Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

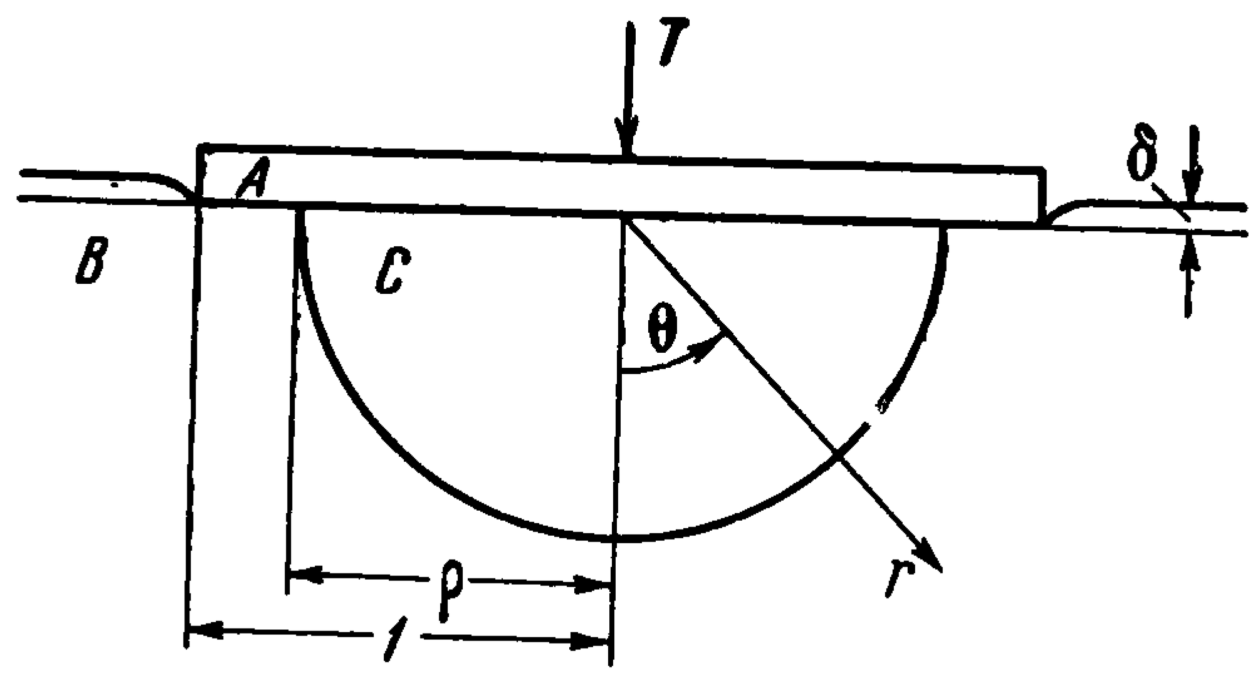
ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО КРУГОВОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ВЫЕМКОЙ ИЛИ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В. Г. Боговой, Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Рассмотрена осесимметричная смешанная задача теории упругости для полупространства, имеющего полусферическую выемку радиуса $\rho < 1$. На границу полупространства, полностью перекрывая выемку, давит соосный с ней плоский круговой штамп единичного радиуса. Между штампом и полупространством трение отсутствует. Задача решена в трех вариантах: выемка может быть либо пустой, либо заполненной абсолютно жестким или упругим включением. Решение построено в виде рядов по однородным решениям смешанной задачи для полупространства, произвольные постоянные в рядах находятся из нормальных систем алгебраических уравнений. Исследована концентрация напряжений у края штампа, найдена формула, связывающая заглубление штампа с величиной приложенной силы.

1. Плоский круговой штамп A прижат силой T без трения к упругому полупространству B с полусферической выемкой и к полусфере C, которая может быть: а) пустой, б) абсолютно жесткой, в) упругой. Случай б) рассматривается как авление штампа AC, на всей поверхности которого чет сил трения (фигура).



