

## СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ ВТОРОЙ ВАЛЕНТНОСТИ И СТРУКТУРА УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА

В. Б. Орлов, К. Ф. Черных

(Ленинград)

Выписываются выражения для компонент симметричного тензора второй валентности через его тригонометрические инварианты и углы Эйлера, определяющие направление его главных осей (1.8), (1.9). Приводятся формулы, позволяющие по заданным в ортогональной системе координат физическим компонентам тензора определить инварианты и направление главных осей тензора. Выписываются условия соосности двух тензоров рассматриваемого вида (2.4).

В отличие от обычного подхода<sup>[1]</sup> упругий потенциал рассматривается как функция тригонометрических инвариантов тензора деформации и углов Эйлера, определяющих направление главных осей деформации. Элементарное рассмотрение позволило выявить вид функциональной зависимости упругого потенциала от углов Эйлера, совместимый с группами изотропии кристаллических классов и текстур. Использованный элементарный аппарат не позволил рассмотреть кубическую сингонию, поскольку среди ее порождающих элементов симметрии имеется ось третьего порядка, равнонаклоненная к координатным осям.

1. Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — орты главного векторного базиса симметричного тензора второй валентности  $A$ , т. е. орты, направленные вдоль главных направлений  $A$ . Если построить тригонометрический тензорный базис<sup>[2]</sup>,

$$\begin{aligned} G_1 &= 1/3 \sqrt{3} (e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3), & G_4 &= 1/2 \sqrt{2} (e_1 e_3 + e_3 e_1) \\ G_2 &= 1/6 \sqrt{6} (2e_2 e_2 - e_1 e_1 - e_3 e_3), & G_5 &= 1/2 \sqrt{2} (e_1 e_2 + e_2 e_1) \\ G_3 &= 1/2 \sqrt{2} (e_1 e_1 - e_3 e_3), & G_6 &= 1/2 \sqrt{2} (e_2 e_3 + e_3 e_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

то тензор  $A$  будет иметь в нем разложение

$$A = a_\alpha \circ G_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, 6) \quad (1.2)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1^\circ &= 1/3 \sqrt{3} A_1, & a_2^\circ &= \vartheta_\alpha \sin \psi_\alpha, & a_3^\circ &= \vartheta_\alpha \cos \psi_\alpha, & a_4^\circ &= a_5^\circ = a_6^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$A_1 = a_{(1)} + a_{(2)} + a_{(3)}.$$

Здесь  $A_1$  — первый инвариант

$$\vartheta_\alpha = 1/3 \sqrt{3} \sqrt{(a_{(1)} - a_{(2)})^2 + (a_{(2)} - a_{(3)})^2 + (a_{(3)} - a_{(1)})^2}$$

$\vartheta_\alpha$  — интенсивность, а  $\psi_\alpha$  — угол вида тензора, связанные с главными значениями тензора —  $a_{(i)}$ -соотношениями

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= 1/3 A_1 - 1/6 \sqrt{6} \vartheta_\alpha \sin \psi_\alpha + 1/2 \sqrt{2} \vartheta_\alpha \cos \psi_\alpha \\ a_{(2)} &= 1/3 A_1 + 1/3 \sqrt{6} \vartheta_\alpha \sin \psi_\alpha \\ a_{(3)} &= 1/3 A_1 - 1/6 \sqrt{6} \vartheta_\alpha \sin \psi_\alpha - 1/2 \sqrt{2} \vartheta_\alpha \cos \psi_\alpha \end{aligned}$$

Пусть  $e_1', e_2', e_3'$  — ортонормированный векторный базис, переход к которому от главного векторного базиса определяется соотношениями

