

АЛГОРИТМ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ КОНИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Я. Лахе, У. К. Нигул

(Таллин)

Предложен алгоритм реализации метода характеристик для анализа одномерных волновых процессов, возбужденных краевым воздействием и описываемых квазилинейной системой дифференциальных уравнений, имеющей несколько пар семейств характеристик. Алгоритм описан на базе квазилинейной системы уравнений шестого порядка геометрически нелинейной теории типа Тимошенко [1] в лагранжевых координатах для конических и цилиндрических оболочек.

Алгоритм предполагает отсутствие сильных разрывов, т. е. разрывов в первых производных от перемещений оболочек, что ограничивает класс допустимых краевых воздействий и позволяет провести анализ до появления первой ударной волны в задачах, где ударные волны возникают в ходе распространения волн. Несмотря на это, предлагаемый алгоритм позволяет выявить специфические свойства волнового решения по нелинейной теории. Дан иллюстрирующий пример для конической оболочки.

Говоря об одномерных переходных процессах деформации конических и цилиндрических оболочек, будем иметь в виду осесимметричные процессы этих объектов и плоские процессы деформации бесконечной цилиндрической оболочки (кольца).

В рамках линейной теории оболочек одномерные переходные процессы деформации конических и цилиндрических оболочек в течение последнего десятилетия исследованы в волновой постановке при помощи различных моделей и методов [2-4].

В рамках нелинейной теории оболочек быстропротекающие процессы деформации конических и цилиндрических оболочек также исследованы [5-10,11], но пока почти отсутствуют методы анализа специфических свойств бегущих волн.

Действительно, в имеющихся работах, которые в основном посвящены анализу проблемы динамической устойчивости, нашли, главным образом, применение:

- а) методы приведения оболочки к системе с конечным числом свободы [12-16];
- б) конечно-разностные методы интегрирования при помощи заранее фиксированной сетки без выявления и учета разрывов решения [17-19];
- в) метод прямых с последующим интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге — Кутта [20];
- г) метод аппроксимации тангенциальных перемещений линейным «стержневым» решением с последующим вычислением нормальных перемещений из нелинейных уравнений [21-23].

Эти методы оказались результативными при анализе устойчивости, но не позволяют полностью характеризовать решение как нелинейный переходный процесс распространения волн. Поэтому имеется мало информации о том, как геометрически нелинейный волновой процесс, который в некотором начальном этапе движения заведомо мало отличается от линейного волнового процесса, с ростом времени все более отклоняется от линейного и становится качественно различным при достаточно больших значениях времени. Неясны предел обоснованной применимости линейной теории, а также роль ударных волн при изменении характера переходного волнового процесса, в том числе, в появлении больших нормальных перемещений (потери устойчивости).

Представляется, что указанные вопросы могут быть пояснены с применением метода характеристик в рамках нелинейной теории. Однако для этого нужен алгоритм,

приспособленный к случаю наличия нескольких пар семейств характеристик (в нелинейной теории типа Тимошенко в случае одномерных волновых процессов таких пар — три). Предложенный ниже алгоритм, состоит из следующих элементов:

а) представление исходных уравнений [1] в виде квазилинейной системы уравнений первого порядка относительно первых производных от перемещений и добавочных формул для вычисления перемещений, также входящих в коэффициенты системы уравнений;

б) построение уравнений, определяющих направления характеристик и дифференциальные соотношения на характеристиках;

в) алгоритм итерационного проведения расчета по второму способу Массо в случае наличия нескольких пар семейств характеристик.

Отметим, что в рамках линейной теории оболочек типа Тимошенко метод характеристик нашел применение в работах [24–26]. В линейной теории направления характеристик являются постоянными и независимыми от решения, но в теории типа Тимошенко из трех пар семейств характеристик две пары семейств совпадают. В ходе вычисления линейного решения (для сопоставления с нелинейным решением) попутно было замечено, что различие между линейными решениями, полученными методом характеристик в [25,26] есть следствие ошибки в одном коэффициенте уравнений работы [25].

1. Исходные уравнения. Рассмотрим конические и цилиндрические оболочки. Пусть h — толщина оболочки; R_0 — радиус срединной поверхности у торца оболочки, где прилагается воздействие; $\theta = \text{const}$ — угол между осью и образующей срединной поверхностью конической оболочки (в случае цилиндрической оболочки $\theta = 0$); E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона, k_T — коэффициент сдвига в теории оболочек типа Тимошенко; ρ_0 — плотность материала оболочки в недеформированном состоянии; R_j ($j = 1, 2$) — радиусы кривизны срединной поверхности; t — время; τ — безразмерное время. Пусть на срединной поверхности оболочки выбрана система координат с параметрами Ляме

$$A = h = \text{const}, \quad B = R_0 + ah \sin \theta$$

При этом

$$\begin{aligned} \tau &= tc_2 h^{-1}, & c_2 &= E^{1/2} [2(1 + \nu) \rho_0]^{-1/2} \\ R_1 &= \infty, & R_2 &= R_0 (\cos \theta)^{-1} + ah \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

Рассмотрим осесимметричные волновые процессы, зависящие от лагранжевой координаты α и τ . Пусть w_1 — безразмерное (деленное на h) тангенциальное перемещение, w_2 — безразмерное (деленное на h) нормальное перемещение, w_3 — угол поворота нормали.

