Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА С НЕСИММЕТРИЧНЫМ НАДРЕЗОМ В ВЕРШИНЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

А. А. Храпков

(Ленинград)

Для одной задачи Гильберта относительно двумерной вектор-функции предлагается эффективная форма решения, удобная для приложений. К указанной задаче Гильберта, рассмотренной ранее Г. Н. Чеботаревым [1], сводятся практически важные случаи упругого равновесия бесконечного треугольного клина, ослабленного несимметричным надрезом в вершине. В данной статье излагается решение первой основной задачи для трех случаев:

1) надрез на продолжении одной из сторон клина;
2) надрез, выходящий на границу полуплоскости;
3) полубесконечный разрез с изломом в безграничной плоскости.

Приводятся формулы для коэффициента интенсивности напряжений вблизи устья надреза и для дислокации его берегов при действии равных и противоположно направленных сосредоточенных сил.

§ 1. Каноническая матрица одной однородной задачи Гильберта для двумерной вектор-функции. Пусть плоскость комплексной переменной z делится простым замкнутым контуром L на две области: Ω^+ (вне L) и Ω^- (внутри L).

Пусть далее квадратная матрица второго порядка $X(z)$ голоморфна вместе со своей обратной матрицей в областях Ω^+ и Ω^- повсюду, кроме конечного числа точек (полюсов) и имеет при $t \in L$ конечные пределы $X^+(t)$ или $X^-(t)$, если точка z приближается к L справа, оставаясь в Ω^+, или слева, оставаясь в Ω^-.

Рассмотрим однородное уравнение [2, 3]

$$X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1} = G(t) \tag{1.1}$$

где $G(t)$ — матрица 2×2, заданная на L, нигде не особенная и удовлетворяющая условию Гёльдера.

Матрица $X(z)$, обладающая указанными выше свойствами и удовлетворяющая на L уравнению (1.1), есть рациональное решение данного уравнения.

Каноническое решение задачи (1.1), т. е. решение, в котором матрицы $X(z)$ и $X^{-1}(z)$ кусочно-голоморфны, а на бесконечности порядок определителя матрицы $X(z)$ равен сумме порядков вектор-столбцов, может быть получено из рационального решения эффективно [1, 4].

Ф. Д. Гаховым [4] была поставлена задача отыскания класса матриц $G(t)$, допускающих решение уравнения (1.1) при добавочном условии

$$X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1} = [X^-(t)]^{-1}\,X^+(t) \tag{1.2}$$

Эту задачу решил Г. Н. Чеботарев [1], получив (с точностью до голоморфного в Ω^+ или Ω^- матричного множителя)

$$G(t) = b(t)\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix} + c(t)\begin{Vmatrix}l(t) & m(t)\\ n(t) & -l(t)\end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

где $b(t)$ и $c(t)$ — произвольные функции; $l(t)$, $m(t)$ и $n(t)$ — полиномы, а на матричную функцию $\lg G(t)$ накладываются еще специальные ограничения.

Задача (1.1) для случая, когда матрица $G(t)$ имеет вид (1.3), лежит в основе дальнейшего изложения, поэтому ниже дается решение этой задачи в простой и удобной для анализа форме.

Относительно полинома $(l^2 + mn)(z)$ справедливо одно из следующих предположений:

(1) $$l^2 + mn \equiv 0; \tag{1.4}$$

(2) $$l^2 + mn = [g(z)]^2 f(z) \tag{1.5}$$

Здесь $g(z)$, $f(z)$ — полиномы, и множество нулей $f(z)$ образуют взятые каждый по одному разу нули нечетной кратности полинома $(l^2 + mn)(z)$.

В случае (1.4) решение ищем в виде

$$\mathrm{X}(z) = \zeta(z)\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix} + \omega(z)\begin{Vmatrix}l(z) & m(z)\\ n(z) & -l(z)\end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{X}^{-1}(z) = [\zeta(z)]^{-1}\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix} - [\zeta(z)]^{-2}\omega(z)\begin{Vmatrix}l(z) & m(z)\\ n(z) & -l(z)\end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

Здесь функции $\zeta(z)$ и $\omega(z)$ подлежат определению.

При этом условие (1.2) выполняется тождественно, а уравнение (1.1) удовлетворяется, если на L выполнены два соотношения

$$\zeta^+(t)\,[\zeta^-(t)]^{-1} = b(t) \tag{1.8}$$

$$\omega^+(t)\,[\zeta^+(t)]^{-1} - \omega^-(t)\,[\zeta^-(t)]^{-1} = c(t)\,[b(t)]^{-1} \tag{1.9}$$

Поскольку $\det G(t) \neq 0$, то при условии (1.4) и $b(t) \neq 0$.

Отсюда следует, что уравнение (1.8) имеет решение в виде кусочноголоморфной функции $\zeta(z)$, нигде на конечном расстоянии не обращающейся в нуль. Тогда и уравнение (1.9) имеет решение в виде кусочноголоморфной функции $\omega(z)$. Таким образом, формулами (1.6), (1.7) дается не только рациональное, но и нормальное (не имеющее полюсов на конечном расстоянии) решение задачи (1.1), удовлетворяющее условию (1.2).

Введем в рассмотрение одну специальную форму для квадратной матрицы A второго порядка. Девиатором матрицы A 2×2 назовем матрицу вида

$$\operatorname{dev} A = A - sI$$

где s — полуслед матрицы A, а I — единичная матрица 2×2.

Пусть A — матрица с неособенным девиатором. Запишем

$$(\det A)^{-1/2}A = (\det A)^{-1/2}sI + (\det A)^{-1/2}(-\det\operatorname{dev} A)^{1/2}(-\det\operatorname{dev} A)^{-1/2}\operatorname{dev} A \tag{1.10}$$

Учитывая тождество

$$s^2 + \det\operatorname{dev} A = \det A$$

придадим соотношению (1.10) вид

$$(\det A)^{-1/2}A = I \operatorname{ch} \varepsilon + (-\det \operatorname{dev} A)^{-1/2} \operatorname{dev} A \operatorname{sh} \varepsilon \tag{1.11}$$

$$\varepsilon = \ln \frac{s + (-\det \operatorname{dev} A)^{1/2}}{(\det A)^{1/2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{s + (-\det \operatorname{dev} A)^{1/2}}{s - (-\det \operatorname{dev} A)^{1/2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Здесь $\lambda_{1,2}$ — собственные числа матрицы A. Параметр ε назовем показателем матрицы A.

