СОХРАНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

А. М. Ковалев

(Донецк)

Рассматривается движение гиростата. Уравнения движения записаны в форме Гамильтона; изучается изменение интегралов движения в случаях Жуковского и Лагранжа при малых изменениях функции Гамильтона.

Пусть изучаемая механическая система зависит от некоторого набора параметров и при определенных значениях этих параметров интегрируема. Представляет интерес изучение движения этой системы при измененных значениях параметров, при которых система уже не является интегрируемой. Решение этой задачи сопряжено с преодолением принципиальных трудностей, связанных с проблемой малых знаменателей. В случаях, когда система гамильтонова и изменения параметров малы, эти трудности удалось преодолеть при помощи метода, предложенного А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом [1,2].

Примером применения этого метода в динамике твердого тела является решение В. И. Арнольда [3] — задачи о быстром вращении тяжелого несимметричного твердого тела, имеющего неподвижную точку.

§ 1. Рассмотрим гиростат — систему $n+1$ твердых тел $S_0, S_1, \ldots, S_n$, из которых тело S_0, имеющее неподвижную точку, служит носителем остальных тел. Несомые тела S_i закреплены без трения двумя точками оси l_i в теле S_0. При этом ось вращения l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является главной центральной осью тела S_i, а плоскость, проходящая перпендикулярно оси l_i через центр тяжести C_i тела S_i, является плоскостью равных моментов инерции B_i. С телом S_0 свяжем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с центром в неподвижной точке. Пусть $\mathbf{e}_i$ (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}) — единичный вектор, направленный по оси вращения тела S_i; $\mathbf{r}_i$ (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}) — вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела S_i; $\boldsymbol{\omega}$ $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела — носителя S_0; φ_i — угол поворота тела S_i вокруг оси l_i; m_i — масса тела S_i; A_i — момент инерции тела S_i относительно оси l_i; A_{ij}° — компоненты тензора инерции тела-носителя S_0.

Построим функцию Гамильтона рассматриваемой системы, считая, что тела S_i вращаются свободно, по инерции. Кинетическая энергия гиростата такова:

$$T = \frac{1}{2}(A_{11}\omega_1^2 + A_{22}\omega_2^2 + A_{33}\omega_3^2) + A_{23}\omega_2\omega_3 + A_{31}\omega_3\omega_1 + A_{12}\omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i\dot{\varphi}_i^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i(e_{i1}\omega_1 + e_{i2}\omega_2 + e_{i3}\omega_3)\dot{\varphi}_i \tag{1.1}$$

Здесь

$$A_{11} = A_{11}^{\circ} + \sum_{i=1}^{n} [m_i(r_{i2}^2 + r_{i3}^2) + B_i(e_{i2}^2 + e_{i3}^2) + A_i e_{i1}^2] \tag{1.2}$$

$$A_{12} = A_{12}^{\circ} - \sum_{i=1}^{n} [m_i r_{i1} r_{i2} + B_i e_{i1} e_{i2} - A_i e_{i1} e_{i2}] \quad (1\ 2\ 3)$$

Положение в пространстве тела-носителя S_0 определим углами Эйлера ψ, ϑ, φ, тогда положение изучаемой механической системы в каждый момент времени полностью определяется обобщенными координатами $\psi, \vartheta, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Величины $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ связаны с ψ, ϑ, φ формулами

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\cos\varphi \tag{1.3}$$

$$\omega_2 = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \quad \omega_3 = \dot{\psi}\cos\upsilon + \dot{\varphi}$$

Подставив (1.3) в (1.1), найдем выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и скорости, а затем и обобщенные импульсы

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \psi^{\cdot}} = (A_{11}\sin\varphi\sin\vartheta + A_{12}\cos\varphi\sin\vartheta + A_{13}\cos\vartheta)\,\omega_1 + (A_{21}\sin\varphi\sin\vartheta +$$
$$+ A_{22}\cos\varphi\sin\vartheta + A_{23}\cos\vartheta)\,\omega_2 + (A_{31}\sin\varphi\sin\vartheta + A_{32}\cos\varphi\sin\vartheta + A_{33}\cos\vartheta)\,\omega_3 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i\,(e_{i1}\sin\varphi\sin\vartheta + e_{i2}\cos\varphi\sin\vartheta + e_{i3}\cos\vartheta)\,\dot\varphi_i \qquad (1.4)$$
$$p_\vartheta = \partial T/\partial\vartheta^{\cdot} = (A_{11}\cos\varphi - A_{12}\sin\varphi)\,\omega_1 + (A_{21}\cos\varphi - A_{22}\sin\varphi)\,\omega_2 + (A_{31}\cos\varphi -$$
$$- A_{32}\sin\varphi)\,\omega_3 + \sum_{i=1}^{n} A_i\,(e_{i1}\cos\varphi - e_{i2}\sin\varphi)\,\dot\varphi_i$$
$$p_\varphi = \partial T/\partial\varphi^{\cdot} = A_{13}\omega_1 + A_{23}\omega_2 + A_{33}\omega_3 + \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i3}\dot\varphi_i$$
$$p_i = \partial T/\partial\dot\varphi_i = A_i\dot\varphi_i + A_i\,(e_{i1}\omega_1 + e_{i2}\omega_2 + e_{i3}\omega_3) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Подставим выражения $\dot\varphi_i = \dot\varphi_i\,(p_i)$, найденные из последних соотношений (1.4), в формулу (1.1), получим