Построим подсистему однородных решений, имеющих особенность в точке $r = 0$ и удовлетворяющих на границе полупространства $\theta = {}^1/_2\pi$ смешанным условиям

$$\tau_{r\theta} = u_\theta = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant 1), \qquad \tau_{r\theta} = \sigma_\theta = 0 \quad (1 < r < \infty) \tag{1.1}$$

Однородные решения для полупространства при условиях $\tau_{r\theta} = u_\theta = 0$ на всей граничной плоскости определяются нулями функции Лежандра $P_\nu^{\,1}(0)$ и имеют вид [2]

$$\begin{gathered}
2Gu_r^{k1}(r,\theta) = -r^{-2k}\left\{\frac{k(2k+3-4\sigma)}{k-2+2\sigma}P_{2k}(x)A_k + (2k-1)P_{2k-2}(x)B_k\right\} \\
2Gu_\theta^{k1}(r,\theta) = r^{-2k}\{P_{2k}^1(x)A_k + P_{2k-2}^1(x)B_k\} \quad (x = \cos\theta)
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $k = 1, 2, \ldots$, т. е. выписаны только те перемещения, которые обращаются в бесконечность при $r = 0$.

Каждый элемент указанной подсистемы будем искать как сумму решения (1.2) и решения смешанной задачи

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (0 \leqslant r < \infty,\ \theta = {}^1/_2\pi) \tag{1.3}$$

$$u_\theta = 0 \quad (\theta = {}^1/_2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1); \qquad \sigma_\theta = -\sigma_\theta^{k1}(r, {}^1/_2\pi) \quad (\theta = {}^1/_2\pi,\ 1 < r < \infty)$$

Последнее находится тем же путем, что и решение задачи [3]

$$2Gu_r^{k2}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)\,[t_2P_\nu(x)+(\nu+2)(\nu+5-4\sigma)P_{\nu+2}(x)]\,r^{-\nu-2}\,d\nu$$

$$2Gu_\theta^{k2}(r,\theta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)\,[(\nu+1)^{-1}t_2P_\nu^1(x)+tP_{\nu+2}^1(x)]\,r^{-\nu-2}\,d\nu \qquad (1.4)$$

$$E_k(\nu)=\frac{[\sigma_k^+(\nu)+\sigma_k^-(\nu)]\,\Gamma(1/2-1/2\nu)\,\Gamma(1+1/2\nu)}{\sqrt{\pi}\,(\nu+1)(2\nu+3)}$$

$$t=\nu-2+4\sigma,\quad t_2=(\nu+2)^2-2(1-\sigma)$$

Здесь контур L проходит левее прямой $\operatorname{Re}\nu=-2$, функция $\sigma_k^-(\nu)$ легко вычисляется

$$\sigma_k^-(\nu)=-\int_1^\infty \sigma_\theta^{k1}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)r^{\nu+2}\,dr=$$

$$=\int_1^\infty\left\{\frac{k[(2k-1)^2-2(1-\sigma)]}{k-2+2\sigma}P_{2k}(0)A_k+(2k-1)^2P_{2k-2}(0)B_k\right\}r^{\nu-2k+1}\,dr= \qquad (1.5)$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}(2k-1)!!}{(\nu+2-2k)(2k-2)!!}\left\{\frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{2(k-2+2\sigma)}A_k-(2k-1)B_k\right\}$$

Неизвестные функции

$$\sigma_k^+(\nu)=\int_0^1\sigma_\theta^{k2}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)r^{\nu+2}\,dr,\qquad u_k^-(\nu)=\int_1^\infty u_\theta^{k2}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)r^{\nu+1}\,dr \qquad (1.6)$$

удовлетворяют уравнению Винера — Хопфа

$$\sigma_k^+(\nu)+\sigma_k^-(\nu)=K(\nu)\,u_k^-(\nu) \qquad (1.7)$$

$$K(\nu)=-\frac{G(1+\nu)(2+\nu)\,\Gamma(-1/2\nu)\,\Gamma(3/2+1/2\nu)}{2(1-\sigma)\,\Gamma(2+1/2\nu)\,\Gamma(1/2-1/2\nu)}$$

