$$w^{(1)} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_0^\infty a_m(\tau)\left[\tau^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right]\varphi_{i\tau-1/2}^{m}(\operatorname{sh}\alpha)P_{i\tau-1/2}^{-m}(\cos\beta_0)\,d\tau\right\}\times$$

$$\times\cos m\varphi + \sum_{m=3}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{n^*}\alpha_{mn}2n(2n + 1 - 2m)\varphi_{m-2n-1}^{m}(\operatorname{sh}\alpha)P_{m-2n-1}^{-m}(\cos\beta_0)\right\}\cos m\varphi$$

$$\begin{matrix} u_\rho^{(2)} \\ u_\varphi^{(2)} \end{matrix} = -\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_0^\infty b_m(\tau)\left[\tau^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2\right]\psi_{i\tau-1/2}^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)P_{i\tau-1/2}^{-m-1}(\cos\beta_0)\,d\tau\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{n^*}\beta_{mn}(2n + 1)(2n - 2m)\psi_{m-2n-1}^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)P_{m-2n-1}^{-m-1}(\cos\beta_0)\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \tag{2.7}$$

$$w^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_0^\infty b_m(\tau)\varphi_{i\tau-1/2}^{m}(\operatorname{sh}\alpha)P_{i\tau-1/2}^{-m}(\cos\beta_0)\,d\tau\right\}\cos m\varphi +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{n^*}\beta_{mn}\varphi_{m-2n-1}^{m}(\operatorname{sh}\alpha)P_{m-2n-1}^{-m}(\cos\beta_0)\right\}\cos m\varphi \tag{2.8}$$

$$\begin{matrix} u_\rho^{(3)} \\ u_\varphi^{(3)} \end{matrix} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_0^\infty c_m(\tau)\left[\tau^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2\right]\lambda_m(\nu_\tau)\psi_{i\tau-1/2}^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)\,d\tau\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{n^*}\gamma_{mn}(2n + 1)(2m - 2n)\lambda_m(\nu_n)\psi_{m-2n-1}^{m+1}(\operatorname{sh}\alpha)\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \mp$$

$$\mp \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_0\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_0^\infty c_m(\tau)\psi_{i\tau-1/2}^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha)P_{i\tau-1/2}^{-m}(\cos\beta_0)\,d\tau\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \mp$$

$$\mp \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_0\sum_{m=3}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{n^*}\gamma_{mn}\psi_{m-2n-1}^{m-1}(\operatorname{sh}\alpha)P_{m-2n-1}^{-m}(\cos\beta_0)\right\} \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$$

$$w_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} c_m(\tau)\, \lambda_m'(\nu_\tau)\, \varphi_{i\tau-1/2}^m(\operatorname{sh}\alpha)\, d\tau \right\} \cos m\varphi +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{n^*} \gamma_{mn} \varphi_{m-2n-1}^m(\operatorname{sh}\alpha)\, \lambda_m'(\nu_n) \right\} \cos m\varphi$$

$$\psi_m{}^m(x) \equiv 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.9}$$

3. Для решения второй основной задачи теории упругости будем считать, с учетом частных решений (2.6) — (2.8), что вектор перемещения на границе $\beta = \beta_0$ задан в цилиндрической системе координат ρ, φ, z

$$u_\rho = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\alpha) \cos m\varphi, \qquad u_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\alpha) \sin m\varphi$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} D_m(\alpha) \cos m\varphi \tag{3.1}$$

Здесь $A_m(\alpha)$ и $B_m(\alpha)$ — нечетные, а $D_m(\alpha)$ — четная функции α. Введем вспомогательные функции

$$f_m^{(+)}(\alpha) = {}^1/_2\,[A_m(\alpha) + B_m(\alpha)], \qquad f_m^{(-)}(\alpha) = {}^1/_2\,[A_m(\alpha) - B_m(\alpha)] \tag{3.2}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Функции (3.1) (3.2) должны удовлетворять условиям теоремы разложения [3]

$$f_m^{(\pm)}(\alpha) = \int_0^{\infty} \bar f_m^{(\pm)}(\tau)\, \psi_{i\tau-1/2}^{m\pm1}(\operatorname{sh}\alpha)\, d\tau + \sum_{n=0}^{n^*} \bar f_{mn}^{(\pm)} \psi_{m-2n-1}^{m\pm1}(\operatorname{sh}\alpha) \tag{3.3}$$

$$D_m(\alpha) = \int_0^{\infty} \bar D_m(\tau)\, \varphi_{i\tau-1/2}^m(\operatorname{sh}\alpha)\, d\tau + \sum_{n=0}^{n^*} \bar D_{mn} \varphi_{m-2n-1}^m(\operatorname{sh}\alpha)$$