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(A_{11} - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i1}^2\right)\omega_1^2 + \left(A_{22} - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i2}^2\right)\omega_2^2 + \left(A_{33} - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i3}^2\right)\omega_3^2 +\right.$$
$$+ \left(A_{12} - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i1}e_{i2}\right)\omega_1\omega_2 + \left(A_{13} - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i1}e_{i3}\right)\omega_1\omega_3 + \left(A_{23} - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i2}e_{i3}\right)\omega_2\omega_3 +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{A_i}$$

Приведем эту квадратичную форму к каноническому виду. Обозначив

$$A_1 = A_{11}' - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i1}'^2, \quad A_2 = A_{22}' - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i2}'^2, \quad A_3 = A_{33}' - \sum_{i=1}^{n} A_i e_{i3}'^2$$
$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i e_{i1}', \quad \lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i e_{i2}', \quad \lambda_3 = \sum_{i=1}^{n} p_i e_{i3}', \quad \Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{A_i} \qquad (1.5)$$

получим

$$T = {}^1/_2\,(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + \Lambda \qquad (1.6)$$

Исключим из (1.4) величины $\varphi_i^{\cdot}$, приняв во внимание (1.5)

$$p_\psi = (A_{1}\omega_1 + \lambda_1)\sin\varphi\sin\vartheta + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\cos\varphi\sin\vartheta + (A_3\omega_3 + \lambda_3)\cos\vartheta \qquad (1.7)$$
$$p_\vartheta = (A_1\omega_1 + \lambda_1)\cos\varphi - (A_2\omega_2 + \lambda_2)\sin\varphi, \quad p_\varphi = A_3\omega_3 + \lambda_3$$

Выразив из (1.7) ω_1, ω_2, ω_3 и подставив их в (1.6), получим выражение кинетической энергии через обобщенные импульсы p_ψ, p_ϑ, p_φ, обобщенные координаты ψ, ϑ, φ и величины λ_1, λ_2, λ_3, являющиеся функциями p_i. Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Gamma\,[(e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi)\sin\vartheta + e_3\cos\vartheta]$$
$$\left(\Gamma = Mg\,|\mathbf{r}_c|,\ M = \sum_{i=0}^{n} m_i,\ \mathbf{r}_c = |\mathbf{r}_c|\,\mathbf{e}\,(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{n} m_i\mathbf{r}_i\right)$$

поэтому функция Гамильтона для гиростата запишется так:

$$H = \frac{1}{2A_1A_2\sin^2\vartheta}\{A_2\,[(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)\sin\varphi + p_\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta - \lambda_1\sin\vartheta]^2 + A_1\,[(p_\psi -$$
$$- p_\varphi\cos\vartheta)\cos\varphi - p_\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta - \lambda_2\sin\vartheta]^2\} + \frac{(p_\varphi - \lambda_3)^2}{2A_3} + \Gamma\,[(e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi)\times$$
$$\times\sin\vartheta + e_3\cos\vartheta] + \Lambda \qquad (1.8)$$

Так как φ_i — циклические координаты, то p_i и величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ постоянны во все время движения. Вектор λ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ называют гиростатическим моментом. Он характеризует внутренние движения гиростата и равен сумме векторов моментов количеств абсолютного движения тел S_i относительно осей l_i соответственно. При обращении λ в нуль формула (1.8) определяет функцию Гамильтона для тяжелого твердого тела.

Отметим, что функция Гамильтона имеет тот же вид (1.8) и в случае, когда несомые тела S_i вращаются относительно тела-носителя S_0 с постоянной угловой скоростью $\varphi_i^{\cdot\circ}$. Коэффициенты в формуле (1.8) имеют при этом иной смысл, а именно: A_1, A_2, A_3 — коэффициенты приведенной к каноническому виду квадратичной формы относительно $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, определенной соотношениями (1.2)

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{\circ\cdot} e_{i1}, \quad \lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{\circ\cdot} e_{i2}, \quad \lambda_3 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{\circ\cdot} e_{i3}, \quad \Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i^{\circ\cdot 2}}{A_i}$$

В этом случае гиростатический момент λ равен сумме векторов моментов количеств относительного движения тел S_i относительно осей l_i соответственно.