Коммутантой матрицы A назовем матрицу

$$\operatorname{com} A = (-\det \operatorname{dev} A)^{-1/2} \operatorname{dev} A, \qquad (\operatorname{com} A)^2 = I$$

Получим

$$A = (\det A)^{1/2} (I \operatorname{ch} \varepsilon + \operatorname{com} A \operatorname{sh} \varepsilon) \tag{1.12}$$

Непосредственно проверяется следующее правило умножения матриц второго порядка, представленных в специальной форме (1.12) и имеющих общую коммутанту: чтобы умножить две такие матрицы, достаточно умножить их определители и сложить показатели, сохранив общую коммутанту (отсюда, в частности, вытекает, что рассматриваемые матрицы коммутируют между собой). Для обращения же матрицы в форме (1.12) достаточно обратить определитель и изменить знак показателя, сохранив прежнюю коммутанту.

Переходя к рассмотрению случая (1.5), предположим вначале, что $g(z)$ не обращается в нуль нигде на L, и представим матрицу $G(t)$ в специальной форме

$$\Delta^{-1/2} G(t) = I \operatorname{ch} \varepsilon(t) + B(t) \operatorname{sh} \varepsilon(t) \tag{1.13}$$

Здесь $\Delta(t)$, $\varepsilon(t)$ и $B(t) = \operatorname{com} G(t)$ — определитель, показатель и коммутанта матрицы $G(t)$, причем $B(t)$ есть граничное значение на L матрицы вида

$$B(z) = (l^2 + mn)^{-1/2} \begin{Vmatrix} l(z) & m(z) \\ n(z) & -l(z) \end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

определенной повсюду на плоскости z.

Решение ищем в виде

$$\Lambda^{-1}(z)\, \mathrm{X}(z) = I \operatorname{ch} [(f^{1/2}\beta)(z)] + B(z) \operatorname{sh} [(f^{1/2}\beta)(z)] \tag{1.15}$$

$$\Lambda(z)\, \mathrm{X}^{-1}(z) = I \operatorname{ch} [(f^{1/2}\beta)(z)] - B(z) \operatorname{sh} [(f^{1/2}\beta)(z)] \tag{1.16}$$

где функции $\Lambda(z)$ и $\beta(z)$ подлежат определению.

При этом условие (1.2) выполняется тождественно, а уравнение (1.1) удовлетворяется, если на L выполнены соотношения

$$\Lambda^+(t) [\Lambda^-(t)]^{-1} = \Delta^{1/2}(t), \quad \beta^+(t) - \beta^-(t) = f^{-1/2}(t)\, \varepsilon(t) \tag{1.17}$$

Обозначим

$$(4\pi i)^{-1} [\ln (\lambda_1 \lambda_2)] |_L = \varkappa_\Delta, \qquad (4\pi i)^{-1} \left[\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right] \Big|_L = \varkappa_\varepsilon \tag{1.18}$$

$$\varkappa_\Delta + \varkappa_\varepsilon = (2\pi i)^{-1} [\ln \lambda_1] |_L, \qquad \varkappa_\Delta - \varkappa_\varepsilon = (2\pi i)^{-1} [\ln \lambda_2] |_L$$

где $\lambda_{1,2}(t)$ — характеристические функции (собственные числа) матрицы $G(t)$.

Кусочно-голоморфные решения задач (1.17) даются формулами ([2], стр. 131)

$$\Lambda(z) = (z-a)^{\varkappa_\Delta} \exp\left[-\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\ln\Delta(t)}{t-z}\,dt\right] \qquad (1.19)$$

$$\beta(z) = f^{-1/2}(a)\,\varkappa_\varepsilon \ln(z-a) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^{-1/2}(t)\,\varepsilon(t)}{t-z}\,dt \qquad (1.20)$$

Здесь a — произвольная точка на L, с которой совпадают начало и конец пути интегрирования в (1.19) и (1.20).

Чтобы решение, определенное формулами (1.15), (1.16), имело целый ограниченный порядок на бесконечности, достаточно положить $\varkappa_\varepsilon = 0$ и в случае, если $k > 2$ (k — степень полинома $f(z)$), потребовать еще выполнения на L следующих равенств:

$$\int_L t^{\alpha-1} f^{-1/2}(t)\,\varepsilon(t)\,dt = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, \gamma) \qquad (1.21)$$

где γ — наибольшее из целых чисел, таких, что величина $2\gamma + 1$ не превосходит k.

При этом $\varkappa_\Delta$ — целое, а функция $f^{1/2}(z)\,\beta(z)$ определяется соотношением

$$f^{1/2}(z)\,\beta(z) = \frac{f^{1/2}(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f^{-1/2}(t)\,\varepsilon(t)}{t-z}\,dt \qquad (1.22)$$

правая часть которого в силу (1.21) ограничена на бесконечности.

Функция $\Lambda(z)$ нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается. Наличие изолированных особенностей (полюсов) коммутанты $B(z)$ в нулях полинома $g(z)$, хотя и не учитывалось при получении формы (1.12), находится в полном соответствии с определением рационального решения. Если $g(z)$ имеет нули на L, то соответствующее решение, имеющее полюсы на L, можно получить предельным переходом.

Отметим, что полученный для задачи (1.1) на односвязном замкнутом контуре результат сохраняет силу и для контура в виде бесконечной линии (например, одной из координатных осей), если элементы матрицы $G(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности бесконечно удаленной точки.