Введем еще обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\dots)}{\partial \alpha} &= (\dots)', & \frac{\partial (\dots)}{\partial \tau} &= (\dots)^{\bullet}, & k^2 &= \frac{1}{2} (1 - \nu) \\ \delta &= hR_2^{-1}, & \gamma &= B'B^{-1}, & \eta &= \gamma w_1 + \delta w_2 \end{aligned}$$

и новые искомые

$$V_1 = w_1^{\bullet}, \quad V_2 = w_2^{\bullet}, \quad V_3 = w_3^{\bullet}, \quad V_4 = w_1', \quad V_5 = w_2', \quad V_6 = w_3' \quad (1.1)$$

Используя нелинейные уравнения [1] и соотношения

$$w_i^{\bullet\bullet} = w_i'' \quad (i = 1, 2, 3)$$

нетрудно вывести матричное уравнение

$$IV^{\bullet} + MV' - G = 0 \quad (1.2)$$

и формулу

$$w_i = \int V_{i+3} d\alpha + V_i d\tau \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

где I — единичная матрица и V, M, G — следующие матрицы:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Phi_{11} & -\Phi_{12} & -\Phi_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi_{21} & -\Phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi_{31} & 0 & -\Phi_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{20} \\ \Phi_{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

В (1.4) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= k^{-2} (1 + 3V_4 + \nu\eta), & \Phi_{12} &= k_T^2 w_3 + k^{-2} V_5 \\ \Phi_{13} &= 1/12 k^{-2} (2V_6 + \nu\gamma w_3) & \Phi_{21} &= \Phi_{12}, & \Phi_{22} &= k_T^2 + k^{-2} (V_4 + \nu\eta) \\ & & \Phi_{31} &= 12\Phi_{13}, & \Phi_{33} &= k^{-2} (1 + 2V_4) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= k^{-2} \gamma [V_4 - \eta + 1/2 (3 + \nu) (V_4^2 - \eta^2) + 1/2 (1 - \nu) V_5^2] + \\ &+ k^{-2} \nu \delta V_5 (1 + V_4 + \eta) + k_T^2 [(2w_3 + V_5) V_6 + \gamma (w_3 + V_5) w_3] + 1/12 k^{-2} \times \\ &\times [(1 + \nu) V_6^2 - \gamma (\gamma w_3 + \nu V_6) w_3] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\Phi_{20} = k^{-2} \gamma (1 + \nu) V_4 V_5 - k^{-2} \delta [(1 + 3/2 \eta) \eta + \nu (1 + 1/2 V_4 + \eta) V_4 - 1/2 \nu V_5^2] + k_T^2 [(V_6 + \gamma w_3) (1 + V_4) + \gamma V_5] - 1/12 k^{-2} \gamma \delta (\gamma w_3 + \nu V_6) w_3$$

$$\begin{aligned} \Phi_{30} &= k^{-2} \gamma (1 + 2V_4 - 2\eta) V_6 - k^{-2} \gamma^{-2} (1 - \nu V_4 + \nu\eta) w_3 + \\ &+ 1/12 k^{-2} \gamma \delta \nu V_5 w_3 - 12 k_T^2 [(1 + 2V_4) w_3 + (1 + V_4) V_5] \end{aligned}$$

Усилия, поперечные силы и моменты легко могут быть выражены через безразмерные величины, введенные выше. Например, в поперечном сечении $\alpha = \text{const}$ тангенциальное усилие T_{11} , поперечная сила N_1 и момент M_{11} могут быть представлены в следующем виде:

$$T_{11} = E_p [V_4 + 1/2 V_4^2 + \nu (\eta + 1/2 \eta^2 + V_4 \eta) + 1/2 V_5^2 + K (w_3^2 + w_3 V_5)] + Dh^{-2} (V_6^2 + \nu \gamma V_6 w_3)$$

$$N_1 = E_p [(V_4 V_5 + \nu \eta V_5) + K (w_3 + V_5 + V_4 w_3)]$$

$$M_{11} = Dh^{-1} [V_6 + 2V_4 V_6 + \nu \gamma w_3 (1 + V_4 + \eta)] \quad (1.7)$$

$$E_r = Eh (1 - \nu^2)^{-1}, \quad K = k^2 k_T^2, \quad D = Eh^3 [12 (1 - \nu^2)]^{-1}$$

По существу матричное уравнение (1.2) представляет квазилинейную систему из шести уравнений первого порядка относительно V_j (α, τ) ($j = 1, 2, \dots, 6$). Через V_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) перемещения w_j ($j = 1, 2, 3$) определены формулой (1.3). При применении (1.2), (1.3), в задачах распространения волн приходится сформулировать шесть начальных условий и по три краевых условия в торцевых поперечных сечениях оболочки. Поскольку α лагранжевая координата, то в торцевых поперечных сечениях $\alpha = \text{const}$.

Ниже в конкретных рассуждениях имеются в виду нулевые начальные условия

$$w_j (\alpha, 0) = 0, \quad V_j (\alpha, 0) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Из первой группы условий (1.8) имеем

$$V_j(\alpha, 0) = 0 \quad (j = 4, 5, 6) \quad (1.9)$$

Краевые условия при $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 = \text{const}$ могут быть, например, сформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1(\alpha_0, \tau) = g_1(\tau) & \quad \text{или} & \quad T_{11}(\alpha_0, \tau) = g_4(\tau) \\ w_2(\alpha_0, \tau) = g_2(\tau) & \quad \text{или} & \quad N_1(\alpha_0, \tau) = g_5(\tau) \\ w_3(\alpha_0, \tau) = g_3(\tau) & \quad \text{или} & \quad M_{11}(\alpha_0, \tau) = g_6(\tau) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $g_i(\tau)$ — заданные функции τ .

Если $w_i(\alpha_0, \tau) = g_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$), тогда

$$V_i(\alpha_0, \tau) = g_i^*(\tau) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.11)$$

Переход от нелинейной постановки к линейной постановке задачи означает пренебрежение в (1.5) всех и в (1.6) квадратных членов, зависящих от V_j и w_i ($j = 1, 2, \dots, 6$; $i = 1, 2, 3$). Пусть Φ_{ij} — коэффициенты, полученные указанным путем из выражений Φ_{ij} , тогда для перехода к применению линейной теории следует в (1.4) заменить Φ_{ij} со следующими коэффициентами φ_{ij} :

$$\varphi_{11} = k^{-2}, \quad \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{21} = \varphi_{31} = 0, \quad \varphi_{22} = k_T^2, \quad \varphi_{33} = k^{-2} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{10} = k^{-2}\gamma(V_4 - \eta) + k^{-2}\delta\nu V_5, \quad \varphi_{20} = k_T^2(V_6 + \gamma w_3 + \gamma V_5) - \\ - k^{-2}\delta(\eta + \nu V_4), \quad \varphi_{30} = k^{-2}\gamma V_6 - k^{-2}\gamma^2 w_3 - 12k_T^2(w_3 + V_5) \end{aligned} \quad (1.13)$$