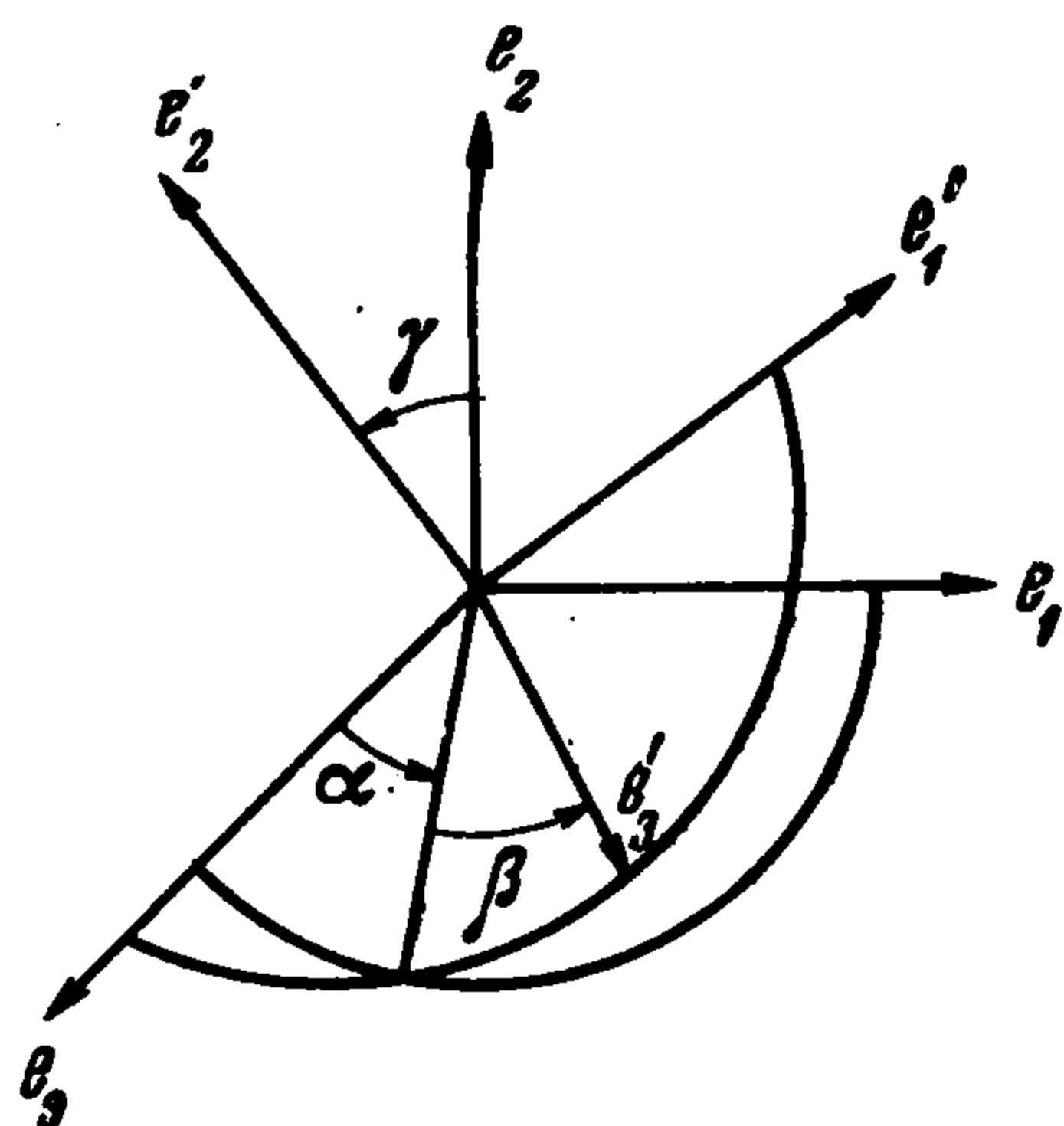
$$e_i' = e_\alpha l_{\alpha i} \quad (1.4)$$

где  $l_{ki}$  — компоненты матрицы<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} L = \|l_{ki}\| &= \cos \omega \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{\sin \omega}{\omega} \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \begin{vmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & \omega_3^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta, & l_{12} &= -\cos \alpha \sin \gamma \\
l_{13} &= \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta, & l_{21} &= \cos \beta \sin \gamma, & l_{22} &= \cos \gamma \\
l_{23} &= \sin \beta \sin \gamma, & l_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \\
l_{32} &= \sin \alpha \sin \gamma, & l_{33} &= -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta
\end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — компоненты вектора поворота, переводящего орты  $e_1, e_2, e_3$  в  $e'_1, e'_2, e'_3$ , а  $\alpha, \beta, \gamma$  — соответствующие углы Эйлера (фиг. 1).