§ 2. Из (1.8) видно, что ψ является циклической координатой и поэтому соответствующий импульс постоянен

$$p_\psi = k \tag{2.1}$$

При помощи интеграла (2.1) понижаем число степеней свободы системы до двух. В функции Гамильтона положим $p_\psi = k$

$$H = H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi, k) \tag{2.2}$$

и будем считать k параметром.

Рассмотрим два случая, в которых уравнения движения с функцией (2.2) интегрируются:

1°. Случай Лагранжа $A_1 = A_2$, $e_1 = e_2 = 0$, $\lambda_1=\lambda_2 = 0$. Четвертый интеграл

$$p_\varphi = m = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

2°. Случай Жуковского $\Gamma = 0$. Четвертый интеграл

$$p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}(p_\psi^2 + p_\varphi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos\vartheta) = M^2 = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

Функцию Гамильтона в этих случаях обозначим H_0, а движение гиростата с функцией H_0 назовем невозмущенным. Тогда функция

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \tag{2.5}$$

определяет возмущенное движение (εH_1 — малое возмущение).

Для возмущенного движения справедливы теоремы

Теорема 2.1. Если движение гиростата описывается функцией (2.5), причем H_0 — функция Гамильтона в случае Лагранжа, то для любого $\varkappa > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что, как только $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то $|\omega_3(t) - \omega_3(0)| < \varkappa$ для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 2.2. Если движение гиростата описывается функцией (2.5), причем H_0 — функция Гамильтона в случае Жуковского, то для любого $\varkappa > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что как только $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, то $|M(t) - M(0)| < \varkappa$ для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

§ 3. Докажем теорему 2.1. Функция H_0 для случая Лагранжа такова:

$$H_0 = \frac{1}{2A_1}\left[p_\vartheta^2 + \left(\frac{p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2\right] + \frac{(p_\varphi - \lambda_3)^2}{2A_3} + \Gamma e_3\cos\vartheta + \Lambda$$

Каноническим преобразованием введем переменные [4] действие-угол J_1, J_2, w_1, w_2. В новых переменных функция H_0 зависит только от J_1, J_2. Имеем

$$J_1 = \int\limits_0^{2\pi} m d\varphi = 2\pi m \tag{3.1}$$

$$J_2 = 2 \int\limits_{\vartheta_*}^{\vartheta^*} \left(2A_1 \left[H_0 - \Gamma e_3 \cos\vartheta \frac{(m-\lambda_3)^2}{2A_3} - \Lambda\right] - \frac{(k - m\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}\right)^{1/2} d\vartheta$$

Значения ϑ_*, ϑ^* есть границы изменения угла нутации ϑ. Случаи, в которых $\vartheta = \mathrm{const}$, исключены из рассмотрения. Положим в (3.1) $\cos\vartheta = u$ и обозначим

$$f(u) = 2A_1(1-u^2)\left[H_0 - \frac{(J_1 - 2\pi\lambda_3)^2}{8\pi^2 A_3} - \Gamma e_3 u - \Lambda\right] - \left(k - \frac{J_1}{2\pi} u\right)^2$$

$$u_1 = \cos\vartheta_*, \quad u_2 = \cos\vartheta^*$$

Тогда

$$J_2 = -2\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du \tag{3.2}$$

Формула (3.2) определяет H_0 как функцию J_1, J_2. Из уравнений движения находим

$$\omega_1 = \dot{w}_1 = \frac{1}{B}\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{A_1(1-u^2)(J_1 - 2\pi\lambda_3) - A_3 u(2\pi k - J_1 u)}{4\pi^2 A_3 (1-u^2)\sqrt{f(u)}} du$$

$$\omega_2 = \dot{w}_2 = -\frac{1}{2B}, \qquad B = A_1 \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

из очевидного выражения для отношения частот ω_1/ω_2 вытекает, что при фиксированном значении H_0 это отношение меняется с изменением J_1, J_2.

Невозмущенное движение можно интерпретировать [2] в фазовом пространстве как движение изображающей точки по тору с постоянной скоростью. Величины ω_1, ω_2 есть частоты изменения соответствующих угловых координат на торе, а J_1, J_2 сохраняют на торе постоянные значения.