2. Уравнения для реализации метода характеристик. Известно [27], что направления характеристик матричного уравнения вида (1.2) могут быть определены при помощи собственных значений уравнения

$$|M - I\lambda| = 0 \quad (2.1)$$

из которого следует уравнение

$$\lambda^6 - a\lambda^4 + b\lambda^2 - c = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} a = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}, \quad b = \Phi_{11}\Phi_{22} + \Phi_{11}\Phi_{33} + \Phi_{22}\Phi_{33} - \Phi_{12}^2 - 12\Phi_{13}^2 \\ c = \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33} - \Phi_{33}\Phi_{12}^2 - 12\Phi_{22}\Phi_{13}^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Характеристики на α, τ -плоскости представляют собой кривые $d\alpha / d\tau = \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots, 6$). Здесь λ_j — корни уравнения (2.2).

Условие гиперболичности исходной системы (1.2) идентично условию вещественности всех корней уравнения (2.2) и может быть представлено в виде

$$({}^{1/2}q)^2 - ({}^{1/3}p)^3 \leq 0 \quad (2.4)$$

$$p = {}^{1/3}a^2 - b, \quad q = {}^{2/27}a^3 - {}^{1/3}ab + c \quad (2.5)$$

Корни уравнения (2.2) могут быть вычислены по формуле

$$\lambda_j = \pm \{ {}^{1/3}a + 2({}^{1/3}p)^{1/2} \cos [{}^{1/3}(\varphi + 2n\pi)] \}^{1/2} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

$$\varphi = \arccos [{}^{1/3}q ({}^{1/3}p)^{-3/2}] \quad (2.7)$$

Пусть корни уравнения (2.6) пронумерованы так, что

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_6 \quad (2.8)$$

Функции Φ_{ij} зависят от искомого решения, поэтому λ_j также зависят от искомого решения.

Матрица $M - I\lambda$ — особая, поэтому существует собственный вектор [27]

$$C^{(i)} = \{C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, C_3^{(i)}, C_4^{(i)}, C_5^{(i)}, C_6^{(i)}\}$$

для которого

$$C^{(i)}M = \lambda_i C^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) распадается на системы

$$\begin{vmatrix} \lambda_j^2 - \Phi_{11} & -\Phi_{21} & -\Phi_{31} \\ -\Phi_{12} & \lambda_j^2 - \Phi_{22} & 0 \\ -\Phi_{13} & 0 & \lambda_j^2 - \Phi_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1^{(j)} \\ C_2^{(j)} \\ C_3^{(j)} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

$$C_k^{(7-j)} = C_k^{(j)} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

$$C_4^{(i)} = -\lambda_i C_1^{(i)}, \quad C_5^{(i)} = -\lambda_i C_2^{(i)}, \quad C_6^{(i)} = -\lambda_i C_3^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.12)$$

Матричное уравнение (2.10) имеет решения

$$C_k^{(j)} = (-1)^{n-k} \frac{N_k}{N_n} C_n^{(j)} \quad (j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

где N_k, N_n — миноры матрицы системы (2.10), получающиеся соответственно с вычеркиванием ее k -го и n -го столбца.

Зададим компоненты $C_1^{(1)} = 1, C_3^{(2)} = 1, C_2^{(3)} = 1$, а остальные компоненты с нижними индексами $k = 1, 2, 3$ вычисляем по формуле (2.13).
Имеем

$$\begin{aligned} C_2^{(1)} &= \Phi_{12} (\lambda^2 - \Phi_{22})^{-1}, & C_3^{(1)} &= \Phi_{13} (\lambda_1^2 - \Phi_{33})^{-1} \\ C_1^{(2)} &= 12\Phi_{13} (\lambda_2^2 - \Phi_{22}) [(\lambda_2^2 - \Phi_{11}) (\lambda_2^2 - \Phi_{22}) - \Phi_{12}^2]^{-1} \\ C_2^{(2)} &= 12\Phi_{12}\Phi_{13} [(\lambda_2^2 - \Phi_{11}) (\lambda_2^2 - \Phi_{22}) - \Phi_{12}^2]^{-1} \\ C_1^{(3)} &= \Phi_{12} (\lambda_3^2 - \Phi_{33}) [(\lambda_3^2 - \Phi_{11}) (\lambda_3^2 - \Phi_{33}) - 12\Phi_{13}^2]^{-1} \\ C_3^{(3)} &= \Phi_{12}\Phi_{13} [(\lambda_3^2 - \Phi_{11}) (\lambda_3^2 - \Phi_{33}) - 12\Phi_{13}^2]^{-1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Все остальные компоненты вычисляются по соотношениям (2.12). Умножая уравнение (1.2) на левый собственный вектор $C^{(i)}$, получим

$$C^{(i)}V^* + C^{(i)}MV' - C^{(i)}G = 0$$

Учитывая соотношение (2.9), имеем

$$C^{(i)}(D^i V^i) - C^{(i)}G = 0 \quad (2.15)$$

$$D^i V^i = V^* + \lambda_i V' \quad (2.16)$$

Уравнение (2.15) определяет дифференциальные соотношения на характеристиках.