Нетрудно подсчитать, что в базисе  $G'_1, \dots, G'_6$ , построенном на  $e'_1, e'_2, e'_3$ , тензор  $A$  имеет разложение

$$A = \alpha_x G'_\alpha \quad (1.7)$$

с коэффициентами

$$a_1 = 1/3 \sqrt{3} A_1, \quad a_j = \vartheta_\alpha \sin \psi_\alpha m_{2j} + \vartheta_\alpha \cos \psi_\alpha m_{3j} \quad (1.8)$$

где

$$m_{22} = 1/2 \cos^2 \gamma - 1/2, \quad m_{32} = 1/2 \sqrt{3} \cos 2\alpha \sin^2 \gamma$$

$$\begin{aligned}
m_{23} &= 1/2 \sqrt{3} \cos 2\beta \sin^2 \gamma, & m_{33} &= 1/2 \cos 2\alpha \cos 2\beta (1 + \cos^2 \gamma) - \sin 2\beta \sin 2\alpha \cos \gamma \\
m_{24} &= 1/2 \sqrt{3} \sin 2\beta \sin^2 \gamma, & m_{34} &= 1/2 \sin 2\beta \cos 2\alpha (1 + \cos^2 \gamma) + \cos 2\beta \sin 2\alpha \cos \gamma \\
m_{25} &= 1/2 \sqrt{3} \cos \beta \sin 2\gamma, & m_{35} &= -1/2 \cos \beta \cos 2\alpha \sin 2\gamma + \sin \beta \sin 2\alpha \sin \gamma \\
m_{26} &= 1/2 \sqrt{3} \sin \beta \sin 2\gamma, & m_{36} &= -1/2 \sin \beta \cos 2\alpha \sin 2\gamma - \cos \beta \sin 2\alpha \sin \gamma
\end{aligned} \quad (1.9)$$

При этом  $a_j$  связаны с физическими компонентами тензора  $A$  (в базисе  $e'_1, e'_2, e'_3$ )  $a_{ij}$ -соотношениями

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1/3 \sqrt{3} (a_{11} + a_{22} + a_{33}), & a_4 &= \sqrt{2} a_{13} \\
a_2 &= 1/6 \sqrt{6} (2a_{22} - a_{11} - a_{33}), & a_5 &= \sqrt{2} a_{12} \\
a_3 &= 1/2 \sqrt{2} (a_{11} - a_{33}), & a_6 &= \sqrt{2} a_{23}
\end{aligned} \quad (1.10)$$

Вводя операцию композиции симметричных тензоров (свертывание с последующей симметризацией) [4]

$$A * B \equiv 1/2 (AB + BA)$$

получаем, согласно (1.1)

$$\begin{aligned}
G_1 * G_1 &= 1/3 \sqrt{3} G_1, & G_1 * G_2 &= 1/3 \sqrt{3} G_2, & G_1 * G_3 &= 1/3 \sqrt{3} G_3 \\
G_2 * G_2 &= 1/3 \sqrt{3} G_1 + 1/6 \sqrt{6} G_2, & G_2 * G_3 &= -1/6 \sqrt{6} G_3, & G_3 * G_3 &= 1/3 \sqrt{3} G_1 - 1/6 \sqrt{6} G_2
\end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Формулы (1.7) — (1.9) раскрывают структуру тензора. Зная инварианты тензора и направление его главных осей, можем подсчитать компоненты тензора в любом ортонормированном базисе. Несколько сложнее обратная задача: по заданным в некоторой ортогональной системе координат физическим составляющим тензора определить его главные значения и направление главных осей. Прежде всего инварианты подсчитываются по формулам

$$\begin{aligned}
\vartheta_\alpha &= \sqrt{2/3 A_1^2 - 2A_2}, & \sin 3\psi_\alpha &= -3 \sqrt{6} \vartheta_\alpha^{-3} (A_3 - 1/3 A_1 A_2 + 2/27 A_1^3) \\
A_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33}
\end{aligned}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для определения же углов Эйлера необходимо подсчитать  $A^2$ . Свертывая при помощи таблицы (1.11) тензор  $A$  сам с собой и обозначая через  $(a^2)_j$  коэффициенты разложе-

