Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

СПЕКТР СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

А. Г. Асланян, В. Б. Лидский

(Москва)

Рассматривается связь между спектрами моментной и безмоментной систем дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания оболочек вращения.

Для собственных значений нижней серии доказывается осцилляционная теорема. Находятся условия, при которых нижняя серия частот безмоментной системы имеет конечную предельную точку.

Отысканию частот собственных колебаний тонкой оболочки методом малого параметра посвящен ряд работ А. Л. Гольденвейзера [1-3], Н. А. Алумяэ [4], П. Е. Товстика [5] и др.

В данной статье рассматриваются некоторые математические вопросы, связанные с проблемой отыскания собственных частот оболочки вращения. В этом случае собственные колебания с m волнами по параллели описываются следующей системой уравнений [1,5]

$$\begin{gathered}
-u'' - \frac{B'}{B}u' - \frac{m(1+\sigma)}{2B}v' - \left[\left(\frac{B'}{B}\right)' + (1-\sigma)\left(\frac{1}{R_1R_2} - \frac{m^2}{2B^2}\right)\right]u + \\
+\frac{mB'}{B^2}\frac{3-\sigma}{2}v + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right)w' + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)' w = \lambda u \\
-\frac{1-\sigma}{2}v'' + \frac{m}{B}\frac{(1+\sigma)}{2}u' - \frac{1-\sigma}{2}\frac{B'}{B}v' + \frac{mB'}{B^2}\frac{3-\sigma}{2}u - \qquad (0.1)\\
-\left[\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)' + \frac{1-\sigma}{R_1R_2} - \frac{m^2}{B^2}\right]v - \frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)w = \lambda v \\
\mu^4\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}B\frac{d}{ds} - \frac{m^2}{B}\right)\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}B\frac{d}{ds} - \frac{m^2}{B}\right)w - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds} - \\
-\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B}u - \frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\sigma}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right)w = \lambda w
\end{gathered}$$

Здесь u, v, w — проекции смещения точки на направления меридиана, параллели и нормали к оболочке соответственно; s — длина дуги меридиана, $a \leqslant s \leqslant b$; $B(s)$ — расстояние от меридиана до оси вращения; $R_1(s)$ и $R_2(s)$ — главные радиусы кривизны оболочки

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{B''}{\sqrt{1-B'^2}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt{1-B'^2}}{B}, \quad \lambda = (1-\sigma^2)\frac{\gamma}{E}p^2, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12} \qquad (0.2)$$

где E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона; γ — плотность, p — частота колебаний; h — толщина оболочки; μ — малый параметр. Систему (0.1) будем рассматривать при граничных условиях

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0 \qquad (0.3)$$

Это соответствует жесткому закреплению краев оболочки по двум параллелям.

Введя в рассмотрение вектор-функцию $f(s) = (u(s), v(s), w(s))$, можно сокращенно записать систему (0.1) в виде

$$L_\mu f = \lambda f \tag{0.4}$$

Оператор L_μ при граничных условиях (0.3) будет самосопряженным и положительно определенным, если скалярное произведение определено по формуле

$$(f_1, f_2) = \int_a^b B(s)(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)\, ds \tag{0.5}$$

Спектр оператора L_μ при $\mu \neq 0$ будет дискретен, его собственные числа $\lambda_k(\mu)$ положительны, при этом $\lim \lambda_k(\mu) = \infty$ при $k \to \infty$, собственные векторы $f_k(s, \mu)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ортогональны и для любой вектор-функции $g(s)$ — справедливо сходящееся по метрике (0.4) разложение [1]

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mu) f_k(s, \mu) \tag{0.6}$$

Положим в (0.4) $\mu = 0$. Так возникающий вырожденный (безмоментный) оператор L_0 оказывается самосопряженным, если в (0.3) отбросить граничные условия, налагаемые на $w(s)$. Действительно, как нетрудно проверить

$$(L_0 f_1,\ f_2) = (f_1,\ L_0 f_2)$$

при любых f_1 и f_2, удовлетворяющих условиям

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0 \tag{0.7}$$

Более того, оператор L_0 неотрицательно определен: при любом вещественном f, удовлетворяющем условиям (0.7)

$$\begin{aligned}(L_0 f, f) = \int_a^b B(s) \Big\{ \sigma \Big[u' + \frac{B'}{B} u + \frac{m}{B} v + \Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big) w \Big]^2 + \\ + (1-\sigma)\Big(u' + \frac{w}{R_1}\Big)^2 + (1-\sigma)\Big(\frac{B'}{B} u + \frac{m}{B} v + \frac{w}{R_2}\Big)^2 + \\ + \frac{1-\sigma}{2}\Big(-\frac{m}{B} u + v' - \frac{B'}{B} v\Big)^2 \Big\} ds \geqslant 0\end{aligned}$$

Спектр задачи

$$L_0 f = \lambda f \tag{0.8}$$

уже не будет чисто дискретным. В § 2 доказано, что отрезок $[\alpha, \beta]$ значений функции

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)} \qquad (a \leqslant s \leqslant b) \tag{0.9}$$

---

[1] Если $g(s)$ — гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условиям (0.3), то ряд (0.6) сходится равномерно по $s \in [a, b]$.

принадлежит непрерывному спектру задачи (0.8), (0.7) [4–6]. Вне отрезка $[\alpha, \beta]$ спектр дискретен. Концы отрезка α и β могут быть точками сгущения для собственных значений оператора L_0, меньших α и больших β. Полагая для определенности, что $\lambda = 0$ не будет точкой спектра [1] оператора L_0, можно показать (доказательство проведено в приложении) сильную сходимость оператора L_μ^{-1} к L_0^{-1} при $\mu \to 0$. Это значит, что при любой вектор-функции $g(s)$

$$\lim_{\mu\to 0}\|(L_\mu^{-1} - L_0^{-1})g\| = 0, \qquad \|g\| = (g, g)^{1/2} \tag{0.10}$$

Здесь скалярное произведение (g, g) определено по формуле (0.5). Указанное обстоятельство на основании одной теоремы общей теории возмущений [7], влечет за собой сильную сходимость спектральной функции оператора L_μ к спектральной функции безмоментного (вырожденного) оператора L_0. Отсылая читателя за подробностями к монографии [7], поясним сделанное здесь заключение следующим важным вытекающим из него следствием. Пусть λ_0 — изолированное собственное значение оператора L_0 (для простоты однократное), а $f_0(s)$ — соответствующая собственная функция. Пусть ε столь мало, что на отрезке Δ_ε $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ нет собственных значений L_0, кроме λ_0.

И пусть

$$g_\mu^*(s) = \sum_{\lambda_k(\mu)} c_k(\mu) f_k(s, \mu) \qquad (\lambda_k(\mu) \in \Delta_\varepsilon)$$

отрезок разложения $g(s)$ в ряд (0.6), соответствующий тем собственным значениям $\lambda_k(\mu)$, которые принадлежат Δ_ε (их число при $\mu \to 0$ может возрастать (!)). Тем не менее всегда

$$\lim \|g_\mu^*(s) - (g, f_0) f_0(s)\| = 0$$

В частности, при $g(s) = f_0(s)$ указанный отрезок ряда Фурье стремится в среднем квадратичном к $f_0(s)$.