С точностью линейной теории характеристические направления получаем из уравнения (2.1) после замены в матрице M коэффициентов Φ_{ij}

(1.5) коэффициентами φ_{ij} (1.12) ($i, j = 1, 2, 3$). Эти направления являются постоянными

$$\lambda_1 = \lambda_2 = k^{-1}, \quad \lambda_3 = k_T, \quad \lambda_4 = -k_T, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -k^{-1} \quad (2.17)$$

Значит, в линейной постановке появляются кратные корни. Определим собственные векторы из уравнений (2.10) — (2.12), где Φ_{ij} (1.5) заменены φ_{ij} (1.12), и из условия, чтобы кратным корням соответствовали линейно независимые собственные векторы. Такими решениями уравнения (2.10) являются:

$$C_1^{(1)} = 1, \quad C_2^{(1)} = C_3^{(1)} = 0, \quad C_1^{(2)} = C_2^{(2)} = 0, \quad C_3^{(2)} = 1, \quad C_1^{(3)} = C_3^{(3)} = 0 \\ C_2^{(3)} = 1 \quad (2.18)$$

3. Алгоритм численной реализации метода характеристик. Следуя Куранту [28], используем матричную запись алгоритма. На $\alpha\tau$ -плоскости единичный вектор $s^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) в направлении i -й характеристики имеет следующие проекции:

$$\lambda_i (1 + \lambda_i^2)^{-1/2} \text{ на } \alpha\text{-ось}, \quad (1 + \lambda_i^2)^{-1/2} \text{ на } \tau\text{-ось} \quad (3.1)$$

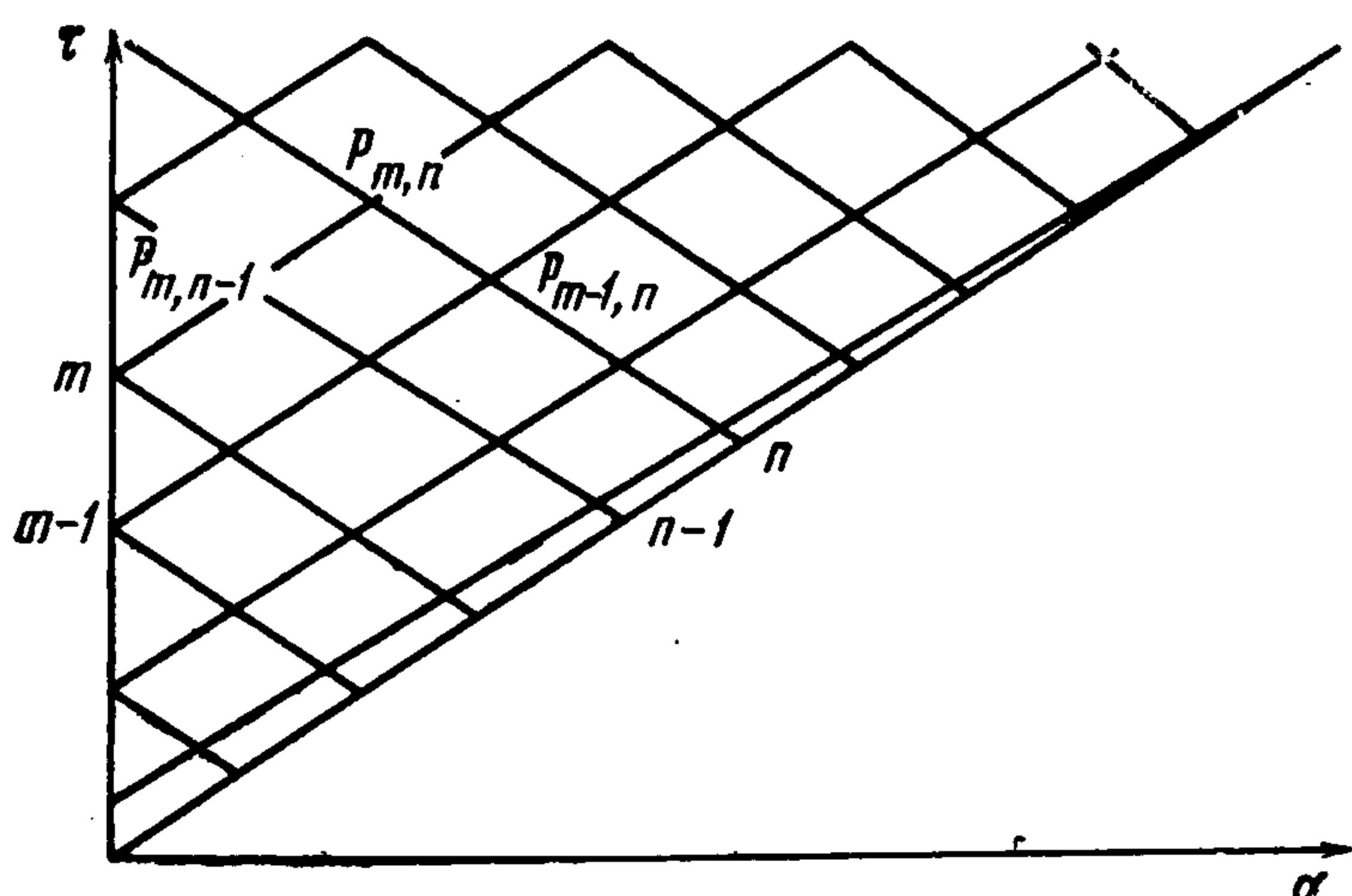
Производная вдоль i -й характеристики, т. е. по направлению $s^{(i)}$, имеет следующий вид:

$$s^{(i)} \cdot \nabla V = \lambda_i (1 + \lambda_i^2)^{-1/2} V' + (1 + \lambda_i^2)^{-1/2} V'' \quad (3.2)$$