ния  $A^2$  в базисе  $G_1', \dots, G_6'$ , находим

$$\begin{aligned}(a^2)_1 &= 1/6 \sqrt{6} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) = 1/9 \sqrt{3} A_1^2 + 1/3 \sqrt{3} \vartheta_a^2 \\(a^2)_2 &= 2/3 A_1 a_2 + 1/6 \sqrt{6} (a_2^2 - a_3^2) + 1/12 \sqrt{6} (a_5^2 + a_6^2 - 2a_4^2) \\(a^2)_3 &= 2/3 A_1 a_3 - 1/3 \sqrt{6} a_2 a_3 + 1/4 \sqrt{2} (a_5^2 - a_6^2) \\(a^2)_4 &= 2/3 A_1 a_4 - 1/3 \sqrt{6} a_2 a_4 + 1/4 \sqrt{2} (a_5^2 - a_6^2) \\(a^2)_5 &= 2/3 A_1 a_5 + 1/6 \sqrt{6} a_2 a_5 + 1/2 \sqrt{2} a_3 a_5 + 1/2 \sqrt{2} a_4 a_6 \\(a^2)_6 &= 2/3 A_1 a_6 + 1/6 \sqrt{6} a_2 a_6 - 1/2 \sqrt{2} a_3 a_6 + 1/2 \sqrt{2} a_4 a_5\end{aligned}\tag{2.1}$$

С другой стороны, по (1.2), (1.3) и (1.11)

$$\begin{aligned}A^2 &= (1/9 \sqrt{3} A_1^2 + 1/3 \sqrt{3} \vartheta_a^2) G_1 + 2/3 \vartheta_a (\sin \psi_a G_2 + 2/3 A_1 \cos \psi_a G_3) - \\&\quad - 1/9 \sqrt{6} \vartheta_a^2 (\cos 2\psi_a G_2 + \sin 2\psi_a G_3)\end{aligned}$$

Аналогично тому, как были получены формулы (1.8), получаем

$$\begin{aligned}1/9 \sqrt{3} A_1^2 + 1/3 \sqrt{3} \vartheta_a^2 &= (a^2)_1 \\ \sqrt{6} [(a^2)_j - 2/3 A_1 a_j] &= -\vartheta_a^2 (\cos 2\psi_a m_{2j} + \sin 2\psi_a m_{3j}) \quad (j = 2, 3, \dots, 6)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Разрешая пары уравнений, составленные для каждого  $j$  из уравнений (1.8) и (2.2), получаем

$$\begin{aligned}m_{2j} &= \left\{ -\frac{\sqrt{6} \cos \psi_a}{\vartheta_a^2 \cos 3\psi_a} [(a^2)_j - 2/3 A_1 a_j] - \frac{\sin 2\psi_a}{\vartheta_a \cos 3\psi_a} a_j \right\} \\ m_{3j} &= \left\{ \frac{\sqrt{6} \sin \psi_a}{\vartheta_a^2 \cos 3\psi_a} [(a^2)_j - 2/3 A_1 a_j] + \frac{\cos 2\psi_a}{\vartheta_a \cos 3\psi_a} a_j \right\} \quad (j = 2, 3, \dots, 6)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Полученные формулы и позволяют решить обратную задачу. Так, пользуясь формулами (1.10), подсчитываем по известным физическим компонентам тензора  $a_{ij}$  величины  $a_k$ . По ним из (2.1), (2.3) определяем  $m_{2j}$  и  $m_{3j}$ . Тогда (совместная) система уравнений (1.9) позволяет найти углы Эйлера, определяющие положение главных осей тензора  $A$ .