Разумеется, отмеченный факт не содержит полной информации о превращении собственных значений $\lambda_k(\mu)$ в спектр оператора L_0. Этот вопрос нуждается в специальном рассмотрении. Укажем, однако, что для собственных значений задачи (0.7), (0.8), меньших числа $\alpha = \inf \varphi_1(s)$ (см. (0.9)), выполняются условия регулярного вырождения в смысле М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [8]. Поэтому для таких $\lambda_k(\mu)$ по аналогии с тем, как это в осесимметричном случае сделано Н. В. Харьковой [9], могут быть выписаны асимптотические формулы

$$\lambda_k(\mu) = \lambda_k^\circ + \mu\lambda_k' + o(\mu)$$

Данная статья посвящена изучению спектра безмоментной системы (0.7), (0.8). Большая часть приводимых ниже теорем является обобщением результатов, ранее полученных в случае осесимметричных колебаний

---

[1] В противном случае следует заменить L_μ и L_0 на $L_\mu + \varkappa$ и $L_0 + \varkappa$ соответственно, где $\varkappa > 0$.

Н. В. Харьковой, а также Н. В. Харьковой совместно с одним из авторов статьи [6,9].

В § 3 доказана осцилляционная теорема для системы (0.7), (0.8), а в § 4 найдены достаточные условия, при выполнении которых первая серия частот (наименьшая) — бесконечна.

§ 1. Задача Коши для безмоментной системы. В (0.1) положим $\mu = 0$. Введя вектор $y = (u, v)$, перепишем первые два уравнения системы (0.1) в виде

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y - \lambda A_3 y = A_4 d + A_5 e \tag{1.1}$$

Здесь d и e векторы

$$d = (w', 0), \; e = (w, w) \tag{1.2}$$

а через $A_k(s)$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ обозначены матрицы второго порядка, элементы которых легко восстанавливаются по системе (0.1). В частности

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -{}^1/_2(1-\sigma) \end{pmatrix}, \quad A_4 = -\begin{pmatrix} R_1^{-1} + R_2^{-1}\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Третье уравнение системы (0.1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$-b_0 u' - b_1 u - b_2 v + (\varphi_2(s) - \lambda) w = 0 \tag{1.4}$$

где мы ввели понятные обозначения для коэффициентов. В частности

$$b_0 = R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1}, \qquad \varphi_2(s) = R_1^{-2} + 2\sigma R_1^{-1} R_2^{-1} + R_2^{-2} \tag{1.5}$$

Легко проверить, что $\varphi_2(s) - \varphi_1(s) = (R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1})^2 \geqslant 0$, функция $\varphi_1(s)$ определена формулой (0.9). Условимся отрезок значений $\varphi_1(s)$ обозначать $[\alpha, \beta]$, пусть отрезок значений $\varphi_2(s)$ при $a \leqslant s \leqslant b$ будет $[\gamma, \delta]$. Предполагая, что коэффициенты системы (0.1) кусочно-непрерывны, докажем следующее утверждение

Лемма 1.1. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — произвольные вещественные числа и $s_0 \in [a, b]$. Тогда при $\lambda \overline{\in} [\alpha, \beta]$ и $\lambda \neq \varphi_2(s_0)$ существует и единственное решение $f(s, \lambda) = (u(s, \lambda), v(s, \lambda), w(s, \lambda))$ системы (0.8), удовлетворяющее условиям Коши [1]

$$u(s_0, \lambda) = r_1, \quad v(s_0, \lambda) = r_2, \quad u'(s_0, \lambda) = r_3, \quad v'(s_0, \lambda) = r_4 \tag{1.6}$$

Вектор-функция $f(s, \lambda)$ будет аналитической при всех комплексных $\lambda \overline{\in} [\alpha, \beta]$ и $\lambda \neq \varphi_2(s_0)$.

Доказательство. Выразим u и v из системы (1.1) через w и результат подставим в (1.4). В итоге возникает уравнение Вольтерра относительно $w(s, \lambda)$, которое позволит доказать лемму. Систему (1.1) сокращенно запишем в виде

$$l_\lambda y = p \tag{1.7}$$

Пусть

$$Y(s, \lambda) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

фундаментальная матрица размеров 4×4, составленная из решений системы

$$l_\lambda y = 0 \tag{1.9}$$

[1] Напомним, что система (0.8) получается из системы (0.1) при $\mu = 0$.

и удовлетворяющая условию $Y(s_0, \lambda) = E_4$ (E_4 — единичная матрица). Пусть

$$Z(s, \lambda) = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

обратная матрица к $Y(s, \lambda)$. Обе матрицы (1.8) и (1.10) будут целыми функциями λ. Нетрудно проверить, что решение $y(s, \lambda)$ системы (1.7), удовлетворяющее условиям (1.6), представимо в виде

$$y(s, \lambda) = y_0(s, \lambda) + \int_{s_0}^{s} C(s, t) A_0^{-1} p(t)\, dt \tag{1.11}$$

Здесь $y_0(s, \lambda)$ — решение однородной системы (1.9), удовлетворяющее условиям (1.6), а $C(s, t)$ — ядро Коши

$$C(s, t) = Y_1(s) Z_2(t) + Y_2(s) Z_4(t) \tag{1.12}$$

В правой части (1.11) возьмем по частям интеграл, содержащий w'. Имеем (1.2), (1.3), (1.5).

$$\int_{s_0}^{s} C(s, t) A_0^{-1} A_4(t)\, d(t)\, dt = \int_{s_0}^{s} C(s, t) \begin{pmatrix} b_0 w' \\ 0 \end{pmatrix} dt = -Y_2(s)\, b_0(s_0) \begin{pmatrix} w(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{s_0}^{s} K(s, t) \begin{pmatrix} w(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \tag{1.13}$$

$$K(s, t) = [(Y_1(s) Z_2(t) + Y_2(s) Z_4(t))\, b_0(t)]_t' \tag{1.14}$$

При этом использовались очевидные соотношения $C(s, s) = 0$, $C(s, s_0) = Y_2(s)$. Итак, имеем

$$y(s, \lambda) = y_0(s, \lambda) - Y_2(s)\, b_0(s_0) \begin{pmatrix} w(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{s_0}^{s} K(s, t) \begin{pmatrix} w(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{s_0}^{s} C(s, t) A_0^{-1} A_5(t) \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t) \end{pmatrix} dt \tag{1.15}$$

Дифференцируя это тождество, находим

$$y'(s, \lambda) = y_0'(s, \lambda) - Y_2'(s)\, b_0(s_0) \begin{pmatrix} w(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} - K(s, s) \begin{pmatrix} w(s) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{s_0}^{s} T(s, t) \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t) \end{pmatrix} dt \tag{1.16}$$

где через $T(s, t)$ обозначено непрерывное по s и t, целое по λ ядро. Найдем сейчас $K(s, s)$. В силу тождества

$$Y_1(s) Z_2(s) + Y_2(s) Z_4(s) = 0 \tag{1.17}$$

для $K(s, s)$ (1.14) имеем

$$K(s, s) = [Y_1(s) Z_2'(s) + Y_2(s) Z_4'(s)]\, b_0(s) \tag{1.18}$$

Дифференцируя (1.17) и пользуясь тем, что $Y_1'(s) Z_2(s) + Y_2'(s) Z_4(s) = E_2$ (1.8), (1.10), легко находим

$$K(s, s) = -b_0(s) E_2 \tag{1.19}$$

Из формул (1.15), (1.16) теперь следует, что

$$\begin{aligned} u(s, \lambda) &= u_0(s, \lambda) - u_1(s, \lambda)\, b_0(s_0)\, w(s_0) + \int_{s_0}^{s} K_1(s, t)\, w(t)\, dt \\ v(s, \lambda) &= v_0(s, \lambda) - v_1(s, \lambda)\, b_0(s_0)\, w(s_0) + \int_{s_0}^{s} K_2(s, t)\, w(t)\, dt \qquad (1.20) \\ u'(s, \lambda) &= u_0'(s, \lambda) - u_1'(s, \lambda)\, b_0(s_0)\, w(s_0) + b_0(s)\, w(s) + \int_{s_0}^{s} K_3(s, t)\, w(t)\, dt \end{aligned}$$