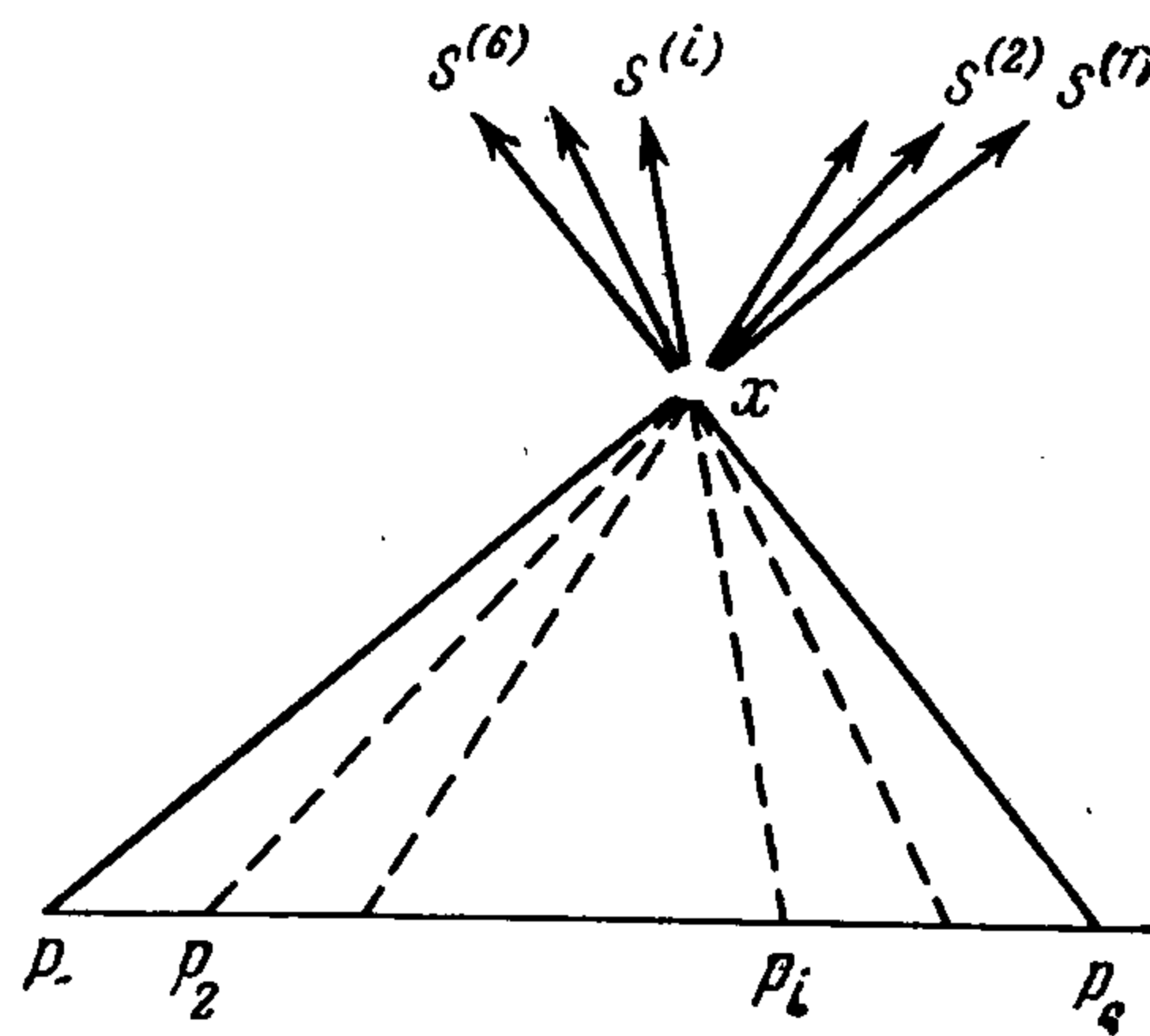
Используя обозначение (2.16), получим

$$s^{(i)} \cdot \nabla V = (1 + \lambda_i^2)^{-1/2} (D^i V^i) \quad (3.3)$$

Построим алгоритм конечно-разностного интегрирования матричного уравнения (2.15) и вычислим w_k по (1.3). Будем пользоваться так называемой стандартной техникой, при которой основная сетка на $\alpha\tau$ -плоскости



Фиг. 1



Фиг. 2

выбрана по характеристикам, имеющим направления λ_1, λ_6 . Введем нумерацию узлов этой сетки, указанную на фиг. 1. Рассмотрим тройку узлов $P_{m,n}, P_{m-1,n}, P_{m,n-1}$. Пусть известны координаты узлов $P_{m-1,n}, P_{m,n-1}$ и величины V_j ($j = 1, 2, \dots, 6$), w_k ($k = 1, 2, 3$) в этих узлах, а координаты узла $P_{m,n}$ и величины V_j ($j = 1, 2, \dots, 6$), w_k ($k = 1, 2, 3$) в этом узле неизвестны и подлежат вычислению. Для краткой записи расчетного алгоритма введем следующие обозначения узлов (фиг. 2):

$$P_{m,n} \equiv X, \quad P_{m,n-1} \equiv P_1, \quad P_{m-1,n} \equiv P_6$$

Введем еще в рассмотрение вспомогательные точки p_2, p_3, p_4, p_5 таким образом, как указано на фиг. 2.

В конечно-разностной аппроксимации производная вдоль i -й характеристики имеет вид

$$s^{(i)} \cdot \nabla V(p_i^*) = [V(X) - V(p_i)] [(1 + \lambda_i^2)^{1/2} \Delta\tau_i]^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.4)$$

$$\Delta\tau_i = \tau(X) - \tau(p_i) \quad (3.5)$$

и под $\nabla V(p_i^*)$ следует подразумевать среднюю производную вдоль i -й характеристики, на отрезке между узлами X и p_i .

Приравнявая выражение (3.3) к (3.4), получим

$$D^i V^i(p_i^*) = [V(X) - V(p_i)] (\Delta\tau_i)^{-1} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (2.15), имеем следующее конечно-разностное уравнение в матричном виде:

$$C^{(i)}(p_i^*) V(X) = C^{(i)}(p_i^*) [V(p_i) + G(p_i^*) \Delta\tau_i] \quad (3.7)$$

Здесь и далее под $G(p_i^*)$, $\lambda(p_i^*)$, $C^{(i)}(p_i^*)$ следует подразумевать величины, вычисляемые соответственно по формулам (1.4), (2.6) и (2.13), в которые (в соответствии со вторым способом Массо [29]) введены следующие аппроксимирующие представления:

$$V_k = V_k(p_i^*) = 1/2 [V_k(X) + V_k(p_i)], \quad w_j = w_j(p_i^*) = 1/2 [w_j(X) + w_j(p_i)] \\ \alpha = \alpha(p_i^*) = 1/2 [\alpha(X) + \alpha(p_i)] \quad (3.8)$$

Исключим теперь из системы (3.7) значения V в вспомогательных точках p_2, p_3, p_4, p_5 .