§ 2. Некоторые задачи для бесконечного клина с прямолинейным несимметричным надрезом в вершине. Пусть дан бесконечный треугольный клин с надрезом (0.1) на прямой $\varphi = 0$, причем грани клина $\varphi = \theta_1$ и $\varphi = -\theta_2$ свободны от напряжений, а к берегам надреза приложены заданные нагрузки, равные между собой и противоположно направленные. Компоненты напряженно-деформированного состояния обозначим следующим образом:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = g_1(r, \varphi), \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = g_2(r, \varphi), \quad \tau_{r\varphi} = g_3(r, \varphi), \quad \sigma_\varphi = g_4(r, \varphi)$$

Соответствующие трансформанты Меллина обозначим так:

$$g_j^\circ(\varphi, p) = \int_0^\infty r^p g_j(r, \varphi)\, dr$$

Рассматривая первую основную задачу для клина $0 \leqslant \varphi \leqslant \theta_1$ [5], получим следующие соотношения между трансформантами производных смещений $g_{1,2}^\circ(+0, p)$ и напряжений $g_{3,4}^\circ(0, p)$ на линии надреза:

$$\begin{aligned}
{}^1/_2 E g_2^\circ(+0,\ p) &= D(p, \theta_1)\quad (\sin p\theta_1 \cos p\theta_1 + p \sin\theta_1 \cos\theta_1)\, g_4^\circ(0,\ p) + \\
&\quad + [p(p-1)\sin^2\theta_1 D(p,\ \theta_1) - {}^1/_2(1-\nu)]\, g_3^\circ(0,\ p) \\
{}^1/_2 E g_1^\circ(+0,\ p) &= [-p(p+1)\sin^2\theta_1 D(p,\ \theta_1) + {}^1/_2(1-\nu)]\, g_4^\circ(0,\ p) + \\
&\quad + D(p,\ \theta_1)(\sin p\theta_1 \cos p\theta_1 - p\sin\theta_1\cos\theta_1)\, g_3^\circ(0, p) \\
D(p,\ \theta) &= (p^2 \sin^2\theta - \sin^2 p\theta)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Аналогичные соотношения с заменой $+0$ на -0 и θ_1 на $-\theta_2$ имеют место для клина $0 \geqslant \varphi \geqslant -\theta_2$. Отсюда вытекают следующие выражения для разрывов трансформант производных смещений на линии $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
&{}^1/_4 E[g_2^\circ(+0,\ p) - g_2^\circ(-0,\ p)] = {}^1/_2 p(p-1)[\sin^2\theta_1 D(p, \theta_1) - \\
&\qquad - \sin^2\theta_2 D(p,\ \theta_2)]\, g_3^\circ(0,\ p) + \\
&+ {}^1/_4 [D(p, \theta_1)(\sin 2p\theta_1 + p\sin 2\theta_1) + D(p, \theta_2)(\sin 2p\theta_2 + p\sin 2\theta_2)]\, g_4^\circ(0, p) \\
&{}^1/_4 E[g_1^\circ(+0,\ p) - g_1^\circ(-0,\ p)] = {}^1/_2 p(p+1)[\sin^2\theta_2 D(p,\ \theta_2) - \\
&- \sin^2\theta_1 D(p,\ \theta_1)]\, g_4^\circ\ (0,\ p) + {}^1/_4[D(p,\ \theta_1)(\sin 2p\theta_1 - p\sin 2\theta_1) + \\
&\qquad + D(p,\ \theta_2)(\sin 2p\theta_2 - p\sin 2\theta_2)]\, g_3^\circ(0,\ p)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение двумерные вектор-столбцы 2×1 вида

$$\begin{gathered}
u(r) = \{{}^1/_4 E[g_2(r, +0) - g_2(r, -0)],\ {}^1/_4 E[g_1(r, +0) - g_1(r, -0)]\} \\
\sigma(r) = \{g_4(r, 0), g_3(r, 0)\}, \quad r > 1, \quad u(r) = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

и векторные трансформанты Меллина

$$u^{\circ+}(p) = \int_0^1 r^p u(r)\, dr, \qquad \sigma^{\circ+}(p) = \int_0^1 r^p \sigma(r)\, dr, \qquad \sigma^{\circ-}(p) = \int_1^\infty r^p \sigma(r)\, dr$$

а также матрицу 2×2 вида

$$\begin{aligned}
2\{G\}_{11}(p) &= {}^1/_2[D(p,\ \theta_1)(\sin p\theta_1 \cos p\theta_1 + p\sin\theta_1\cos\theta_1) + \\
&\quad + D(p,\ \theta_2)(\sin p\theta_2 \cos p\theta_2 + p\sin\theta_2\cos\theta_2)] \\
2\{G\}_{12}(p) &= p(p-1)[\sin^2\theta_1 D(p,\ \theta_1) - \sin^2\theta_2 D(p,\ \theta_2)] \\
2\{G\}_{21}(p) &= -p(p+1)[\sin^2\theta_1 D(p,\ \theta_1) - \sin^2\theta_2 D(p,\ \theta_2)] \\
2\{G\}_{22}(p) &= {}^1/_2[D(p,\ \theta_1)\ (\sin p\theta_1 \cos p\theta_1 - p\sin\theta_1\cos\theta_1) + \\
&\quad + D(p,\ \theta_2)(\sin p\theta_2 \cos p\theta_2 - p\sin\theta_2\cos\theta_2)]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Вектора $u^{\circ+}(a)$, $\sigma^{\circ+}(p)$ голоморфны в полуплоскости $\delta > -{}^1/_2$, а вектор $\sigma^{\circ-}(p)$ — в полуплоскости $\delta < 0$. Следовательно, двумерный вектор вида

$$\varphi(p) = \begin{cases} u^{\circ+}(p) & (\delta \geqslant \delta_0) \\ \sigma^{\circ-}(p) & (\delta \leqslant \delta_0) \end{cases} \tag{2.5}$$

есть кусочно-голоморфный с линией скачков L $\delta = \delta_0$ (δ_0 — любое число из открытого интервала $(-{}^1/_2,\ 0)$).

Двумерный же вектор вида

$$\psi(p) = G(p)\,\sigma_0^+(p) \tag{2.6}$$

есть заданный вектор.