Здесь (u_1, v_1) — решение одномерной системы (1.7) такое, что

$$u_1(s_0) = v_1(s_0) = v_1'(s_0) = 0, \qquad u_1'(s_0) = 1 \tag{1.21}$$

а K_1, K_2 и K_3 — непрерывные по s и t и целые относительно λ ядра. Подставим u, v и u' из (1.20) в (1.4), получим следующее уравнение относительно $w(s, \lambda)$:

$$(\varphi_2(s) - \lambda)\, w(s, \lambda) + \int_{s_0}^{s} K_4(s, t)\, w(t, \lambda)\, dt = r(s, \lambda) \tag{1.22}$$

где

$$r(s, \lambda) = b_0(s)\, u_0'(s) + b_1(s)\, u_0(s) + b_2(s)\, v_0(s) -$$

$$- [b_0(s)\, u_1'(s) + b_1(s)\, u_1(s) + b_2(s)\, v_1(s)]\, b_0(s_0)\, w(s_0) \tag{1.23}$$

и

$$w(s_0) = \frac{b_0(s_0)\, r_3 + b_1(s_0)\, r_1 + b_0(s_0)\, r_2}{\varphi_2(s_0) - \lambda} \tag{1.24}$$

Формула (1.24) получается подстановкой $s = s_0$ в (1.22). Уравнение (1.22) при сделанных предположениях относительно λ всегда имеет единственное решение, которое аналитично по λ, поэтому, подставляя так найденную величину $w(s, \lambda)$ в (1.20), определим решение задачи Коши. Последнее очевидно единственно. Лемма доказана.

Замечание 1.1. Если r_1, r_2, r_3 таковы, что

$$b_0(s_0)\, r_3 + b_1(s_0)\, r_1 + b_2(s_0)\, r_2 = 0 \tag{1.25}$$

то решение задачи Коши регулярно и при $\lambda = \varphi_2(s_0)$.

Замечание 1.2. Если числа r_1, r_2, r_3 таковы, что выполнено (1.25), то задача Коши при $\lambda = \varphi_2(s_0)$ и условиях (1.6) имеет единственное решение, если дополнительно задать произвольное значение $w(s_0)$.

§ 2. Природа спектра в безмоментном случае. *Лемма* 2.1. Спектр краевой задачи (0.8), (0.7) веществен и неотрицателен. Весь отрезок $[\alpha, \beta]$ состоит из точек спектра. Вне отрезка $[\alpha, \beta]$ спектр дискретен (состоит из изолированных собственных значений конечной кратности). Предельными точками дискретного спектра будут $\lambda = +\infty$ и, быть может, концы отрезка $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$L_0 f - \lambda f = h \tag{2.1}$$

Здесь $h = (h_1(s), h_2(s), h_3(s))$ — произвольная вектор-функция, интегрируемая в квадрате; а $f = (u, v, w)$ — искомая вектор-функция, удовлетворяющая условиям (0.7). Систему (2.1) можно записать в виде

$$l_\lambda y = p + h^* \tag{2.2}$$

$$-b_0(s)\, u' - b_1(s)\, u - b_2(s)\, v + (\varphi_2(s) - \lambda)\, w = h_3$$

где оператор l_λ и вектор p те же, что и в (1.7), а $h^* = (h_1, h_2)$. Пусть $G(s, t, \lambda)$ — функция Грина оператора l_λ при граничных условиях (0.7), тогда

$$y = \int_a^b G(s, t, \lambda)\, [p(t) + h^*(t)]\, dt \tag{2.3}$$

Заметим, что

$$G(s,t,\lambda)=\begin{cases} Y_1(s)Z_2(t) & \text{при} \quad t\leqslant s \\ -Y_2(s)Z_4(t) & \text{при} \quad t\geqslant s \end{cases} \tag{2.4}$$

Через $Y_1(s)$ и $Y_2(s)$ обозначены 2×2 матрицы, удовлетворяющие уравнению $l_\lambda(y)=0$ и условиям

$$Y_1(b,\lambda)=0,\quad Y_1'(b,\lambda)=E_2,\quad Y_2(a,\lambda)=0,\quad Y_2'(a,\lambda)=E_2 \tag{2.5}$$

Через Z_2 и Z_4 обозначены блоки матрицы $Z(t,\lambda)$, обратной к

$$Y(t,\lambda)=\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{pmatrix}$$

Матрица $Z(t,\lambda)$ мероморфна, ее полюса — точки спектра оператора l_λ. Они положительны и стремятся к $+\infty$.

Интегрируя в (2.3) член, содержащий w' по частям, и подставляя так полученное выражение для u и v во второе уравнение (2.2), получаем аналогично (1.22)

$$(\varphi_2(s)-\lambda)w(s)+\int_a^b Q_1(s,t,\lambda)w(t)\,dt=\int_a^b Q_2(s,t,\lambda)h_1(t)\,dt+\int_a^b Q_3(s,t,\lambda)h_2(t)\,dt+h_3(s). \tag{2.6}$$

Здесь

$$Q_i(s,t,\lambda)\qquad (i=1,2,3) \tag{2.7}$$

непрерывные по s и t и мероморфные по λ функции с полюсами в точках спектра оператора l_λ.

Таким образом, вне этих полюсов уравнение (2.6) ограниченно разрешимо [1] при любой правой части h тогда и только тогда, когда ограниченно разрешимо уравнение (2.1), и, следовательно, вне полюсов $G(s,t,\lambda)$ спектры уравнений (2.1) и (2.6) совпадают. Используя известные теоремы функционального анализа [10], нетрудно показать, что спектр уравнения (2.6) состоит из отрезка $[\alpha,\beta]$ и дискретного множества.

Вещественность спектра следует из самосопряженности оператора L_0, неотрицательность — из условия $L_0\geqslant 0$. Тот факт, что $\lambda=+\infty$ всегда будет предельной точкой спектра оператора L_0, легко устанавливается исследованием асимптотики решений системы (0.8) при $\lambda\to+\infty$. Лемма 2.1 доказана.

Остановимся подробнее на дискретном спектре оператора L_0. Пусть

$$f^{(1)}(s,\lambda),\qquad f^{(2)}(s,\lambda) \tag{2.8}$$

два решения уравнения (0.8), удовлетворяющие начальным условиям Коши

$$\begin{aligned} &u_1(a,\lambda)=0,\quad v_1(a,\lambda)=0,\quad u_1'(a,\lambda)=1,\quad v_1'(a,\lambda)=0 \\ &u_2(a,\lambda)=0,\quad v_2(a,\lambda)=0,\quad u_2'(a,\lambda)=0,\quad v_2'(a,\lambda)=1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

при всех

$$\lambda\in[\alpha,\beta],\quad \lambda\neq\varphi_2(a) \tag{2.10}$$

Учитывая лемму 1.1 легко показать, что дискретный спектр оператора L_0 на множестве (2.10) совпадает с нулями функции

$$\Delta(b,\lambda)=\operatorname{Det}\begin{pmatrix} u_1(b,\lambda) & u_2(b,\lambda) \\ v_1(b,\lambda) & v_2(b,\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

[1] Неоднородное уравнение (2.1) ограниченно разрешимо при данном λ, если при любой гладкой правой части $h(s)$ оно имеет гладкое решение $f(s)$, удовлетворяющее граничному условию (0.7) и при этом $(f,f)\leqslant C_0(h,h)$, где постоянная C_0 не зависит от h. Аналогично для уравнения (2.6). Спектр совпадает с множеством тех значений λ, при которых нарушается ограниченная разрешимость.