Нетрудно видеть, что условия соосности двух симметричных тензоров  $A$  и  $C$  записываются в виде

$$m_{2j}^c = m_{2j}^a, \quad m_{3j}^c = m_{3j}^a\tag{2.4}$$

Отсюда и из (2.3) вытекают следующие связи между соосными тензорами:

$$\begin{aligned}(S_c = (C - 1/3 C_1 G)/\vartheta_c, \quad S_a = (A - 1/3 A_1 G)/\vartheta_a \\ S_c = \frac{\cos(2\psi_a + \psi_c)}{\cos 3\psi_a} S_a + \sqrt{6} \frac{\sin(\psi_a - \psi_c)}{\cos 3\psi_a} (S_a^2 - 1/3 G) \\ S_c^2 - 1/3 G = \frac{\cos(\psi_a + 2\psi_c)}{\cos 3\psi_a} (S_a^2 - 1/3 G) + \frac{\sin 2(\psi_a - \psi_c)}{\sqrt{6} \cos 3\psi_a} S_a\end{aligned}$$

Первое из них было получено В. В. Новожиловым [5]. Условие (2.4) является тензорным аналогом известного условия параллельности векторов  $c$  и  $a$

$$c_1/a_1 = c_2/a_2 = c_3/a_3$$

Последовательно определить углы Эйлера можно и по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2(a_2 - \vartheta_a \sin \psi_a) a_4 - \sqrt{3} a_5 a_6}{2(a_2 - \vartheta_a \sin \psi_a) a_3 + \sqrt{3}(a_6^2 - a_5^2)} \quad (0 \leq \beta \leq 2\pi) \\ \operatorname{ctg} \gamma &= \frac{\cos 2\beta a_4 - \sin 2\beta a_3}{\sin \beta a_5 - \cos \beta a_6} \quad (0 \leq \gamma \leq \pi) \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{\sqrt{3}(a_5 \sin \beta - a_6 \cos \beta)}{\sin \gamma [a_2 + \sqrt{3}(\cos 2\beta a_3 + \sin 2\beta a_4) - \vartheta_a \sin \psi_a]} \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi)\end{aligned}$$

В плоском же случае (т. е. при  $\gamma \equiv 0$ ) имеем только один угол поворота главных осей  $\eta = \alpha + \beta$ . При этом из (1.8), (1.9) получаем

$$\eta = 1/2 \operatorname{arctg} (a_4/a_3) \quad (0 \leq \eta \leq 2\pi)$$

3. Пусть  $\Phi (e_{11}, \dots, e_{23})$  — плотность упругой энергии деформации. Наличие у упругого материала элементов симметрии накладывает определенные ограничения на вид аргументов  $\Phi$ . Подробный анализ этого вопроса проведен в монографии [1]. Следует отметить, что полученные там в качестве аргументов  $\Phi$  комбинации компонент деформации довольно громоздки, число их велико.

Соотношения (1.8) — (1.10) показывают, что можно рассматривать

$$\Phi = \Phi (E_1, \vartheta_e \sin \psi_e, \vartheta_e \cos \psi_e; \alpha, \beta, \gamma) \quad (3.1)$$

Основной целью данной статьи является выявление ограничений на вид аргументов выписанной функции, налагаемых наличием у материала элементов упругой симметрии.

Наряду с базисом  $e_1', e_2', e_3'$  рассмотрим еще один ортонормированный базис  $e_1'', e_2'', e_3''$ , переход к которому осуществляется дополнительным поворотом, так что  $e_j'' = e_{\beta'}' l_{\beta j}'$ . Из (1.4) находим  $e_j'' = e_{\alpha} l_{\alpha \beta} l_{\beta j}'$ , т. е.  $e_j'' = e_{\alpha} \lambda_{\alpha j}$ , где  $\lambda_{ij}$  — компоненты матрицы

$$\Lambda = \|\lambda_{kl}\| = LL' \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

Таким образом, последовательный переход от исходного базиса  $e_1, e_2, e_3$  к промежуточному  $e_1', e_2', e_3'$  (определяемый матрицей  $L$ ) и от последнего к окончательному базису  $e_1'', e_2'', e_3''$  (матрица  $L'$ ) можно заменить прямым переходом от исходного базиса к окончательному, если использовать матрицу (3.2).