Переходя к рассмотрению возмущенного движения, покажем, что выполнено условие невырожденности [2]

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j}\right| \neq 0 \tag{3.3}$$

и, следовательно, к функции (2.5) применима теорема А. Н. Колмогорова [1] о сохранении движений. Непосредственным вычислением находим

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j}\right| = \frac{1}{16\pi^2 A_1^2}\left[\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}\right]^{-4} \left[\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{(1-u^2)\,du}{(\sqrt{f(u)})^3} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{u^2(2\pi k - J_1 u)^2 du}{4\pi^2(1-u^2)(\sqrt{f(u)})^3} - \right.$$

$$\left. - \left(\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{u(2\pi k - J_1 u)\,du}{2\pi(\sqrt{f(u)})^3}\right)^2 + \frac{1}{A_3}\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{(1-u^2)\,du}{(\sqrt{f(u)})^3} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{A_1 + (A_3 - A_1)u^2}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}} du\right] \neq 0$$

Так как при фиксированном значении энергии H_0 отношение ω_1 / ω_2 меняется с изменением J_1, J_2, возмущенная система имеет инвариантные торы на каждом уровне энергии и в любой окрестности и любой точки фазового пространства, если $\varepsilon(u)$ достаточно мало. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, и поэтому инвариантные торы делят трехмерный инвариантный уровень энергии. Изображающая точка, если начальные значения не попадают на инвариантный тор возмущенной системы, остается между двумя близкими торами во все время движения.

Из теоремы А. Н. Колмогорова следует, что изменения $J_1(t)$, $J_2(t)$ за бесконечный промежуток времени будут сколь угодно малыми, если ε достаточно мало. Вспоминая, что $\omega_3 = J_1 / 2\pi$, получаем утверждение теоремы 2.1.

Для доказательства теоремы 2.2 воспользуемся геометрическим истолкованием Н. Е. Жуковского движения тела при $\Gamma = 0$. Это истолкование является распространением на случай гиростата второй интерпретации Пуансо решения Эйлера: движение тела представляется качением со скольжением некоторого жестко связанного с телом конуса по неподвижной плоскости. Как и в работе [3], можно ввести частоты движения ω_1, ω_2, перейти от канонических переменных ϑ, φ, p_ϑ, p_φ к переменным действие-угол и свести задачу к доказательству условия невырожденности (3.3). Условие (3.3) в данном случае выполнено, так как при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ это доказано в работе [3].

§ 4. Теоремы 2.1, 2.2 позволяют судить о поведении интегралов при движении тела для $t \in (-\infty, \infty)$ при конкретных возмущениях параметров, входящих в функцию Гамильтона. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.1. Если гиростатический момент λ является малой величиной, то гиростат Лагранжа движется таким образом, что во все время движения проекция угловой скорости на третью ось мало отличается от своего начального значения.

Теорема 4.2. Если расстояние центра тяжести гиростата от неподвижной точки мало, то величина вектора момента количества движения мало меняется во все время движения.

Теорема 4.3. Если гиростат приведен в быстрое вращение, то во все время движения величина вектора момента количества движения мало отличается от своего начального значения.

Для доказательства теоремы 4.1 достаточно в формуле (1.8) положить $A_1 = A_2$, $e_1 = e_2 = 0$, $\lambda_1 = \varepsilon\lambda_1^*$, $\lambda_2 = \varepsilon\lambda_2^*$, $\lambda_3 = \varepsilon\lambda_3^*$ и применить теорему 2.1. Функция H_0 будет функцией Гамильтона в случае Лагранжа, а величина H_1 имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{2A_1 \sin\vartheta}[\varepsilon \sin\vartheta(\lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2}) - 2(\lambda_1^* + \lambda_2^*)(p_\vartheta \cos\varphi \sin\vartheta + (p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta)\sin\varphi] + \\ + \frac{\varepsilon\lambda_3^{*2} - 2p_\varphi\lambda_3^*}{2A_3} + \varepsilon\Lambda^*$$

Если в формуле (1.8) считать $\Gamma = \varepsilon\Gamma^*$, то функцию H можно представить в виде (2.5), причем H_0 есть функция Гамильтона в случае Жуковского, и

$$H_1 = \Gamma^* \, [(e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi)\sin\vartheta + e_3 \cos\vartheta]$$

Применяя теорему 2.2, получаем утверждение теоремы 4.2.

Теорема 4.3 есть следствие теоремы 4.2, так как задача о быстром вращении гиростата математически эквивалентна задаче о движении гиростата в слабом поле тяготения.

Поступила 31 VIII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Усп. матем. н., 1963, т. 18, вып. 6.
3. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Усп. матем. н., 1963, т. 18, вып. 5.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. I. М., Физматгиз, 1958.