которая аналитична на множестве (2.10) и имеет разве лишь полюс в точке $\lambda = \varphi_2(a)$.

Отметим в заключение, что все собственные значения, удовлетворяющие условию (2.10), не более чем двукратны, поскольку в силу леммы 1.1 каждая собственная функция $f(s, \lambda_k)$ будет линейной комбинацией решений (2.8) с $\lambda = \lambda_k$.

Точка $\lambda = \varphi_2(a)$ может быть не более, чем трехкратным собственным значением (замечание 1.2 к лемме 1.1).

§ 3. Осцилляционная теорема. Исследуем нули функции

$$\Delta(s, \lambda) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} u_1(s, \lambda) & u_2(s, \lambda) \\ v_1(s, \lambda) & v_2(s, \lambda) \end{pmatrix} \qquad (a \leqslant s \leqslant b) \tag{3.1}$$

где $u_i(s, \lambda)$ и $v_i(s, \lambda)$ — компоненты решений (2.8).

Лемма 3.1. При фиксированном $a < s_0 \leqslant b$ нули функции $\Delta(s_0, \lambda)$ в области

$$\lambda \in [\alpha, \beta], \qquad \lambda \neq \varphi_2(a) \tag{3.2}$$

не более, чем двукратны. Иначе говоря, если $\Delta(s_0, \lambda_0) = 0$ и $(\partial/\partial\lambda)\times$ $\times\ \Delta(s_0, \lambda_0) = 0$, то $(\partial^2/\partial\lambda^2)\,\Delta(s_0, \lambda_0) \neq 0$. При этом кратность λ_0 как корня уравнения $\Delta(s_0, \lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения дифференциального уравнения

$$L_0 f = \lambda f \qquad (a \leqslant s \leqslant s_0) \tag{3.3}$$

с граничными условиями

$$u(a) = u(s_0) = v(a) = v(s_0) = 0 \tag{3.4}$$

Приводим лишь идею доказательства. Тот факт, что нули функции $\Delta(s_0, \lambda)$ будут собственными значениями задачи (3.3), (3.4) очевиден. Бесконечно малым возмущением младших членов уравнения $L_0 f = \lambda f$ (даже не содержащих производных) можно сделать все нули $\Delta(s_0, \lambda)$ в окрестности точки λ_0 простыми. Число этих нулей равно по теореме Руше кратности корня λ_0 уравнения $\Delta(s_0, \lambda) = 0$. Возмущение при этом нетрудно подобрать так, чтобы все собственные значения краевой задачи также стали простыми. Согласно известной теории возмущений, число так возникающих собственных значений равно кратности λ_0, как собственного значения. Отсюда следует лемма 3.1. Справедливо далее следующее предложение.

Лемма 3.2. Пусть λ_0 однократный корень уравнения

$$\Delta(s_0, \lambda) = 0 \tag{3.5}$$

в области (3.2). Тогда в окрестности точки $s = s_0$ уравнение $\Delta(s, \lambda) = 0$ определяет одну дифференцируемую функцию $\lambda = \lambda(s)$ $(\lambda(s_0) = \lambda_0)$ и при этом

$$\left.\frac{d\lambda}{ds}\right|_{s=s_0} = -B(s_0)\left\{\frac{\varphi_1(s_0) - \lambda_0}{\varphi_2(s_0) - \lambda_0} u_0'^2(s_0) + \frac{1-\sigma}{2} v_0'^2(s_0)\right\} \tag{3.6}$$

Здесь $f_0(s) = (u_0(s), v_0(s), w_0(s))$ — собственный вектор задачи (3.3), (3.4), нормированный условием

$$\int_a^b B(s)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)\, ds = 1 \tag{3.7}$$

При $\lambda_0 = \varphi_2(s_0)$ первое слагаемое в фигурной скобе (3.6) следует заменить нулем.

Замечание 3.1. Если λ_0 — двукратный корень уравнения (3.5), то уравнение $\Delta(s, \lambda) = 0$ определяет две дифференцируемые функции $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ такие, что $\lambda_1(s_0) = \lambda_2(s_0) = \lambda_0$. Для производных $d\lambda_1/ds$ и $d\lambda_2/ds$ справедлива формула (3.6), в правой части которой появляются два ортогональных один другому собственных векторов задачи (3.3), (3.4), соответствующих $\lambda = \lambda_0$.

Доказательство. Наряду с задачей (3.3), (3.4) рассмотрим «возмущенную» задачу

$$L_0(z) f(z) = \lambda f(z) \qquad (a \leqslant z \leqslant s_0 + \varepsilon) \tag{3.8}$$

Здесь условия на концах отрезка $[a, s_0 + \varepsilon]$ предполагаются такими же, что и в (3.4), ε — малый параметр. Воспользуемся тем, что корни уравнения $\Delta(s_0 + \varepsilon, \lambda) = 0$ представляют собой собственные значения задачи (3.8).

Производные собственных значений этой задачи по параметру ε могут быть найдены при помощи формул теории возмущений линейных операторов. Сделаем подстановку в (3.8)

$$z = s + \varepsilon \frac{s - a}{s_0 - a} \qquad (a \leqslant s \leqslant s_0) \tag{3.9}$$

В результате оператор $L_0(z)$ в (3.8) можно представить в виде

$$L_0(z) = L_0(s) + \varepsilon L^{(1)}(s) + O(\varepsilon^2) \quad (a \leqslant s \leqslant s_0) \tag{3.10}$$

По известным теоремам теории возмущений [7] собственные значения краевой задачи (3.8) суть дифференцируемые функции ε и справедлива формула [1]:

$$\left.\frac{d\lambda}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (L^{(1)} f_0, f_0) \tag{3.11}$$

где $f_0(s)$ — нормированный собственный вектор оператора $L_0(s)$ $(a \leqslant s \leqslant s_0)$. Равенство (3.11) справедливо и в случае, когда λ_0 — двукратная точка спектра, для обеих функций $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 1, 2)$. Для вычисления правой части (3.11) полезно в тождестве

$$L_0(z) f_0(z) = \lambda_0 f_0(z) \qquad (a \leqslant z \leqslant s_0) \tag{3.12}$$

сделать подстановку (3.9). Отделив в так полученном соотношении члены первого порядка по ε, найдем, что

$$L^{(1)}(s) f_0(s) + L_0(s)\left(f_0'(s)\frac{s-a}{s_0-a}\right) = \lambda_0 f_0'(s)\frac{s-a}{s_0-a} \tag{3.13}$$

Отсюда, согласно (3.11)

$$\left.\frac{d\lambda}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -(L_0(s)\, g, f_0) + \lambda_0 (g, f_0) \qquad g(s) = f_0'(s)\,\frac{s-a}{s_0-a} \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\lambda_0(g, f_0) = (g, L_0(s) f_0)$$

Так как далее $g(s)$ лишь на правом конце отрезка $[a, s_0]$ не удовлетворяет граничным условиям (3.4), то в правой части (3.14) при интегрировании по частям первого слагаемого сохранятся лишь внеинтегральные члены при $s = s_0$. Обратившись к явным выражениям, стоящим в левой части (0.1), легко обнаружить, что отличными от

[1] Под $O(\varepsilon^2)$ в формуле (3.10) понимается дифференциальный оператор, содержащий множитель ε^2. Можно показать, что операторы $L_0^{-1}(s) L^{(1)}(s)$ и $L_0^{-1}(s)\,O(\varepsilon^2)$ являются ограниченными. Это позволяет применить теорему о возмущенных собственных значениях из цитируемой книги [7].