Из геометрических соображений следует

$$\tau(X) = [\alpha(p_1) - \alpha(p_6) - \lambda_1(p_1^*) \tau(p_1) + \lambda_6(p_6^*) \tau(p_6)] [\lambda_6(p_6^*) - \lambda_1(p_1^*)] \\ \alpha(X) = \alpha(p_6) - [\tau(X) - \tau(p_6)] \lambda_6(p_6^*) \quad (3.9)$$

$$\alpha(p_i) = \{\alpha(X) + [\tau(p_6) - \tau(X) - (\tau(p_6) - \tau(p_1))(\alpha(p_6) - \\ - \alpha(p_1))^{-1} \alpha(p_6)] \lambda_i(p_i^*)\} [1 - (\tau(p_6) - \tau(p_1)) - \alpha(p_1)]^{-1} \lambda_1(p_1^*)]^{-1} \\ \tau(p_i) = [\alpha(p_i) - \alpha(X)] [\lambda_i(p_i^*)]^{-1} + \tau(X) \quad (3.10)$$

Значения искомых функций в точке p_i найдем интерполированием между точками p_1 и p_6 , что приводит к следующим формулам:

$$V_k(p_i) = (1 - Q_i) V_k(p_6) + Q_i V_k(p_1), \quad w_k(p_i) = (1 - Q_i) w_k(p_6) + \\ + Q_i w_k(p_1) \quad (3.11)$$

$$Q_i = [\alpha(p_6) - \alpha(p_i)] [\alpha(p_6) - \alpha(p_1)]^{-1} \quad (3.12)$$

Подставляя (3.10) в (3.6), получим

$$C^{(i)}(p_i^*) V(X) = C^{(i)}(p_i^*) [(1 - Q_i) V(p_6) + Q_i V(p_1) + G(p_i^*) \Delta\tau_i] \quad (3.13) \\ (i = 1, 2, 3, \dots, 6)$$

Интегралы (1.3) берем вдоль характеристик, имеющих направления λ_1 и λ_6 , по формуле

$$w_k(X) = 1/2 \{ [V_{k+3}(p_1^*) \lambda_1(p_1^*) + V_k(p_1^*)] \Delta\tau_1 + w_k(p_1) + \\ + [V_{k+3}(p_6^*) \lambda_6(p_6^*) + V_k(p_6^*)] \Delta\tau_6 + w_k(p_6) \} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.14)$$

Теперь задача заключается в создании итерационного алгоритма нахождения таких координат α , τ узла X , а также величин $V_j(X)$, $j = 1, 2, \dots, 6$ и величин $w_k(X)$, $k = 1, 2, 3$, при которых равенства (3.13), (3.14) удовлетворяются с численно заданной точностью.

Рассмотрим вычисление нулевого приближения. При этом указанным ниже путем используем следующие формулы аппроксимации:

$$\begin{aligned} \lambda_k(p_i^*) &= \lambda_k(p_1), & w_j(p_i^*) &= w_j(p_1), & V_k(p_i^*) &= V_k(p_1) & (i = 1, 2, 3) \\ \lambda_k(p_i^*) &= \lambda_k(p_6), & w_j(p_i^*) &= w_j(p_6), & V_k(p_i^*) &= V_k(p_6) & (i = 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Во-первых, вычисляем в нулевом приближении координаты узла X по формулам (3.9), в правых частях которых $\lambda_k(p_i^*)$ аппроксимированы в форме (3.15). Далее вычисляем $w_j(X)$ по (3.14), используя в правой части аппроксимацию (3.15). При этом $\Delta\tau_i$ вычисляются по формуле (3.5). Затем, применяя аппроксимацию (3.15), найдем в нулевом приближении $C^{(i)}(p_i^*)$. Далее вычисляем $G(p_i^*)$, используя $\alpha(X)$, $w_j(X)$ в найденном уже нулевом приближении и аппроксимируя $V_k(p_i^*)$ по (3.15). Теперь оказывается возможным вычислять в нулевом приближении $V(X)$ из уравнения (3.12).

В следующих приближениях по очереди вычисляют откорректированные координаты узла X , откорректированные векторы $C^{(i)}(p_i^*)$, $G(p_i^*)$, $V(X)$. При вычислении каждой величины применяют формулы (3.8) и все необходимые величины в том приближении, в котором они в данном этапе итерационного процесса уже имеются. Итерационный процесс продолжается, пока разница искомых величин последнего и предпоследнего приближения станет меньше некоторой заданной величины.

Рассмотрим еще вопрос наложения краевых условий у края оболочки $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 = \text{const}$. Граница $\alpha = \alpha_0$ является на $\alpha\tau$ -плоскости временно-подобной линией и поэтому в одну сторону от нее направлены только три из шести векторов $s_{\alpha}^{(i)}$. Следовательно, на границе $\alpha = \alpha_0$ из матричного уравнения (3.13) следуют три уравнения с шестью неизвестными V_i . К этим трем уравнениям присоединим три граничные условия (1.10), в результате чего имеем систему из шести уравнений относительно шести компонентов вектора V . Построим следующие векторы:

$$G_i^* = \delta_{ij}V_j, \quad V_i^* = (1 - \delta_{ij})V_j \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и j — индекс, приобретающий эти три значения, которые соответствуют трем компонентам V_j , заданным на границе или же выраженным на границе (при помощи краевых условий) через заданные функции и остальные компоненты вектора V . Иначе говоря, V^* — неизвестный трехкомпонентный вектор, а G^* — трехкомпонентный вектор, компоненты которого либо известны, либо выражены через компоненты V_i .

Представляя шестикомпонентный вектор V в форме

$$V = V^* + G^* \quad (3.16)$$

получим из (3.13) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} C^{(i)}(p_i^*) V^*(X) = C^{(i)}(p_i^*) [(1 - Q_i) V(p_6) + Q_i V(p_1) + \\ + G(p_i^*) \Delta\tau_i - G^*(X)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

где в области $\tau \geq 0$, $\alpha \geq \alpha_0$, $X \equiv P_{m,m}$, $P_1 \equiv P_{m-1,m-1}$ обозначают краевые точки, $P_6 \equiv P_{m-1,m}$, $i = 4, 5, 6$ и в области $\tau \geq 0$, $\alpha \leq \alpha_0$, $X \equiv P_{m,m}$, $P_6 \equiv P_{m-1,m-1}$ обозначают краевые точки, $P_1 = P_{m,m-1}$, $i = 1, 2, 3$.