В силу (2.5) и (2.6) равенство (2.2) на L принимает вид

$$t \in L, \quad \varphi^+(t) = G(t)\,\varphi^-(t) + \psi(t) \tag{2.7}$$

где теперь уже, в полном соответствии с обозначениями § 1, верхними индексами «плюс» и «минус» отмечены предельные значения кусочно-голоморфного вектора $\varphi(p)$ на линии скачков соответственно справа и слева.

Равенство (2.7) представляет собой записанную в векторно-матричной форме систему уравнений Винера — Хопфа для неизвестных трансформант разрывов производных смещений на самом надрезе и напряжений на его продолжении; одновременно это есть неоднородная задача Гильберта для кусочно-голоморфного двумерного вектора $\varphi(\rho)$ с линией скачков L.

Имеем

$$2t^{-1}\operatorname{dev} G(t) = \begin{Vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

$$\Delta_{11} = {}^1/_2\,[D(t,\ \theta_1)\sin 2\theta_1 + D(t,\ \theta_2)\sin 2\theta_2]$$

$$\Delta_{12} = (t-1)\,[D(t,\ \theta_1)\sin^2\theta_1 - D(t,\ \theta_2)\sin^2\theta_2]$$

$$\Delta_{21} = -(t+1)\,[D(t,\ \theta_1)\sin^2\theta_1 - D(t,\ \theta_2)\sin^2\theta_2]$$

$$\Delta_{22} = -\Delta_{11}$$

Рассмотрим три случая представимости матрицы $G(t)$ в виде (1.3).

1. Надрез на продолжении одной из сторон объемлющего полуплоскость клина ($\theta_2 = \pi$)

$$\operatorname{dev} G(t) = \frac{t\sin\theta_1 D(t,\ \theta_1)}{2}\begin{Vmatrix} \cos\theta_1 & (t-1)\sin\theta_1 \\ -(t+1)\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

2. Надрез, выходящий на границу полуплоскости ($\theta_1 + \theta_2 = \pi$)

$$\operatorname{dev} G(t) = \frac{t\sin\theta_1\,[D(t,\ \theta_1) - D(t,\ \theta_2)]}{2}\begin{Vmatrix} \cos\theta_1 & (t-1)\sin\theta_1 \\ -(t+1)\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

3. Полубесконечный разрез с изломом в безграничной плоскости ($\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$); выражение $\operatorname{dev} G(t)$ сохраняет вид (2.10).

Как это следует из (2.9) и (2.10), во всех рассмотренных случаях имеет место соотношение

$$\operatorname{com} G(t) = B(t), \qquad B(p) = (l^2 + mn)^{-1/2}\begin{Vmatrix} l(p) & m(p) \\ n(p) & -l(p) \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

$$l(p) = \cos\theta_1, \qquad m(p) = (p-1)\sin\theta_1, \qquad n(p) = -(p+1)\sin\theta_1$$

Для остальных параметров матрицы $G(t)$ сохранены те же обозначения $\Delta(t)$, $\varepsilon(t)$, $\lambda_{1,2}(t)$, $\varkappa_\Delta$, $\varkappa_\varepsilon$, что и в § 1.

Порядок полинома $l^2 + mn = 1 - p^2\sin^2\theta_1$ равен $k = 2$, поэтому условия вида (1.21) отсутствуют.

Согласно (1.15), (1.19) и (1.20), решение однородной задачи (1.1), соответствующей задаче (2.7), имеет вид

$$X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1} = G(t)$$

$$\Lambda^{-1}(p)X(p) = I\operatorname{ch}[(1-p^2\sin^2\theta_1)^{1/2}\beta(p)] + B(p)\operatorname{sh}[(1-p^2\sin^2\theta_1)^{1/2}\beta(p)] \tag{2.12}$$

$$\Lambda(p) = (p-\delta_0)^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\Delta(t)}{t-p}\,dt\right]$$

$$\beta(p) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(1-t^2\sin^2\theta_1)^{-1/2}\varepsilon(t)}{t-p}\,dt$$

При $\delta_0 \to 0$, учитывая симметрию (кососимметрию) отдельных функций относительно аргумента τ на мнимой оси, получим следующие формулы:

$$\Lambda(p)\exp\left[-\frac{p}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln|\Delta(i\tau)|}{\tau^2+p^2}\,d\tau\right] = \begin{cases} p^{1/2}, & -\frac{\pi}{2}\leqslant \arg p \leqslant \frac{\pi}{2},\ \delta>0 \\ -ip^{1/2}, & \frac{\pi}{2}\leqslant \arg p\leqslant \frac{3\pi}{2},\ \delta<0 \end{cases}$$

$$\beta(p) = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(1+\tau^2\sin^2\theta_1)^{-1/2}\varepsilon(i\tau)}{\tau^2+p^2}\,d\tau \tag{2.13}$$

Непосредственно из (2.11), (2.12) и (2.13) имеем при $\delta > 0$

$$\Lambda(p) = p\Lambda^{-1}(-p), \qquad \beta(p) = -\beta(-p), \qquad B(p) = B^{(*)}(-p)$$

$$X(p) = pX^{(*)(-1)}(-p) \tag{2.14}$$

Верхний значок $^{(*)}$ означает транспонирование матрицы. Из (2.13) вытекают следующие асимптотические зависимости, справедливые при больших $|p|$:

$$\beta(p) = q(p\sin\theta_1)^{-1}, \qquad q = \frac{\sin\theta_1}{\pi}\int\limits_0^\infty (1+\tau^2\sin^2\theta_1)^{-1/2}\varepsilon(i\tau)\,d\tau$$

$$\begin{array}{lll} \delta>0, & \Lambda(p)\sim p^{1/2}, & X(p)\sim p^{1/2}Q, \\ \delta<0, & \Lambda(p)\sim -ip^{1/2}, & X(p)\sim -ip^{1/2}Q, \end{array} \qquad Q = \begin{Vmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{Vmatrix} \tag{2.15}$$

Матрица $X(p)$, определенная формулами (2.12), (2.13), является каноническим решением однородного уравнения, так как она кусочно-голоморфна вместе с матрицей $X^{-1}(p)$ (линия скачков L — мнимая ось), а сумма порядков отдельных столбцов составляет 1.0, что в точности совпадает с порядком определителя.