Приравнивая (3.1) решениям (2.6) — (2.8) на границе $\beta = \beta_0$, из (3.2) для коэффициентов $a_m(\tau)$, $b_m(\tau)$, $c_m(\tau)$ получим систему алгебраических уравнений

$$a_m(\tau)\, P_{i\tau-1/2}^{-m+1}(\cos\beta_0) - {}^1/_2 c_m(\tau) \operatorname{tg} {}^1/_2\beta_0 P_{i\tau-1/2}^{-m}(\cos\beta_0) = \bar f_m^{(-)}(\tau) \tag{3.4}$$

$$c_m(\tau)\, \lambda_m(\nu_\tau) - b_m(\tau)\, P_{i\tau-1/2}^{-m-1}(\cos\beta_0) = \bar f_m^{(+)}(\tau)\, [\tau^2 + (m + {}^1/_2)^2]^{-1}$$

$$a_m(\tau)\, [\tau^2 + (m - {}^1/_2)^2]\, P_{i\tau-1/2}^{-m}(\cos\beta_0) + b_m(\tau)\, P_{i\tau-1/2}^{-m}(\cos\beta_0) + c_m(\tau)\, \lambda_m'(\nu_\tau) = \bar D_m(\tau)$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Для определения чисел α_{mn}, β_{mn}, γ_{mn} также имеем систему алгебраических уравнений

$$\alpha_{mn} P_{m-2n-1}^{-m+1}(\cos\beta_0) - {}^1/_2\gamma_{mn} \operatorname{tg} {}^1/_2\,\beta_0 P_{m-2n-1}^{-m}(\cos\beta_0) = \bar f_{mn}^{(-)} \tag{3.5}$$

$$\gamma_{mn}\lambda_m(\nu_n) - \beta_{mn} P_{m-2n-1}^{-m-1}(\cos\beta_0) = (2n+1)^{-1}(2m-2n)^{-1}\, \bar f_{mn}^{(+)}$$

$$\alpha_{mn} 2n\,(2n + 1 - 2m) + \beta_{mn} P_{m-2n-1}^{-m}(\cos\beta_0) + \gamma_{mn}\lambda_m'(\nu_n) = \bar D_{mn}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots [{}^1/_2(m-1)]; \quad m = 3, 4, 5, \ldots)$$

Для случая $n = 0$ система алгебраических уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{m0}\lambda_m(\nu_0) - \beta_{m0} P_{m-1}^{-m-1}(\cos\beta_0) &= \bar f_{m0}^{(+)} \\ \gamma_{m0}\lambda_m'(\nu_0) + \beta_{m0} P_{m-1}^{-m}(\cos\beta_0) &= \bar D_{m0} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \nu_0 = m - 1 \\ m = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

4. Рассмотрим случай осевой симметрии граничных условий. В этом случае $m = 0$ и в разложениях (2.6) — (2.8) имеются только интегральные члены. Кроме того, решения (2.1), (2.2) перестают быть линейно независимыми в силу (2.3) и необходимо положить $a_0(\tau) = 0$. Из решений (2.2), (2.5) нетрудно получить компоненты вектора

перемещений на границе $\beta = \beta_0$

$$u_\rho = \int_0^\infty \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) [c_0(\tau)\lambda_0(\tau) - b_0(\tau) P_{i\tau-1/2}^{-1}(\cos\beta_0)]\,\psi_{i\tau-1/2}^1(\operatorname{sh}\alpha)\,d\tau \tag{4.1}$$

$$w = \int_0^\infty [c_0(\tau)\lambda_0'(\tau) + b_0(\tau) P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0)]\,\varphi_{i\tau-1/2}(\operatorname{sh}\alpha)\,d\tau$$

Здесь

$$\lambda_0(\tau) = (3-4\mu) P_{i\tau-1/2}^{-1}(\cos\beta_0) - {}^1/_2 \operatorname{tg} {}^1/_2\beta_0 \times$$
$$\times \left[P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0) - \left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right) P_{i\tau-1/2}^{-2}(\cos\beta_0)\right]$$
$$\lambda_0'(\tau) = \operatorname{tg}^2\beta_0 (3-4\mu) P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0) + \operatorname{tg}\beta_0(\tau^2 + {}^1/_4) P_{i\tau-1/2}^{-1}(\cos\beta_0)$$

Подставляя (4.1) в граничное условие (3.1) и пользуясь разложением (3.3), получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $b_0(\tau)$, $c_0(\tau)$

$$c_0(\tau)\lambda_0(\tau) - b_0(\tau) P_{i\tau-1/2}^{-1}(\cos\beta_0) = (\tau^2 + {}^1/_4)^{-1} \bar{A}_0(\tau) \tag{4.2}$$
$$c_0(\tau)\lambda_0'(\tau) + b_0(\tau) P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0) = \bar{D}_0(\tau) \qquad (0 < \tau < \infty)$$

Пример. Рассмотрим упругое равновесие однополостного гиперболоида вращения, в центре симметрии которого действует осевая сосредоточенная сила P, а граница $\beta = \beta_0$ жестко закреплена.