Пусть, например,  $L' = L_2^{2\pi/\omega'}$  — матрица поворота вокруг оси с ортом  $e_2'$  на угол  $\omega'$ . При этом  $\omega_1' = \omega_3' = 0, \omega_2' = \omega'$  и по (1.5)

$$L' = L_2^{2\pi/\omega'} = \begin{vmatrix} \cos \omega' & 0 & \sin \omega' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega' & 0 & \cos \omega' \end{vmatrix}$$

Умножая эту матрицу справа на  $L$  (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \cos \alpha \cos (\beta + \omega') \cos \gamma - \sin \alpha \sin (\beta + \omega'), & \lambda_{12} &= \cos \alpha \sin \gamma \\ \lambda_{13} &= \cos \alpha \sin (\beta + \omega') \cos \gamma + \sin \alpha \cos (\beta + \omega'), & \lambda_{21} &= \cos (\beta + \omega') \cos \gamma \\ \lambda_{22} &= \cos \gamma, & \lambda_{23} &= \sin (\beta + \omega') \sin \gamma, & \lambda_{31} &= -\sin \alpha \cos (\beta + \omega') \cos \gamma - \\ & & & & & - \cos \alpha \sin (\beta + \omega') \\ \lambda_{32} &= \sin \alpha \sin \gamma, & \lambda_{33} &= -\sin \alpha \sin (\beta + \omega') \cos \gamma + \cos \alpha \cos (\beta + \omega') \end{aligned}$$

Сопоставление полученной матрицы с (1.6) показывает, что прямой поворот от исходного базиса к окончательному определяется углами Эйлера

$$L_2^{2\pi/\omega'} \quad \{\alpha' = \alpha, \beta' = \beta + \omega', \gamma' = \gamma\}$$

Аналогично, при дополнительном повороте вокруг оси с ортом  $e_3'$  на угол  $\pi$ , приходим к двум вариантам углов Эйлера

$$L_3^{2\pi/\omega'} = L_3^2 \quad \begin{cases} \text{а) } \alpha' = \pi + \alpha, \beta' = \pi - \beta, \gamma' = \pi - \gamma \\ \text{б) } \alpha' = \alpha, \beta' = -\beta, \gamma' = \pi + \gamma \end{cases}$$

отвечающим одним и тем же косинусам углов поворота.

Остановимся на втором варианте, тогда из полученных выражений следует:

$$\begin{aligned} L_2^{2,2} &\{\alpha' = \alpha, \beta' = \beta + \pi, \gamma' = \gamma\} \\ L_2^{2,3} &\{\alpha' = \alpha, \beta' = \beta + 2/3\pi, \gamma' = \gamma\} \\ L_2^{2,4} &\{\alpha' = \alpha, \beta' = \beta + 1/2\pi, \gamma' = \gamma\} \\ L_2^{2,6} &\{\alpha' = \alpha, \beta' = \beta + 1/3\pi, \gamma' = \gamma\} \\ L_2^{2,\infty} &\{\alpha' = \alpha, \beta' = \beta + \omega', \gamma' = \gamma\} \quad (\omega' - \text{произвольный угол}) \\ L_3^{2,2} &\{\alpha' = \alpha, \beta' = -\beta, \gamma' = \gamma + \pi\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. Кристаллические классы (кубическая сингония здесь не рассматривается) и пять текстур обладают порождающими группы симметрии ( $g$ ) элементами, сведенными в третий столбец следующей таблицы [6].

Кристаллические системы (сингонии)	Номер класса (по Гроту)	Порождающие элементы	
		$g$	$g_0$
Триклинная	1	1	1
	2	$\bar{2}$	1
Моноклинная	3	2	2
	4	$m$	2
	5	$2:m$	2
Ромбическая	6	$2:2$	$2:2$
	7	$2\cdot m$	$2:2$
	8	$m\cdot 2:m$	$2:2$
Тетрагональная	9	$\bar{4}$	4
	10	4	4
	11	$4\cdot m$	$4:2$
	12	$4:2$	$4:2$
	13	$4:m$	4
	14	$4\cdot m$	$4:2$
	15	$m\cdot 4:m$	$4:2$
Тригональная	16	3	3
	17	$\bar{6}$	3
	18	$3:2$	$3:2$
	19	$3\cdot m$	$3:2$
	20	$\bar{6}\cdot m$	$3:2$
Гексагональная	21	$3:m$	6
	22	$m\cdot 3:m$	$6:2$
	23	6	6
	24	$6:2$	$6:2$
	25	$6:m$	6
	26	$6\cdot m$	$6:2$
	27	$m\cdot 6:m$	$6:2$
Текстуры		$\infty$	$\infty$
		$\infty:m$	$\infty$
		$\infty\cdot m$	$\infty:2$
	(гиротропная)	$m\cdot \infty:m$	$\infty:2$
	(изотропная)	$\infty:2$	$\infty:2$