нуля будут вклады, полученные интегрированием по частям выражений

$$-\int_a^{s_0} B(s)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B}\frac{d(Bg_1)}{ds}\right)u_0(s)\,ds$$

$$-\int_a^{s_0}\frac{1-\sigma}{2}B\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B}\frac{d}{ds}(Bg_2)\right)v_0(s)\,ds$$

$$-\int_a^{s_0} B(s)\,(R_1^{-1}(s)+\sigma R_2^{-1})\,\frac{dg_1}{ds}\,w_0(s)\,ds$$

Сложив их, получаем:

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=-B(s_0)\left(u_0'^2(s_0)+\frac{1-\sigma}{2}v_0'^2(s_0)-u_0'(s_0)\,b_0(s_0)\,w_0(s_0)\right)$$

Подставим сюда $w_0(s)$ из тождества (1.4), при условии $\lambda_0\neq\varphi_2(s_0)$ получим формулу (3.6). Если же $\lambda_0=\varphi_2(s_0)$, то $u_0'(s_0)=0$ и в фигурной скобке (3.6) сохранится лишь второе слагаемое. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Пусть $\lambda\in[\alpha,\delta]$. Тогда все корни уравнения (3.16) на полуинтервале $(a, b]$ изменения s с уменьшением λ смещаются вправо.

Доказательство. Заметим, что если $\lambda\in[\alpha,\delta]$, то в формуле (3.6) оба слагаемых неотрицательны, и в силу леммы 1.1, хотя бы одно из них отлично от нуля. Поэтому при условии $\lambda\in[\alpha,\delta]$

$$d\lambda/ds<0 \tag{3.15}$$

Следовательно, в некоторой достаточно малой двумерной окрестности точки (s_0,λ_0) все точки (s,λ), удовлетворяющие уравнению

$$\Delta(s,\lambda)=0 \tag{3.16}$$

образуют графики не более двух гладких монотонно убывающих функций $\lambda(s)$. Обратные этим функциям величины $s(\lambda)$ непрерывны и убывают, что приводит к доказательству леммы 3.3.

Заметим попутно, что при фиксированном $\lambda<0$ уравнение (3.16) вообще не имеет корней на полуинтервале $s\in(a,b]$. Это следует из положительной определенности оператора (3.3) при любом $a<s_0\leqslant b$. В заключение дополним наши сведения о нулях уравнения (3.16) следующим замечанием.

Лемма 3.4. Все нули уравнения (3.16) при фиксированном $\lambda\in[\alpha,\delta]$ не более чем двукратны: если

$$\Delta(s_0,\lambda_0)=0,\qquad \partial\Delta/\partial s\,(s_0,\lambda_0)=0 \tag{3.17}$$

то

$$\partial^2/\partial s^2\,\Delta(s_0,\lambda_0)\neq 0 \tag{3.18}$$

При этом двукратному корню s_0 соответствует двукратная точка спектра задачи (3.3), (3.4).

Доказательство. Если выполнено (3.17), то из очевидного равенства $\Delta_s'+\Delta_\lambda'\cdot\lambda_s'=0$ следует с учетом $\lambda_s'\neq 0$, что $\Delta_\lambda'=0$. Поскольку $\Delta_{\lambda\lambda}''\neq 0$ (лемма 3.1), то отрицательные значения обеих производных в (3.6) совпадают с корнями квадратного уравнения $\Delta_{ss}''+2\Delta_{s\lambda}''\xi+\Delta_{\lambda\lambda}''\xi^2=0$. Отсюда следует (3.18).

Перенумеруем собственные значения задачи (0.8), (0.7), меньшие α [6], в порядке возрастания с учетом кратности

$$\lambda_0^{(1)}\leqslant\lambda_1^{(1)}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k^{(1)}\leqslant\ldots \tag{3.19}$$

Пусть $n_1(\lambda)$ — число нулей функции $\Delta(s, \lambda)$ при фиксированном λ на полуинтервале $(a, b]$. Итогом проведенных рассмотрений будет следующая осцилляционная теорема.

Теорема 3.1. а) Число собственных значений задачи (0.8), (0.7), не превосходящих λ, равно $n_1(\lambda)$ $(\lambda < \alpha)$.

б) Первая серия бесконечна тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\lambda<\alpha} n_1(\lambda) = \infty$$

в) $\lambda_k^{(1)}$ является кратным собственным значением тогда и только тогда, когда $s = b$ есть двукратный нуль функции $\Delta(s, \lambda_k^{(1)})$.

г) Если $\lambda_k^{(1)}$ — простое собственное значение, то $\Delta(s, \lambda_k^{(1)})$ имеет на интервале (a, b) ровно k нулей с учетом кратности.

§ 4. Условия бесконечности первой серии. В этом параграфе будут указаны условия, налагаемые на $B(s)$, при которых задача (0.8), (0.7) приводит к бесконечной серии собственных чисел, меньших α, где

$$\alpha = \inf \varphi_1(s) \qquad (s \in [a, b]) \tag{4.1}$$

Соответствующие теоремы являются обобщением условий Н. В. Харьковой в осесимметричном случае [6,9].

Выразив $w(s)$ из третьего уравнения системы (0.1) через u, v и u' и подставив в первые два, мы придем к системе двух уравнений

$$\begin{gathered} C_1 u'' + C_2 u' + C_3 v' + C_4 u + C_5 v = 0 \\ D_1 v'' + D_2 u' + D_3 v' + D_4 u + D_5 v = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь C_i и D_i — функции s и λ, явные выражения которых пока не приводятся. Из осцилляционной теоремы следует, что первая серия может быть бесконечной лишь тогда, когда система (4.2) имеет при $\lambda = \alpha$ решение с бесконечным числом нулей. Это обстоятельство не противоречит теореме единственности, так как при $\lambda = \alpha$ система (4.2) имеет особенность. Действительно, нетрудно проверить, что

$$C_1(s, \alpha) = B(s) \frac{\varphi_1(s) - \alpha}{\varphi_2(s) - \alpha}$$

и поэтому те точки s_0, для которых

$$\varphi_1(s_0) = \alpha \tag{4.3}$$

будут особыми.

Займемся изучением асимптотики решений системы (4.2) в окрестности особой точки s_0. Заметим, что все функции C_i и D_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ являются гладкими функциями s и $D_1(s, \alpha) \neq 0$.

Если s_0 является концом отрезка $[a, b]$ и $\varphi_1'(s_0) \neq 0$, то, как нетрудно показать, решения системы (4.2) имеют лишь конечное число нулей. Бесконечная осцилляция возможна лишь при условии

$$\varphi_1'(s_0) = 0 \tag{4.4}$$

что в силу (4.1) всегда имеет место, если s_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Напомним, что $\varphi_1(s) = (1 - \sigma)^2 B^{-2}(1 - B'^2)$.