Разобьем компоненты вектора перемещений на два слагаемых

$$u_\rho = u_{\rho 0} - u_{\rho 1}, \qquad w = w_0 - w_1 \tag{4.3}$$

Здесь u_{ρ_0} и w_0 — перемещения, создаваемые такой силой в неограниченном пространстве [6]

$$u_{\rho 0} = \frac{Q\rho z}{R^3}, \quad w_0 = Q\left(\frac{z^2}{R^3} + \frac{3-4\mu}{R}\right), \quad Q = \frac{P}{16\pi\sigma(1-\mu)}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \tag{4.4}$$

Перемещения u_{ρ_1}, w_1 должны удовлетворять уравнению (1.1) при граничных условиях $\beta = \beta_0$

$$u_{\rho 1} = A_0(\alpha) = \frac{Q}{c}\,\frac{\operatorname{ch}\alpha \sin\beta_0 \operatorname{sh}\alpha \cos\beta_0}{(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0)^{3/2}} \tag{4.5}$$

$$w_1 = D_0(\alpha) = \frac{Q}{c}\left[\frac{\operatorname{sh}^2\alpha\cos^2\beta_0}{(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0)^{3/2}} + \frac{3-4\mu}{(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0)^{1/2}}\right]$$

Для нахождения функций $A_0(\tau)$, $D_0(\tau)$ воспользуемся разложением [5]

$$\frac{c}{R} = \frac{1}{(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0)^{1/2}} = \pi\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(0) \times$$
$$\times [P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0) + P_{i\tau-1/2}(-\cos\beta_0)]\,\varphi_{i\tau-1/2}(\operatorname{sh}\alpha)\,d\tau \tag{4.6}$$

Дифференцируя (4.6) по параметрам α и β_0 и складывая полученные разложения с соответствующими коэффициентами, получим

$$A_0(\alpha) = \int_0^\infty \bar{A}_0'(\tau)\,\psi_{i\tau-1/2}^1(\operatorname{sh}\alpha)\,d\tau \tag{4.7}$$

$$A_0'(\tau) = \frac{\pi Q}{c}\sin 2\beta_0 \frac{\tau(\tau^2 + {}^1/_4)\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(0)\,[P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0) + P_{i\tau-1/2}(-\cos\beta_0)]$$

$$D_0(\alpha) = \int_0^\infty \bar{D}_0'(\tau)\,\varphi_{i\tau-1/2}(\operatorname{sh}\alpha)\,d\tau \tag{4.8}$$

$$D_0'(\tau) = \frac{2\pi Q}{c}\,\frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(0)\,\{(3-4\mu+\cos^2\beta_0) \times$$
$$\times [P_{i\tau-1/2}(\cos\beta_0) + P_{i\tau-1/2}(-\cos\beta_0)] +$$
$$+ {}^1/_2 \sin 2\beta_0 (\tau^2 + {}^1/_4)\,[P_{i\tau-1/2}^{-1}(\cos\beta_0) - P_{i\tau-1/2}^{-1}(-\cos\beta_0)]\}$$

Перемещения u_{ρ_1}, w_1 на границе $\beta = \beta_0$ могут быть представлены в виде разложений (4.1). Коэффициенты $b_0(\tau)$ и $c_0(\tau)$ определяются из системы уравнений (4.2), где $\bar{A}_0'(\tau)$ и $\bar{D}_0'(\tau)$ даются равенствами (4.7), (4.8).

Автор благодарит Н. Н. Лебедева и Я. С. Уфлянда за советы в процессе обсуждения работы.

Поступила 22 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н., Подильчук Ю. Н. Деформация упругого двуполостного гиперболоида вращения. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 2.
2. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. О разложении произвольной функции в интеграл по присоединенным сферическим функциям. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М., Гостехиздат, 1955.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Некоторые краевые задачи математической физики и теории упругости для однополостного гиперболоида вращения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.

ДЕЙСТВИЕ ОСТРЫХ ШТАМПОВ НА БЕСКОНЕЧНО ДЛИННУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

В. М. Толкачев

(Новосибирск)

В рамках теории тонких упругих оболочек дается решение задачи о вдавливании одинаковых между собой острых штампов в оболочку по дугам окружности. Кромки штампов считаются абсолютно жесткими, имеют постоянный радиус и не имеют углов. Определяется характер реакций штампов и величина зоны контакта.

Показано, что, несмотря на отсутствие острых углов, реакции шпампов неограниченно возрастают вблизи концов зоны контакта, имея особенность типа корня.

Решение задачи строится на базе теории сингулярных интегральных уравнений и сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

1. Рассмотрим бесконечно длинную тонкую упругую цилиндрическую оболочку (фиг. 1), сжимаемую m одинаковыми острыми штампами (фигура при $m = 2$). Кривизну острой кромки штампов считаем постоянной, равной $1 / R_1$. Общий случай, когда кривизна кромки — переменная, рассматривается аналогично. Кромка штампа предполагается абсолютно жесткой. Под действием внешнего усилия P / m, приложенного к каждому штампу, образуется зона контакта, характеризуемая углом θ (фиг. 1). Если пренебречь трением между оболочкой и шпампом, то задача сводится к определению нормальной реакции q, действующей со стороны штампа внутрь оболочки, и величины зоны контакта θ. В рамках линейной теории оболочек предполагается, что либо мал угол θ, либо радиус кромки штампа мало отличается от радиуса оболочки R.

Считая, что в зоне контакта оболочка (толщиной h) плотно прилегает к штампу, получим исходное уравнение задачи, если изгибную деформацию оболочки под штампом положим равной $1 / R_1 - 1 / R$.