Если на границе $\alpha = \alpha_0$ некоторые из трех безразмерных перемещений не заданы, то эти незадаанные безразмерные перемещения вычисляются по формуле (3.14), которая на границе приобретает вид

$$w_k(X) = [V_{k+3}(p_i^*) \lambda_i(p_i^*) + V_k(p_i^*)] \Delta\tau_i + w_k(p_i) \quad (3.18)$$

В (3.18) при $\tau \geq 0$, $\alpha \geq \alpha_0$ следует принимать $i = 6$, а при $\tau \geq 0$, $\alpha \leq \alpha_0$ — $i = 1$. Интерполяционный процесс на границе может быть осуществлен подобно описанному выше для внутренних узлов.

4. Численный пример. Рассмотрим переходный волновой процесс при $\tau \geq 0$ в полубесконечной ($\alpha \geq 0$) конической оболочке. Задаем нулевые начальные условия (1.8) и следующие функции в граничных условиях (1.10):

$$g_2(\tau) = g_3(\tau) = 0, \quad g_4(\tau) = 2T\pi^{-1} \operatorname{arctg}(m\tau) \quad (4.1)$$

Вектор V представим на границе в форме (3.16), где в данном случае

$$V^*(0, \tau) = \begin{pmatrix} V_1(0, \tau) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_5(0, \tau) \\ V_6(0, \tau) \end{pmatrix}, \quad G^*(0, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(0, \tau) \\ V_3(0, \tau) \\ V_4(0, \tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Из (1.11), (1.7), (4.1) следует

$$V_2(0, \tau) = V_3(0, \tau) = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} V_4(0, \tau) = E_p^{-1} g_4(\tau) - \frac{3}{2} V_4^2(0, \tau) - \nu [\eta(0, \tau) + \frac{1}{2} \eta^2(0, \tau) + \\ + V_4(0, \tau) \eta(0, \tau)] - \frac{1}{2} V_5^2(0, \tau) - \frac{1}{12} V_6^2(0, \tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

В линейной постановке задачи выражение (4.4) упрощается к следующему виду:

$$V_4(0, \tau) = E_p^{-1} g_4(\tau) - \nu \eta(0, \tau) \quad (4.5)$$

Приводим результаты численного расчета, полученные для конической оболочки при следующих значениях коэффициентов:

$$\theta = -30^\circ, \quad h/R_0 = 1/50, \quad k_T^2 = 0.87, \quad \nu = 1/3, \quad T/Eh = 0.01, \quad m = 5.$$

Вдоль фронта была применена разбивка узлов с шагом $\Delta\tau_1 = 0.1$.

Нахождение координат узловых точек $P_{m,n}$ (фиг. 1) и искомых величин в этих точках было произведено по рядам точек $m = 1, 2, 3, \dots$ вдоль характеристик направления λ_1 , на каждом из которых расчет был проведен по очереди в точках $n = 1, 2, 3, \dots$

Расчеты были параллельно выполнены в нелинейной и линейной постановке, причем разбивка узлов на первом фронте $\tau = k^{-2}\alpha$ была одинакова. Результаты расчета пока-

зывают, что по нелинейной теории V_1 и V_4 вдоль характеристик направления λ_1 в начальном этапе процесса мало отличаются от V_1 и V_4 по линейной теории. Однако по нелинейной и линейной теории характеристики одинакового порядкового номера m на α , τ -плоскости не совпадают.

В начальном этапе процесса количественное различие между линейным и нелинейным решением растет с ростом времени, главным образом, по этой причине. Качественное различие нелинейного и линейного решения возникает при пересечении характеристик при $\tau = 30$ (фиг. 1), что приводит к появлению разрыва в компонентах V_1 , V_4 нелинейного решения. Иными словами, в данном примере при $\tau = 30$ возникает ударная волна. Однако количественные результаты по нелинейной и линейной теории заметно отличаются в начальном этапе движения лишь в узкой зоне за первым фронтом (фиг. 3).