Здесь  $n$ ,  $\bar{n}$  — соответственно, простые и зеркальные оси  $n$ -го порядка,  $m$  — плоскость отражения,  $(\cdot)$  — знак параллельности,  $(:)$  — знак перпендикулярности элементов симметрии.

В последнем столбце приведены порождающие элементы подгрупп собственных вращений симметрии. Как известно [6,7], определяющие элементы  $g$  могут быть получены из  $g_0$  добавлением преобразования инверсии  $i$ . Поскольку относительно преобразования инверсии компоненты тензора второй валентности инвариантны, можно ограничиться рассмотрением столбца  $g_0$ .

Остановимся, например, на ромбической сингонии, имеющей, согласно приведенной таблице, порождающие элементы  $L_2'^2$  и  $L_3'^2$ . Согласно (3.3)<sub>1,6</sub>, углы Эйлера должны входить в упругий потенциал (3.1) в виде, инвариантном относительно преобразования

$$\alpha' = \alpha, \quad \gamma' = \gamma + \pi, \quad \beta' = \beta + \pi, \quad \beta' = -\beta$$

Здесь рассматриваются только  $2\pi$ -периодичные функции углов Эйлера, поэтому выписанному условию удовлетворяют следующие функциональные аргументы:

$$\sin \alpha, \quad \cos \alpha, \quad \cos 2\beta, \quad \sin 2\gamma, \quad \cos 2\gamma$$

Аналогично рассматриваются и остальные кристаллические классы и текстуры; приводим сводку полученных результатов.

## Триклинная (сингония)

$$\Phi \{1/3 \sqrt{3} E_1, \vartheta_e \sin \psi_e, \vartheta_e \cos \psi_e; \sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \sin \gamma, \cos \gamma\}$$

## Моноклиная

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \sin 2\beta, \cos 2\beta, \sin \gamma, \cos \gamma \}$$

## Ромбическая

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \cos 2\beta, \sin 2\gamma, \cos 2\gamma \}$$

## Тетрагональная (классы)

9, 10, 13

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \sin 4\beta, \cos 4\beta, \sin \gamma, \cos \gamma \}$$

11, 12, 14, 15

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \cos 4\beta, \cos 2\gamma, \sin 2\gamma \}$$

## Тригональная

16, 17

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \sin 3\beta, \cos 3\beta, \sin \gamma, \cos \gamma \}$$

18, 19, 20

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \cos 3\beta, \sin 2\gamma, \cos 2\gamma \}$$

## Гексагональная

21, 23, 25

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \sin 6\beta, \cos 6\beta, \sin \gamma, \cos \gamma \}$$

22, 24, 26, 27

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \cos 6\beta, \sin 2\gamma, \cos 2\gamma \}$$

## Текстуры

 $\infty, \infty : m$ 

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \sin \gamma, \cos \gamma \}$$

 $\infty \cdot m, \infty : 2, m \cdot \infty : m$ 

$$\Phi \{ \dots, \sin \alpha, \cos \alpha, \sin 2\gamma, \cos 2\gamma \}$$

(4.1)

Точками отмечены пропущенные инвариантные аргументы  $1/3 \sqrt{3} E_1, \vartheta_e \sin \psi_e, \vartheta_e \cos \psi_e$ . Их можно заменить также на  $e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}$ .