Ветвь кусочно-голоморфной матрицы $X(p)$, определенной в правой полуплоскости, при помощи матрицы $(GX)(p)$ аналитически продолжима в левую полуплоскость, по крайней мере, до вертикальной прямой $\delta = -{}^1/_2$; при этом обратная матрица $(X^{-1}G^{-1})(p)$ также голоморфна. Полученную, таким образом, пару матриц $X(p)$ и $(GX)(p)$ можно на любой вертикальной прямой L в открытой полосе $0 > \delta > -{}^1/_2$ рассматривать как предельные значения кусочно-голоморфной матрицы $X(p)$ слева и справа. Возвращаясь к неоднородной задаче (2.7), получим, учитывая (2.6)

$$t \in L, \quad [X^+(t)]^{-1}\varphi(t) = [X^-(t)]^{-1}\varphi^-(t) + [X^+(t)]^{-1}\psi(t) \tag{2.16}$$
$$[X^+(t)]^{-1}\psi(t) = [X^-(t)]^{-1}\sigma^{\circ+}(t)$$

При больших $|p|$ для нагрузок, ограниченных на всем замкнутом интервале $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\sigma^{\circ+}(p) \sim 0(p^{-1})$, поэтому исчезающее на бесконечности решение задачи (2.16) дается формулой

$$\varphi(p) = -\frac{X(p)}{2\pi i}\int_L \frac{[X^-(t)]^{-1}\sigma^{\circ+}(t)}{t-p}dt \tag{2.17}$$

Определенную в левой полуплоскости формулами (2.12), (2.13) ветвь кусочно-голоморфной матрицы $X(p)$ также можно при помощи матрицы $(G^{-1}X)(p)$ аналитически продолжить в правую полуплоскость. Однако обратная матрица $(X^{-1}G)(p)$ в этом случае будет иметь полюс в точке $p = 0$. Результаты вычислений, основанных на применении первых двух зависимостей (2.14), дают

$$\operatorname{Res}(\Delta^{-1/2}\Lambda)(0) = -\lim_{p\to 0}\sqrt{-p\Delta^{1/2}(p)} = -\lim_{p\to 0}\sqrt{-p(\lambda_1^{1/2}\lambda_2^{1/2})(p)}$$
$$\beta^+(0) = -\beta^-(0) = {}^1/_2\varepsilon(0) = {}^1/_4\lim_{p\to 0}\ln[(\lambda_1\lambda_2^{-1})(p)] \tag{2.18}$$

где $\lambda_{1,2}(p)$ — характеристические функции матрицы $G(p)$.

Для вычета в точке $p = 0$ получим формулу

$$-2\operatorname{Res}(X^{-1}G)(0) = \lim_{p\to 0}\{I[\sqrt{-p\lambda_1(p)} + \sqrt{-p\lambda_2(p)}] +$$
$$+ H[\sqrt{-p\lambda_1(p)} - \sqrt{-p\lambda_2(p)}]\}$$
$$H = B(0), \quad \{H\}_{11} = \cos\theta_1, \quad \{H\}_{12} = -\sin\theta_1, \quad \{H_{21}\} = -\sin\theta_1,$$
$$\{H\}_{22} = -\cos\theta_1 \tag{2.19}$$

§ 3. Концентрация напряжений на продолжении надреза и взаимные смещения его берегов. Назовем вектором интенсивности напряжений вектор-столбец 2×1 вида

$$n = \lim_{r\to 1+0}(r-1)^{1/2}\sigma(r) \tag{3.1}$$

Очевидно, что компоненты вектора n суть коэффициенты интенсивности нормальных и касательных напряжений на продолжении надреза. Имеем ([6], стр. 48) при больших $|p|$

$$\sigma^{\circ-}(p) \sim i\Gamma({}^1/_2)np^{-1/2} \tag{3.2}$$

где $\Gamma(x)$ — стандартное обозначение гамма-функции.

Сравнивая (2.17) и (3.2), получим в силу (2.5) и (2.15)

$$\sqrt{\pi}\, n = -\frac{Q}{2\pi i}\int_L [X^-(t)]^{-1}\sigma^{\circ+}(t)\,dt \tag{3.3}$$

Подставляя в (3.3) выражение трансформанты $\sigma^{\circ+}(t)$ через ее оригинал, имеем

$$-\sqrt{\pi}\,n = \frac{Q}{2\pi i}\int_L [X^-(t)]^{-1}\,dt\int_0^1 r^t\sigma(r)\,dr \tag{3.4}$$

Изменяя порядок интегрирования в (3.4), получим

$$n = \int_0^1 N(r_0)\,\sigma(r_0)\,dr_0, \qquad -\sqrt{\pi}\,N(r_0) = QM(r_0) \tag{3.5}$$

$$M(r_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L r_0{}^t\,[X^-(t)]^{-1}, \quad dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L r_0{}^t\,[X^+(t)]^{-1}G(t)\,dt \tag{3.6}$$

Здесь $N(r_0)$ и $M(r_0)$ — матрицы 2×2. Первая из них есть матричная функция Грина для вектора интенсивности, так как при действии равных и противоположно направленных сил в точке r_0 его величина дается произведением матрицы $N(r_0)$ на вектор-столбец справа, причем компоненты вектора суть общие для обеих сил нормальная и касательная составляющие.