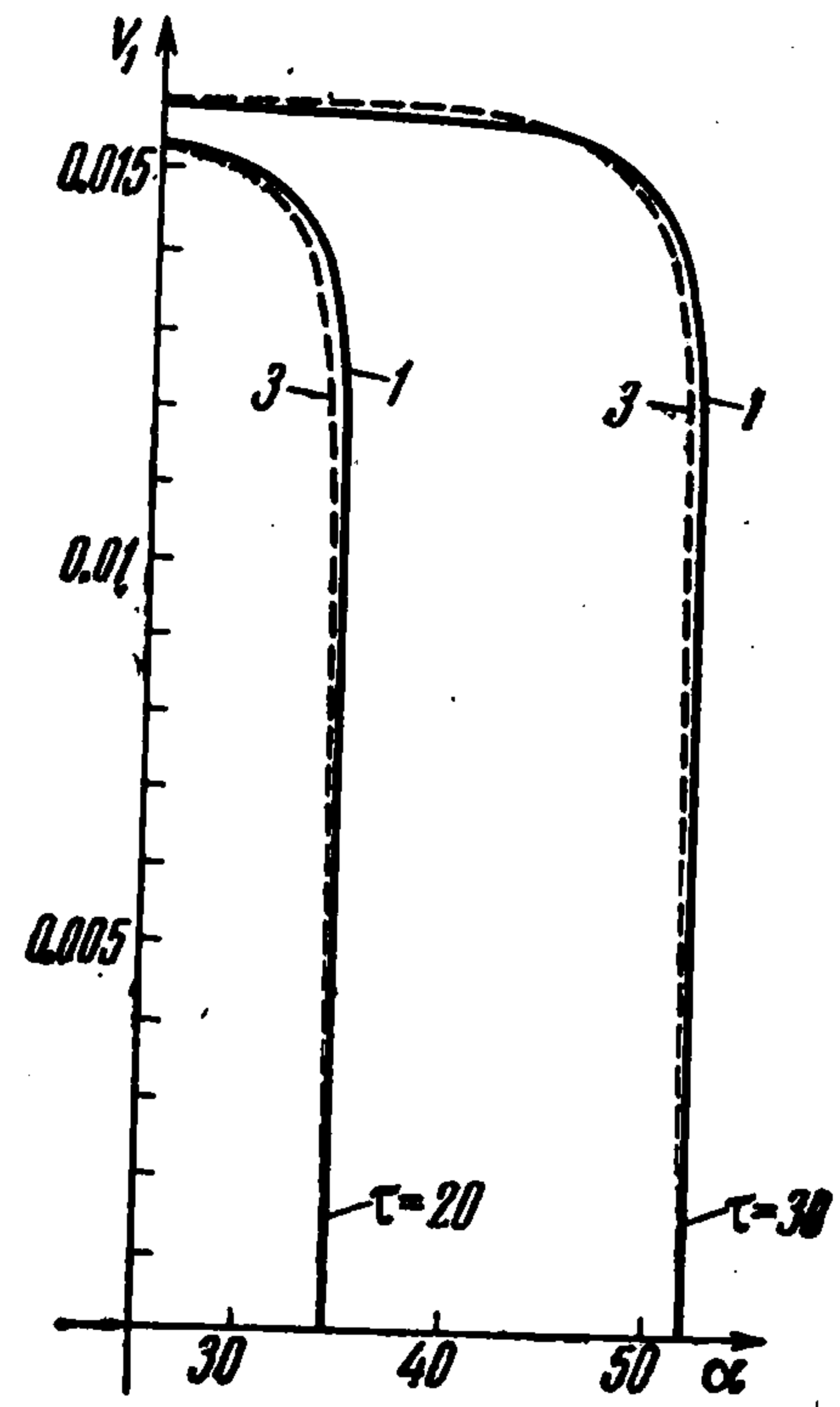
На фиг. 3 сплошной линией показаны результаты по линейной теории, а прерывистой линией — по нелинейной теории при $\tau = 20$, $\tau = 30$.

Отметим, что ударная волна возникает на первом фронте всегда при приложении тангенциального воздействия растягивающего типа и никогда не возникает при приложении тангенциального воздействия типа сжатия.

Поступила 2 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. А й н о л а Л. Я. Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
2. А й н о л а Л., Н и г у л У. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1965.
3. А л у м я э Н. А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластин. Тр. 6-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966. М., «Наука», 1966, стр. 883—889.
4. Н и г у л У. К. Волновые процессы деформации оболочек и пластин. Тр. 7-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, 1969. М., «Наука», 1970.
5. В о л ь м и р А. С. Задачи теории устойчивости оболочек и пластинок. Тр. 6-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966. М., «Наука», 1966.
6. В о л ь м и р А. С. Нелинейные задачи теории переходных процессов деформации оболочек и проблема устойчивости. В сб.: Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Таллин, 1967, стр. 51—66.
7. S t e i n М. Some recent advances in the investigation of shell buckling. Journal AIAA, 1968, vol. 6, No. 12, p. 2339—2345.
8. В о л ь м и р А. С. Устойчивость пластинок и оболочек. В сб.: Строительная механика в СССР, 1917—1967, М., Стройиздат, 1969, стр. 259—279.
9. А г а м и р о в В. Л. Обзор исследований по устойчивости конструкций при импульсивном нагружении. В сб.: Расчет пространственных конструкций, вып. 12. М., Стройиздат, 1969, стр. 186—200.
10. В о л ь м и р А. С. Современные проблемы устойчивости и динамики оболочек. Строит. механ. и расчет сооружений, 1970, № 2.
11. В о л ь м и р А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2-е, М., «Наука», 1967.
12. В о л ь м и р А. С. Об устойчивости цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 5.
13. Б о р и с е н к о В. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при продольном ударе. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 5.
14. П р о ц е н к о О. П., П а в л о в с к и й В. С. Динамическая устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки при комбинированной непериодической нагрузке.



Фиг. 3

- В сб.: Проблемы устойчивости в строительной механике, М., Стройиздат, 1965, стр. 296—305.
15. Григолюк Э. И., Сребовский А. И. Тонкие круговые цилиндрические оболочки под действием импульса внешнего давления. Инж. ж., МТТ, 1968, № 3.
 16. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругих оболочек при интенсивном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
 17. Вольмир А. С., Герштейн М. С. Поведение упругих цилиндрических оболочек при действии плоской акустической волны. Инж. ж., 1965, т. 5, № 6.
 18. Вольмир Е. А. Поведение упругой цилиндрической панели под действием ударной волны в жидкости. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
 19. Горшков А. Г., Григолюк Э. И., Хромушкин А. В., Шклярчук Ф. Н. Движение цилиндрической панели от акустической ударной волны. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
 20. Валишвили Н. В., Силкин В. Б. Применение метода прямых для решения нелинейных задач динамики пологих оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
 21. Агамиров В. Л., Вольмир А. С. Об устойчивости цилиндрической оболочки при продольном ударе. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 2.
 22. Агамиров В. Л., Вольмир А. С. Поведение цилиндрических оболочек при продольном ударе. В сб.: Проблемы устойчивости в строительной механике, М., Стройиздат, 1965, стр. 143—152.
 23. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругого стержня при ударе. ПМТФ, 1968, № 3.
 24. Leonard R. W., Budiansky B. On traveling waves in beams. NASA, 1954, Report 1173.
 25. Spillers W. R. Wave propagation in a thin cylindrical shell. Trans. ASME, Ser. E. J., Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 2, p. 346—350.
 26. Chou P. C. Analysis of axisymmetrical motions of cylindrical shells by the method of characteristics. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No 8.
 27. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
 28. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equation by finite differences. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 3, p. 243—255.
 29. Берзин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1960, т. 2.