5. Рассмотрим текстуры  $\infty$  и  $\infty : m$ , называемые обычно трансверсально-изотропным материалом. Рассмотрение полиномиальных функций ([1], стр. 36) и функций общего вида [8] компонент деформации приводит к следующим аргументам в обозначениях, принятых здесь:

$$I_e, II_e, III_e, e_{22}, e_{12}^2 + e_{23}^2$$

Из формул (1.8) — (1.10) следует

$$e_{22} = 1/3 E_1 + 1/3 \sqrt{6} \{ \vartheta_e \sin \psi_e (3/2 \cos^2 \gamma - 1/2) + 1/2 \sqrt{3} \vartheta_e \cos \psi_e \cos 2\alpha \sin^2 \gamma \}$$

$$e_{12}^2 + e_{23}^2 = (\vartheta_e \sin \psi_e)^2 \{ 3/8 \sin^2 2\gamma \} + (\vartheta_e \sin \psi_e) (\vartheta_e \cos \psi_e) \{ -1/4 \sqrt{3} \cos 2\alpha \sin^2 2\gamma \} +$$

$$+ (\vartheta_e \cos \psi_e)^2 \{ 1/8 \cos^2 2\alpha \sin^2 2\gamma + 1/2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \gamma \}$$

Таким образом, при обычном подходе для трансверсально-изотропного материала углы Эйлера могут быть аргументами  $\Phi$  лишь в составе выписанных двух комбинаций. При нашем подходе, как видно из таблицы (4.1),  $\Phi$  может иметь своими аргументами любые периодические функции  $\alpha$  и  $\gamma$ . Сказанное относится и к другим рассмотренным сингониям и текстурам.

Поступила 15 XII 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г р и н А., А д к и н с Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
2. Ч е р н ы х К. Ф. О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга. В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела (К 60-ти летию акад. В. В. Новожилова). Л., «Судостроение», 1970.
3. К о р н Г., К о р н Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
4. Ч е р н ы х К. Ф. О формах связи между симметричными тензорами в механике сплошных сред. Инж. ж. МТТ, 1967, № 3.

5. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2.
6. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
7. Truesdell C., Noll W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics, ed by Flügge S., vol. III/3, Berlin, Springer-Verlag, 1965.
8. Ericksen J. L., Rivlin R. S. Large Elastic Deformations of Homogeneous Anisotropic Elastic Materials. J. Rat. Mech. Anal., 1954, vol. 3, No. 3.

## УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НА ГРАНИЦЕ

Б. А. Васильев

(Ленинград)

Получено решение второй основной задачи теории упругости для однополостного гиперboloида вращения. В качестве примера решена задача об упругой деформации под действием осевой сосредоточенной силы, расположенной в центре симметрии гиперboloида, при условии, что граничная поверхность жестко закреплена.

В работе [1] показано, что использование вырожденных эллипсоидальных координат и обобщенного интегрального разложения Мелера — Фока позволяет получить решения основных задач математической теории упругости для областей, ограниченных двуполостным гиперboloидом вращения. В данной работе получены аналогичные результаты для случая однополостного гиперboloида вращения, причем используются интегральные разложения по сферическим функциям, рассмотренные в работах [2,3]. Характерной особенностью этих разложений является наличие дискретной части спектра собственных значений, поэтому в разложении произвольной функции наряду с интегралом имеются конечные алгебраические суммы.

1. Рассмотрим частные решения уравнений теории упругости [1]

$$\frac{1}{1-2\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = iu + jv + kw \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\mu$  — коэффициент Пуассона. Первые два решения находятся из уравнений

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Третье решение строится при помощи вектор-потенциала  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} [4(1-\mu)\mathbf{V} - \operatorname{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})] \quad (1.3)$$

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}, \quad \Delta \mathbf{V} = 0$$

Здесь  $G$  — модуль упругости.

Для решения уравнений (1.2), (1.3) используем вырожденные эллипсоидальные координаты, которые определяются равенствами [4].

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \quad (1.4)$$

$$(-\infty < \alpha < +\infty, \quad 0 < \beta < \beta_0, \quad -\pi < \varphi \leq +\pi)$$

Совокупность частных решений уравнения Лапласа, подходящих для рассмотрения краевых задач при граничных условиях, заданных на поверхности однополостного