Введем теперь в рассмотрение вектор-столбец $v(r)$ 2×1 взаимных смещений точек, расположенных на противоположных берегах надреза и одинаково удаленных от вершины клина, а также соответствующую векторную трансформанту Меллина

$$v(r) = \{[u_\varphi(r, +0) - u_\varphi(r, -0)], \qquad [u_r(r, +0) - u_r(r, -0)]\}$$

$$r > 1, \quad v(r) = 0, \qquad v^\circ(p) = \int_0^1 r^p v(r)\,dr$$

Имеем

$$\tfrac{1}{4}Ev'(r) = u(r), \qquad \tfrac{1}{4}Ev^\circ(p) = -(p+1)^{-1}u^\circ(p+1)$$

С учетом (2.14) получаем из (2.17)

$$\tfrac{1}{4}Ev^\circ(p) = \frac{X^{(*)(-1)}(-p-1)}{2\pi i}\int_L \frac{[X^-(t)]^{-1}\sigma^{\circ+}(t)}{t-p-1}\,dt \tag{3.7}$$

По теореме умножения трансформант ([7], стр. 503) оригинал левой части в (3.7) дается формулой

$$\tfrac{1}{4}Ev(r) = \int_0^\infty M^{(*)}(r\xi)\,\eta(\xi)\,d\xi$$

$$\eta^\circ(p) = \int_0^\infty r^p\eta(r)\,dr = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{[X^-(t)]^{-1}\sigma^{\circ+}(t)}{t+p}\,dt \tag{3.8}$$

где $\eta(r)$ — также вектор-столбец 2×1.

Теорема умножения оригиналов ([7], стр. 505) для принятой в данной работе формы преобразования Меллина дает:

$$\eta(r) = \eta_0(r)\begin{cases} 0 & (r\leqslant 1) \\ -\dfrac{1}{r} & (r>1)\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\eta_0^\bullet(p) = \int_0^\infty r^p \eta_0(r)\, dr = [X(p)]^{-1} \sigma^{\circ +}(p)$$

Применяя еще раз теорему умножения трансформант, имеем

$$\eta_0(r) = \int_0^1 M(r_0 r)\, \sigma(r_0)\, dr_0 \tag{3.10}$$

Равенства (3.8) — (3.10) дают в совокупности

$$\frac{1}{4} Ev(r) = -\int_1^\infty M^{(*)}(r\xi) \frac{d\xi}{\xi} \int_0^1 M(r_0\xi)\, \sigma(r_0)\, dr_0 \tag{3.11}$$

Изменяя порядок интегрирования в (3.11), получим

$$v(r) = \int_0^1 V(r, r_0)\, \sigma(r_0)\, dr_0 \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{4} EV(r, r_0) = -\int_1^\infty M^{(*)}(r\xi)\, M(r_0\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

Здесь $V(r, r_0)$ — матрица 2×2, представляющая собой матричную функцию Грина для взаимных смещений берегов надреза. Действительно, вектор-столбец $v(r)$ взаимных смещений берегов в точке r при действии равных и противоположно направленных сосредоточенных сил в точке r_0 дается произведением матрицы $V(r, r_0)$ на вектор-столбец справа, причем компоненты вектора суть общие для обеих сил нормальная и касательная составляющие.

Учитывая, что матрица $M(r_0)$ есть нулевая матрица, когда значение аргумента превышает 1.0, получим еще

$$\frac{1}{4} EV(r, r_0) = -\int_1^\vartheta \xi^{-1} M^{(*)}(r\xi)\, M(r_0\xi)\, d\xi = -\int_\theta^1 x^{-1} M^{(*)}(r / x)\, M(r_0 / x)\, dx$$

$$(\vartheta = \inf(1 / r, 1 / r_0), \quad \theta = \sup(r, r_0)) \tag{3.13}$$

Формулами (3.5), (3.12) и (3.13) дается связь между матричными функциями Грина для вектора интенсивности и вектора взаимных смещений берегов при действии равных и противоположно направленных сосредоточенных сил. Из (3.13) вытекает еще соотношение

$$V(r, r_0) = V^{(*)}(r_0, r) \tag{3.14}$$

Равенство (3.14) выражает закон взаимности смещений в условиях данной задачи.

Переходя к построению приближенных формул для вычисления матричной функции $M(r_0)$, приведем вначале два тождества, непосредственно вытекающие из леммы Жордана и теоремы о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-t)\, r_0^{\,t}}{\Gamma(^1/_2 - t)}\, dt = -\sum_{k=0}^\infty \frac{r_0^{\,k} \operatorname{Res} \Gamma(-k)}{\Gamma(^1/_2 - k)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k r_0^{\,k}}{k!\, \Gamma(^1/_2 - k)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{r_0^{\,k} \Gamma(k + ^1/_2)}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty r_0^{\,k} \prod_{j=1}^k \frac{j - ^1/_2}{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 - r_0)^{-^1/_2} \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Gamma(-2\theta t/\pi)(\cos 2\theta t-1)\,r_0^{\,t}\,dt}{\Gamma(^1/_2-2\theta t/\pi)\cos 2\theta t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_0^{\pi k/2\theta}(1-\cos\pi k)}{\cos\pi k\Gamma(^1/_2-k)}\operatorname{Res}\Gamma\left(-\frac{2\theta}{\pi}\frac{k\pi}{2\theta}\right)=$$

$$=\frac{1}{\theta}\sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\Gamma(k+{}^1/_2)\,r_0^{\pi k/2\theta}}{\Gamma(k+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\theta}\left[(1-r_0^{\pi/2\theta})^{-1/_2}+(1+r_0^{\pi/2\theta})^{-1/_2}\right]\quad(3.16)$$

В первом из рассматриваемых случаев (надрез на продолжении одной из сторон клина, $\theta_2=\pi$) выражение (3.6) запишем в виде

$$M(r_0)={}^1/_2\left\{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/_2}(1-r_0)^{-1/_2}+\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)^{1/_2}\left[(1-r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}-(1+r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}\right]\right\}Q^{-1}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L r_0^{\,t}\left\{[X^+(t)]^{-1}G(t)-{}^1/_2\left[\frac{\Gamma(-2\theta_1 t/\pi)(\cos 2\theta_1 t-1)}{\Gamma(^1/_2-2\theta_1 t/\pi)\cos 2\theta_1 t}\left(\frac{2\theta_1}{\pi}\right)^{1/_2}+\frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(^1/_2-t)}\right]Q^{-1}\right\}dt$$
$$(3.17)$$