Пусть

$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 (s - s_0) + {}^1/_2\, \beta_2 (s - s_0)^2 + {}^1/_6 \beta_3 (s - s_0)^3 + \ldots \tag{4.5}$$

где мы ввели понятные обозначения для производных функции $B(s)$ в точке s_0. Заметим, что $|\beta_1| = |B'(s_0)| \leqslant 1$. Для $\varphi_1(s)$ имеем разложение

$$\varphi_1(s) = \frac{1 - \sigma^2}{\beta_0^2} \{\omega_0 + \omega_1 (s - s_0) + {}^1/_2\, \omega_2 (s - s_0)^2 + \ldots\} \tag{4.6}$$

где

$$\omega_0 = 1 - \beta_1^2, \qquad \omega_1 = -2\beta_1 \left(\beta_2 + \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_0}\right) \tag{4.7}$$

$$\omega_2 = 2\left[-\beta_2^2 - \frac{\beta_2}{\beta_0}(1 - 5\beta_1^2) + \frac{3(1 - \beta_1^2)\beta_1^2}{\beta_0^2} - \beta_1\beta_3\right]$$

Условие (4.4) выполняется, таким образом, в двух случаях:

$$\text{а)}\ \ \beta_1 = 0 \tag{4.8}$$

$$\text{б)}\ \ \beta_2 + (1 - \beta_1^2)/\beta_0 = 0 \tag{4.9}$$

которые мы рассмотрим в отдельности. Предположим пока, что

$$\omega_2 \neq 0 \tag{4.10}$$

Разложим коэффициенты системы (4.2) по степеням $s - s_0 = t$ в окрестности точки s_0. В результате получим

$$\begin{aligned} &(a_1 t^2 + o(t^2))\, u'' + (2a_1 t + o(t))\, u' + (a_3 + o(1))\, u + \\ &\qquad + (b_1 + o(1))\, v' + (b_2 + o(1))\, v = 0 \\ &(-b_1 + o(1))\, u' + (c_2 + o(1))\, u + d_1 v'' + (d_2 + o(1))\, v' + \\ &\qquad + (d_3 + o(1))\, v = 0, \quad t = s - s_0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Выражения для коэффициентов тейлоровских разложений приведем ниже. Подстановкой $u = y_1$, $v = y_2$, $u_t' = 1/t\,(y_3)$, $v_t' = y_4$ сведем систему (4.11) к системе четырех уравнений первого порядка, которую запишем сразу в матрично-векторном виде

$$y' = \left(\frac{1}{t}\,\Omega_0 + \Omega_1 + o(1)\right) y \tag{4.12}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ — искомый вектор-столбец, Ω_0, Ω_1 — постоянные матрицы, причем

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3/a_1 & -b_2/a_1 & -1 & -b_1/a_1 \\ 0 & 0 & 2b_1/(1-\sigma) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Det}(\Omega_0 - \mu E_4) = \mu^2 \left\{\mu^2 + \mu + \frac{2b_1^2}{a_1(1-\sigma)} + \frac{a_3}{a_1}\right\} \tag{4.14}$$

Пусть μ_1, μ_2, $\mu_3 = \mu_4 = 0$ — корни характеристического полинома (4.14). Соответствующие собственные векторы матрицы Ω_0 имеют вид

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mu_1 \\ \dfrac{2b_1}{1-\sigma} \end{pmatrix}, \quad f^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mu_2 \\ \dfrac{2b_1}{1-\sigma} \end{pmatrix}, \quad f^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ -a_3 \end{pmatrix}, \quad f^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ -b_2 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Нетрудно показать, что система (4.12) обладает четырьмя линейно независимыми решениями вида

$$y^{(1)}(t) = t^{\mu_1}f^{(1)}(1 + o(1)), \quad y^{(2)}(t) = t^{\mu_2}f^{(2)}(1 + o(1)), \quad y^{(3)}(t) = f^{(3)} + o(1)$$
$$y^{(4)}(t) = f^{(4)} + o(1) \qquad (4.16)$$

Бесконечная осцилляция в окрестности точки $s = s_0$ возможна лишь при условии невещественности корней μ_1 и μ_2 полинома (4.14). Соответствующее условие имеет вид

$$D = a_1^2 - 4a_1(b_1^2/d_1 + a_3) < 0 \qquad (4.17)$$

Докажем теперь следующее предложение.

Теорема 4.1. Пусть в некоторой точке $s = s_0$ $\varphi_1(s_0) = \alpha > 0$ и выполнено условие а) $B'(s_0) = 0$. Положим

$$B(s) = B_0 - \frac{k}{2}(s - s_0)^2 + o((s - s_0)^3)$$

и пусть

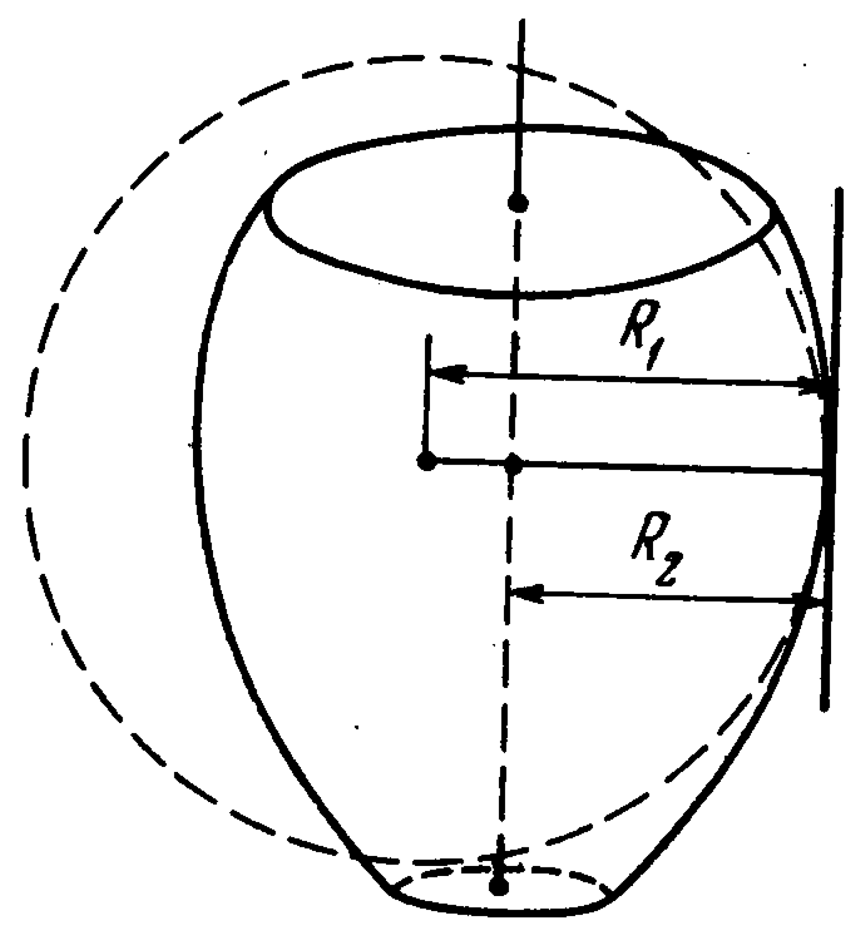
$$0 < kB_0 < 1 \qquad (4.18)$$

Тогда при условии

$$9(kB_0)^2 + (12\sigma - 1)kB_0 + 4\sigma^2 + 8m^2(1 - kB_0) > 0 \qquad (4.19)$$

α является предельной точкой дискретного спектра задачи (0.8), (0.7) (первая серия бесконечна).

Замечание 4.1. Здесь $k = |B''(s_0)|$ — кривизна меридиана в точке $s = s_0$. Неравенство (4.18) означает, что при $s = s_0$ абсцисса меридиана достигает максимума, а центр кривизны лежит по другую сторону от оси вращения (фиг. 1).



Фиг. 1

Замечание 4.2. При $\sigma > 1/_{24}$ условие (4.19) является излишним.