В остальных двух случаях ($\theta_1+\theta_2=\pi$, $\theta_1+\theta_2=2\pi$) запишем

$$M(r_0)={}^1/_2\left\{\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)^{1/_2}\left[(1-r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}-(1+r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}\right]+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{2\theta_2}\right)^{1/_2}\left[(1-r_0^{\pi/2\theta_2})^{-1/_2}-(1+r_0^{\pi/2\theta_2})^{-1/_2}\right]\Big\}Q^{-1}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L r_0^{\,t}\Big\{[X^+(t)]^{-1}G(t)-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\theta_1}{\pi}\right)^{1/_2}\frac{\Gamma(-2\theta_1 t/\pi)(\cos 2\theta_1 t-1)}{\Gamma(^1/_2-2\theta_1 t/\pi)\cos 2\theta_1 t}+\left(\frac{2\theta_2}{\pi}\right)^{1/_2}\frac{\Gamma(-2\theta_2 t/\pi)(\cos 2\theta_2 t-1)}{\Gamma(^1/_2-2\theta_2 t/\pi)\cos 2\theta_2 t}\right]Q^{-1}\Big\}dt$$
$$(3.18)$$

Рассмотрим определенную в полуплоскости $\delta>-{}^1/_2$ матрицу, граничное значение которой на L есть подынтегральное выражение в (3.18). Она имеет полюсы в точках $s\pi/2\theta_1$, $s\pi/2\theta_2$ (s — целое), а также в полюсах функций $D(p,\theta_1)$ и $D(p,\theta_2)$, которые при больших s имеют соответственно вид

$$2\theta_{1,2}p_{2s}/\pi\sim(2s+1)+i(2/\pi)\ln\left[(2s+1)\pi\theta_{1,2}^{-1}\sin\theta_{1,2}\right],\qquad p_{2s+1}=\bar{p}_{2s}$$

Условимся понимать под группой полюсов с номером s совокупность из пары комплексно-сопряженных полюсов функций $D(p,\theta_1)$ и $D(p,\theta_2)$, а также точек $s\pi/2\theta_1$ и $s\pi/2\theta_2$. Объединяя в разложении интеграла (3.18) по вычетам в один член каждый раз слагаемые, относящиеся к некоторой группе полюсов, получим быстро сходящийся ряд, и совершенно аналогично обстоит дело в разложении интеграла (3.17).

Приближенные выражения матриц $M(r_0)$, пригодные для использования на всем интервале $0\leqslant r_0\leqslant 1$, получим, оставив в разложении интегралов по вычетам подынтегральных функций лишь члены, соответствующие первым двум полюсам $p=0$, $p=1$. Из (3.17) и (3.18) имеем

$$M(r_0)\approx M_1(r_0)\quad(3.19)$$

$$\theta_2=\pi,\quad M_1(r_0)=-\operatorname{Res}(X^{-1}G)(0)-r_0\operatorname{Res}(X^{-1}G)(1)+{}^1/_2\{(2\theta_1)^{-1/_2}[(1-r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}-$$
$$-(1+r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}-r_0^{\pi/2\theta_1}]+\pi^{-1/_2}[(1-r_0)^{-1/_2}-1-{}^1/_2r_0]\}Q^{-1}$$

$$\theta_1+\theta_2=\pi,\ \theta_1+\theta_2=2\pi,\ M_1(r_0)=-\operatorname{Res}(X^{-1}G)(0)-r_0\operatorname{Res}(X^{-1}G)(1)+$$
$$+{}^1/_2\{(2\theta_1)^{-1/_2}[(1-r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}-(1+r_0^{\pi/2\theta_1})^{-1/_2}-r_0^{\pi/2\theta_1}]+$$
$$+(2\theta_2)^{-1/_2}[(1-r_0^{\pi/2\theta_2})^{1/_2}-(1+r_0^{\pi/2\theta_2})^{-1/_2}-r_0^{\pi/2\theta_2}]\}Q^{-1}$$

где $M(r_0)$ — матрица 2×2.

Величина $\operatorname{Res}(X^{-1}G)(1)$ вычисляется при помощи формул (2.4), (2.12), (2.13). Обозначая еще

$$\Phi(x,\theta)=[(1-x^{\pi/2\theta})^{-1/_2}-(1+x^{\pi/2\theta})^{-1/_2}-x^{\pi/2\theta}](2\theta)^{-1/_2}$$

получим формулы, которые приводятся ниже.

Таблица

$\theta_1°$	q	$\{A_1\}_{11}$	$\{A_1\}_{21}$	$\{A_1\}_{22}$
$\theta_2=\pi$				
15	0.536	10.732	—2.903	—0.103
30	0.423	2.861	—1.720	—0.113
45	0.324	1.046	—1.163	—0.117
60	0.239	0.353	—0.820	—0.120
75	0.169	0.034	—0.586	—0.123
90	0.113	—0.126	—0.420	—0.126
105	0.071	—0.209	—0.296	—0.129
120	0.040	—0.251	—0.205	—0.132
135	0.020	—0.271	—0.136	—0.135
150	0.008	—0.279	—0.082	—0.138
165	0.002	—0.282	—0.038	—0.140

$\theta_1°$	q	$\{B_1\}_{11}$	$\{B_1\}_{21}$
$\theta_1+\theta_2=\pi$			
15	0.536	10.786	—2.890
30	0.419	2.892	—1.669
45	0.308	1.056	—1.056
60	0.203	0.368	—0.637
75	0.101	0.081	—0.302
$\theta_1°$	q	$\{C_1\}_{11}$	$\{C_1\}_{21}$
$\theta_1+\theta_2=2\pi$			
105	0.068	—0.672	—2.506
120	0.036	—0.295	—0.510
135	0.016	—0.286	—0.286
150	0.005	—0.285	—0.165
165	0.001	—0.284	—0.077

1°. *Надрез на продолжении одной из сторон объемлющего полуплоскость клина* ($\theta_2=\pi$)

$$M_1(r_0) = A_0 - r_0 A_1 + {}^1/_2\{\Phi(r_0,\theta_1) + \pi^{-1/2}[(1-r_0)^{-1/2} - 1 - {}^1/_2 r_0]\}\, Q^{-1} \tag{3.20}$$

$$\sqrt{2}A_0 = \begin{Vmatrix} \sqrt{a_1}\cos^2\vartheta + \sqrt{a_2}\sin^2\vartheta & -(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})\sin\vartheta\cos\vartheta & \sqrt{a_1}\sin^2\vartheta + \sqrt{a_2}\cos^2\vartheta \end{Vmatrix}$$

$$2\Lambda(1)A_1 = \frac{e^{-\tau}}{\operatorname{tg}\theta_1 - \theta_1}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\operatorname{tg}\theta_1 & 0 \end{Vmatrix} - \frac{1}{\pi}\begin{Vmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 2\operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{sh}\tau & e^{\tau} \end{Vmatrix}$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{\theta_1 \mp \sin\theta_1} + \frac{1}{\pi}, \qquad \vartheta = \frac{\theta_1}{2}, \qquad \tau = \cos\theta_1\,\beta(1)$$

Значения величин q, а также ненулевых элементов матрицы A_1 для значений угла $\theta_1 = 15$, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165° вычислены на ЭЦВМ «Урал-2» и приведены в таблице.

2°. *Надрез, выходящий на границу полуплоскости* ($\theta_1+\theta_2=\pi$)

$$M_1(r_0) = B_0 - r_0 B_1 + {}^1/_2[\Phi(r_0,\theta_1) + \Phi(r_0,\pi-\theta_1)]\, Q^{-1} \tag{3.21}$$

$$\sqrt{2}B_0 = \begin{Vmatrix} \sqrt{b_1}\cos^2\vartheta + \sqrt{b_2}\sin^2\vartheta & -(\sqrt{b_1}-\sqrt{b_2})\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -(\sqrt{b_1}-\sqrt{b_2})\sin\vartheta\cos\vartheta & \sqrt{b_1}\sin^2\vartheta + \sqrt{b_2}\cos^2\vartheta \end{Vmatrix}$$

$$2\Lambda(1)B_1 = e^{-\tau}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1-\theta_1} - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1-\theta_1+\pi}\right)\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\operatorname{tg}\theta_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$b_{1,2} = \frac{\pi}{\theta_1(\pi-\theta_1) - \sin^2\theta_1 \mp (\pi-2\theta_1)\sin\theta_1}, \qquad \vartheta = \frac{\theta_1}{2}, \qquad \tau = \cos\theta_1\beta(1)$$

Значения величин q и ненулевых элементов матрицы B_1 для значений угла $\theta_1 = 15$, 30, 45, 60, 75° приведены в таблице. В случае надреза на биссектрисе полуплоскости ($\theta_1 = 90°$) B_1 — нулевая матрица, $q = 0$. Для значений угла θ_1 в интервале 90 ÷ 180° элементы матрицы B_1 могут быть выражены через значения соответствующих элементов в интервале 0 ÷ 90°, так как диагональные элементы суть симметричные, а внедиагональные — кососимметричные функции аргумента $\theta_1 - 90°$.

3°. ***Полубесконечный разрез с изломом в безграничной плоскости*** $(\theta_1 + \theta_2 = 2\pi)$

$$M_1(r_0) = C_0 - r_0 C_1 + {}^1/_2\,[\Phi(r_0, \theta_1) + \Phi(r_0, 2\pi - \theta_1)]\,Q^{-1} \tag{3.22}$$

$$\sqrt{2}\,C_0 = \begin{Vmatrix} \sqrt{c_1}\cos^2\vartheta + \sqrt{c_2}\sin^2\vartheta & -(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2})\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2})\sin\vartheta\cos\vartheta & \sqrt{c_1}\sin^2\vartheta + \sqrt{c_2}\cos^2\vartheta \end{Vmatrix}$$

$$2\Lambda(1)\,C_1 = e^{-\tau}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1 - \theta_1} - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_1 - \theta_1 + 2\pi}\right)\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\operatorname{tg}\theta_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$c_{1,2} = \frac{2\pi}{\theta_1(2\pi - \theta_1) - \sin^2\theta_1 \mp (2\pi - 2\theta_1)\sin\theta_1}, \quad \vartheta = \frac{\theta_1}{2}, \quad \tau = \cos\theta_1\,\beta(1)$$

Значения величин q, а также ненулевых элементов матрицы C_1 для значений угла $\theta_1 = 105, 120, 135, 150, 165°$ приведены в таблице. В случае, когда значение угла между полубесконечным разрезом и конечным участком от точки излома превосходит 75°, погрешность приближенной формулы (3.19) весьма значительна. Это связано с наличием отброшенных при ее выводе полюсов функции $D(p, \theta_2)$ вблизи значения $p = 1$ (и даже ближе к началу координат при $\theta_1 \leqslant 103°$). К тому же при малых значениях угла θ_1 необходимо проверять наличие незакрывшегося полубесконечного надреза, что практически трудно осуществить.

В заключение отметим, что задача об упругом равновесии клина с надрезом на биссектрисе сводится к одному функциональному уравнению Винера — Хопфа и поэтому всегда имеет решение в виде интегралов типа Коши. Для распределенных нагрузок эта задача рассматривалась, например, в работах [8,9,10,11].

Поступила 16 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для систем n пар функций. Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, стр. 31—58.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3. М., Физматгиз, 1968.
3. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, изд. 2. М., «Наука», 1970.
4. Гахов Ф. Д. Краевая задача Римана для систем n пар функций. УМН, 1952, т. 7, вып. 4, стр. 3—54.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости, изд. 2. Л., «Наука», 1968.
6. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3. М., «Наука», 1965.
8. Srivastav R. P. Narain Prem, Certain two-dimensional Problems of stress distribution in wedgechaped elastic solids under discontinuons load. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, vol. 61, No. 4, p. 945—954.
9. Банцури Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
10. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
11. Сметанин Б. И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина. ПММ, т. 32, вып. 4.