Доказательство. При условиях (4.8) и (4.18) справедливо (4.10) (см. (4.7)) и для коэффициентов тейлоровских разложений в (4.11) имеем

$$a_1 = \frac{(1 - \sigma^2)k(1 - kB_0)}{B_0(B_0k + \sigma)^2} \neq 0$$

$$a_3 = -\frac{m^2(1 - \sigma)^2}{2B_0^2} + (1 - \sigma^2)\frac{2B_0k + \sigma}{B_0^2(B_0k + \sigma)} \qquad (4.20)$$

$$b_1 = \frac{m(1 - \sigma)}{2B_0(B_0k + \sigma)}(B_0k - \sigma - 2) \neq 0, \qquad d_1 = \frac{1 - \sigma}{2}$$

а b_2, c_2, d_2 и d_3 — некоторые несущественные в рассматриваемом вопросе постоянные. Легко проверить, что условие осцилляционности (4.17) принимает вид

$$-\frac{(1 - \sigma^2)^2(1 - kB_0)k}{B_0^3(B_0k + \sigma)^4}\{9(kB_0)^2 + (12\sigma - 1)kB_0 + 4\sigma^2 + 8m^2(1 - kB_0)\} < 0$$

что вследствие (4.18) эквивалентно требованию (4.19). Поэтому уравнение (4.14) имеет два невещественных корня

$$\mu_1 = \bar{\mu}_2 = -1/_2 + i\beta, \qquad \beta \neq 0 \qquad (4.21)$$

Предположим для простоты изложения, что $s_0 \neq a$ и на полуинтервале $[a, s_0)$ система (4.2) не имеет особых точек [1] $C_1(s, \alpha) \neq 0$ при $a \leqslant s < s_0$. Пусть матрица

$$Y(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) & Y_2(s) \\ Y_3(s) & Y_4(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [a, s_0) \tag{4.22}$$

составлена из решений (4.16). Очевидно $Y(a)$ невырождена. Положим

$$Y^{-1}(a) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

и через $\Delta(s)$ обозначим верхний правый минор матрицы $Y(s)Y^{-1}(a)$. Нетрудно проверить, что при $s \to s_0 - 0$

$$\Delta(s) = \operatorname{Re}[(s - s_0)^{\mu_1}(b_{11}d_{22} - b_{12}d_{21})\, b_1] + o(1) \tag{4.23}$$

где b_{ij} и d_{ij} — элементы матриц B и D, а $b_1 \neq 0$ (4.20). Если теперь

$$b_{11}d_{22} - b_{12}d_{21} \neq 0 \tag{4.24}$$

то в левой полуокрестности точки s_0 функция $\Delta(s)$ имеет бесконечно много нулей.

Пусть N — произвольное целое число. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы функция $\Delta(s)$ имела на полуинтервале $[a, s_0 - \delta)$ N нулей. После этого выберем $\lambda < \alpha$ столь близким к α, чтобы введенная формулой (3.1) функция $\Delta(s, \lambda)$ для системы (4.2) имела на полуинтервале $[a, s_0 - \delta)$ N нулей. Это можно сделать на основании теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра λ. Поскольку N произвольно, то, согласно теореме 3.1, первая серия бесконечна и теорема 4.1 доказана.

Остается заметить, что условие (4.24) можно отбросить. В самом деле, можно показать, что всегда существует сколь угодно малое возмущение системы (0.1) с помощью неотрицательно определенной матрицы, равной нулю вне правой ε — полуокрестности точки a, такое, что у возмущенной системы условие (4.24) будет выполнено. Следовательно, возмущенная система будет иметь бесконечную первую серию. Поскольку указанное возмущение увеличивает собственные значения, то тем самым устанавливается, что и невозмущенная исходная задача имеет бесконечную первую серию.

Справедливо далее следующее предложение.

Теорема 4.2. Пусть в некоторой точке $s = s_0$ $\varphi_1(s_0) = \alpha > 0$ и выполнено условие б)

$$\beta_2\beta_0 + 1 - \beta_1^2 = 0 \tag{4.25}$$

где β_s — коэффициенты разложения Тейлора функции $B(s)$ в окрестности $s = s_0$ (4.5). Пусть, кроме того [2]

$$\omega_2 = \frac{\beta_2\beta_1^2 - \beta_0\beta_1\beta_3}{\beta_0} \neq 0 \tag{4.26}$$

[1] Читатель сможет легко распространить приводимое ниже доказательство на общий случай.

[2] Поскольку $\alpha = \operatorname{Inf} \varphi_1(s)$, то условие (4.26) влечет за собой неравенство $\omega_2 > 0$.

Тогда α является предельной точкой дискретного спектра задачи (0.7), (0.8).

Доказательство. При условии (4.25), как уже отмечалось, $\varphi_1'(s_0) = 0$ (4.7). При этом, как можно проверить, тейлоровские коэффициенты в системе (4.11) имеют вид

$$a_1 = \frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

$$a_3 = (1-\sigma)\left[(2+\sigma)\frac{\omega_0}{\beta_0^2} + \frac{\omega_2}{2(1+\sigma)\,\omega_0}\right] - \frac{(1-\sigma)\,m^2}{2\beta_0^2} \tag{4.27}$$

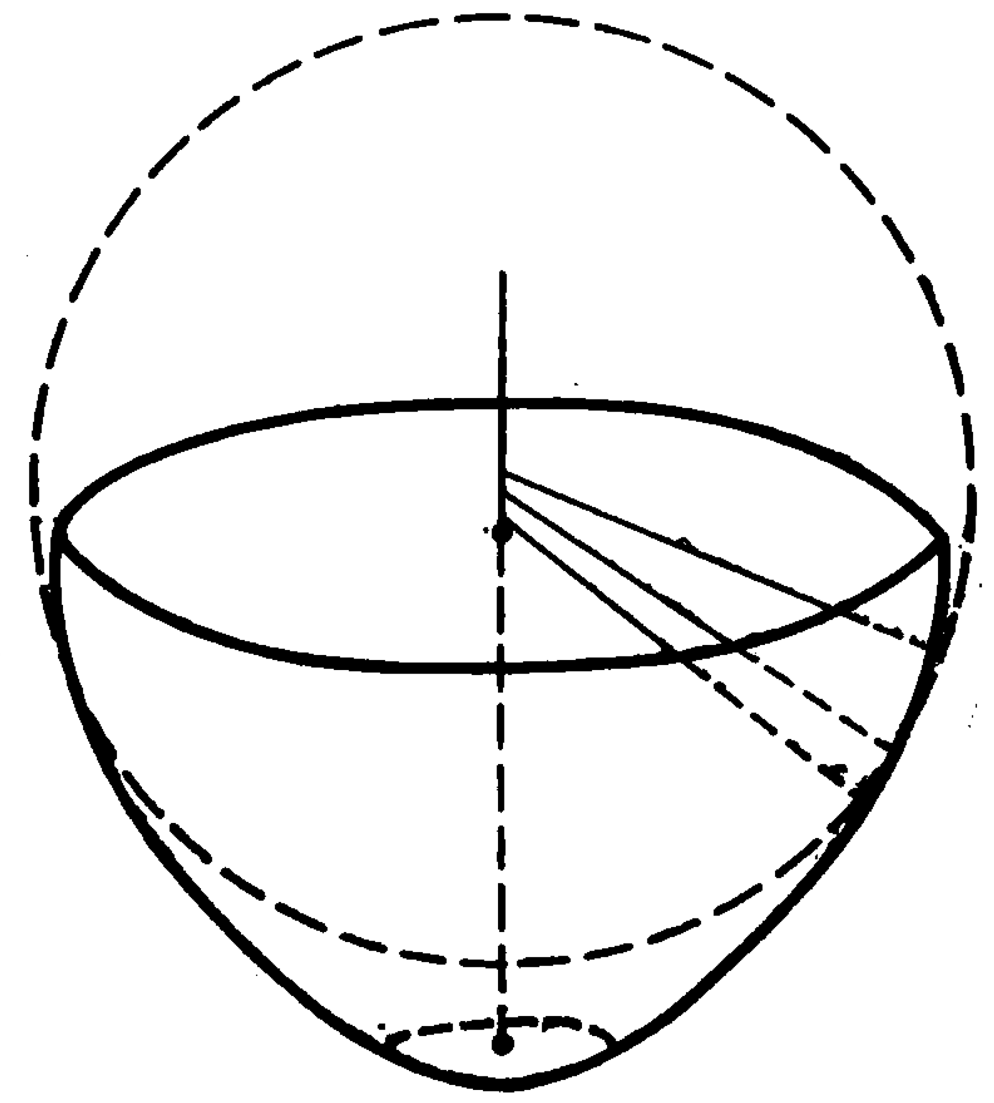
$$b_1 = -\frac{m\,(1-\sigma)}{2\beta_0}, \qquad {}_1 = \frac{1-\sigma}{2}$$

Подстановка этих выражений в (4.17) приводит к неравенству

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{\omega_2}{\omega_0}\left[-4\,(1-\sigma)\,(2+\sigma)\,\frac{\omega_0}{\beta_0^2} - \frac{\omega_2}{2\omega_0}\,\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\right] < 0$$

которое в силу неравенства $\omega_2 > 0$ всегда выполнено. Доказательство завершается также, как в теореме 4.1.

Поясним, что при условиях (4.25) и $\omega_2 > 0$ график меридиана в окрестности точки $s = s_0$ имеет вид, изображенный на фиг. 2 (мы считаем $0 < B'(s_0) < 1$). Пунктиром обозначена соприкасающаяся окружность. При условии (4.25) $R_1 = R_2$, т. е. соответствующая точка является омбилической. В заключение отметим следующий факт.



Фиг. 2

Теорема 4.3. Пусть при некотором $s = s_0$ $\varphi_1(s_0) = \alpha > 0$, пусть $p > 1$ и

$$\varphi_1(s) = \varphi_1(s_0) + \frac{\varphi_1^{(2p)}(s_0)}{(2p)!}(s-s_0)^{2p} + o\left((s-s_0)^{2p}\right) \tag{4.28}$$

где

$$\varphi_1^{(2p)}(s_0) > 0 \tag{4.29}$$

Тогда α является предельной точкой собственных значений.

Доказательство этого факта мы вынуждены за недостатком места опустить.

Приложение. Доказательство формулы (0.10). Обозначим через $\mathbf{L}_2(a, b)$ гильбертово пространство вектор-функций $g(s) = (g_1, g_2, g_3)$ со скалярным произведением (0.5) и пусть $L_2(a, b)$ — пространство скалярных функций с интегрируемым квадратом. Введем при фиксированном $g \in \mathbf{L}_2(a, b)$ функцию

$$\varphi(\mu) = (L_\mu^{-1} g, g) \tag{П.1}$$

Пусть $\mu_0 > 0$, имеем

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \frac{1}{\Delta\mu}\left((L_{\mu_0+\Delta\mu}^{-1} - L_{\mu_0}^{-1})\,g, g\right) = -\frac{1}{\Delta\mu}\left(L_{\mu_0+\Delta\mu}^{-1}(L_{\mu_0} - L_{\mu_0+\Delta\mu})\,L_{\mu_0}^{-1} g, g\right) = \tag{П.2}$$

$$= -\frac{\Delta\mu^4}{\Delta\mu}\left(L_{\mu_0+\Delta\mu}^{-1} L_4 L_{\mu_0}^{-1} g, g\right)$$

где через L_4 мы обозначили оператор, стоящий в левой части системы (0.1) при μ^4, оператор L_4 содержит дифференцирование четвертого порядка координаты $w(s)$, самосопряжен и неотрицателен при граничных условиях (0.3). Заметим еще, что оператор $L_4 L_{\mu_0}^{-1}$ ограничен. Переходя поэтому к пределу в (П.2) при $\Delta\mu \to 0$, получаем

$$d\varphi / d\mu = -4\mu_0^3 (L_{\mu_0}^{-1} L_4 L_{\mu_0}^{-1} g, g) \leqslant 0 \tag{П.3}$$

Следовательно, $\varphi(\mu)$ монотонно убывает и, согласно [7], вектор-функция $L_\mu^{-1} g$ сходится в смысле нормы $L_2(a, b)$ при $\mu \to 0$. Докажем теперь (0.10). Достаточно показать, что

$$\lim_{\mu \to 0} ((L_\mu^{-1} - L_0^{-1}) g, h) = 0 \tag{П.4}$$

для всюду плотного множества в $\mathbf{L}_2(a, b)$ векторов h. Заметив, что

$$(L_\mu^{-1} - L_0^{-1}) g = -\mu^4 L_0^{-1} L_4 L_\mu^{-1} g \tag{П.5}$$

возьмем h в (П.4) с таким расчетом, чтобы вектор-функция $L_0{}^{-1} h$ была достаточно гладкой и удовлетворяла граничным условиям (0.3). Тогда

$$((L_\mu^{-1} - L_0^{-1}) g, h) = -\mu^4 (L_\mu^{-1} g, L_4 L_0^{-1} h)$$

и, следовательно, (П.4) имеет место.

Осталось установить, что множество таких вектор-функций h всюду плотно в $\mathbf{L}_2(a, b)$. Заметим для этого, что при $h = 0$ интегральное уравнение (2.6) имеет при $\lambda = 0$ лишь тривиальное решение: $w(s) \equiv 0$, в противном случае, $\lambda = 0$ было бы собственным значением задачи (0.7), (0.8), что по предположению места не имеет. Поэтому интегральный оператор, стоящий в левой части (2.6), преобразует всюду плотное в $L_2(a, b)$ множество скалярных функций во всюду плотное. Множество финитных (бесконечно дифференцируемых) скалярных функций $w(s)$ всюду плотно в $L_2(a, b)$. Этим свойством обладают множество соответствующих правых частей (2.6). Отсюда уже очевидно, что, задав произвольные непрерывные $h_1(s)$ и $h_2(s)$, можно всегда указать функцию $h_3(s)$ из всюду плотного множества в $L_2(a, b)$, чтобы вектор-функция $L_0^{-1} h$ была достаточно гладкой и удовлетворяла условиям (0.3).

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру и П. Е. Товстику за внимание и неоднократные обсуждения.

Поступила 13 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы теории упругих тонких оболочек. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 5.
2. Гольденвейзер А. Л. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
3. Гольденвейзер А. Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. Алумяэ Н. А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметричных установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, т. 9, № 1.

5. Товстик П. Е. Интегралы системы уравнений неосесимметричных колебаний оболочек вращения. В сб.: Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1966, № 5, стр. 45—55.
6. Лидский В. Б., Харькова Н. В. Спектр системы безмоментных уравнений в случае осесимметричных колебаний оболочки вращения. Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 4.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, М., «Мир», 1966, т. 2.
8. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5(77).
9. Харькова Н. В. О нижней части спектра собственных осесимметричных колебаний тонкой упругой оболочки вращения. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
10. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 2(74).
11. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Изд. иностр. лит., 1954.