Воспользовавшись факторизацией [3]

$$K(\nu)=\frac{K^-(\nu)}{K^+(\nu)},\qquad K^-(\nu)=-\frac{G(1+\nu)(2+\nu)\,\Gamma(-1/2\nu)}{2(1-\sigma)\,\Gamma(1/2-1/2\nu)}$$

$$K^+(\nu)=\frac{\Gamma(2+1/2\nu)}{\Gamma(3/2+1/2\nu)} \qquad (1.8)$$

преобразуем (1.7), введем регулярную во всей плоскости ν функцию [4]

$$J_k(\nu)=[\sigma_k^+(\nu)+\sigma_k^-(\nu)]\,K^+(\nu)-\sigma_k^-(\nu)\,K^+(2k-2)=$$

$$=u_k^-(\nu)\,K^-(\nu)-\sigma_k^-(\nu)\,K^+(2k-2) \qquad (1.9)$$

Из оценки роста при $|\nu|\to\infty$, входящих сюда слагаемых, которую легко получить при помощи формулы Стирлинга для гамма-функции, и из обобщенной теоремы Лиувилля следует, что $J_k(\nu)=C_k$. Таким образом, согласно (1.9), (1.5) и (1.8)

$$\sigma_k^+(\nu)+\sigma_k^-(\nu)= \qquad (1.10)$$

$$=\frac{\Gamma(3/2+1/2\nu)}{\Gamma(2+1/2\nu)}\left\{C_k-\frac{(-1)^k\,2k}{\sqrt{\pi}\,(\nu+2-2k)}\left[\frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{2(k-2+2\sigma)}A_k-(2k-1)B_k\right]\right\}$$

Для плодотворного использования однородных решений задачи (1.1 важно, чтобы они были самоуравновешенными при $r>1$. Выполнить это условие можно за счет произвола в выборе постоянной C_k. Если интегралы (1.4) при $r > 1$ разложить в ряды по вычетам, то отличными от нуля будут главные векторы напряжений, порождаемых только двумя полюсами: $\nu = 2k - 2$ и $\nu = -1$.

Первые уравновешиваются решением (1.2), вычеты в точке $\nu = -1$ обратятся в нуль при $\sigma_k^+(-1) + \sigma_k^-(-1) = 0$, т. е. в силу (1.10) при

$$C_k = \frac{(-1)^k 2k}{\sqrt{\pi}(1-2k)} \left[\frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{2(k-2+2\sigma)} A_k - (2k-1) B_k\right] \tag{1.11}$$

Складывая решения (1.2) и (1.4) и вычисляя напряжения, получим окончательно ($k = 1, 2, \ldots$)

$$2Gu_r^{(k)}(r, \theta) = -r^{-2k}\left[\frac{k(2k+3-4\sigma)}{k+2\sigma-2} P_{2k}(x) A_k + (2k-1) P_{2k-2}(x) B_k\right] + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)\left[t_2 P_\nu(x) + (\nu+2)(\nu+5-4\sigma) P_{\nu+2}(x)\right] r^{-\nu-2} d\nu$$

$$2Gu_\theta^{(k)}(r, \theta) = r^{-2k}\left[P_{2k}^1(x) A_k + P_{2k-2}^1(x) B_k\right] - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)\left[t_2(\nu+1)^{-1} P_\nu^1(x) + t P_{\nu+2}^1(x)\right] r^{-\nu-2} d\nu \tag{1.12}$$

$$\sigma_\theta^{(k)}(r, \theta) = -r^{-2k-1}\left\{\frac{(k-1)\left[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)\right]}{k-2+2\sigma} P_{2k}(x) A_k + \right. \\ \left. + (2k-1)^2 P_{2k-2}(x) B_k + \operatorname{ctg}\theta\left[P_{2k}^1(x) A_k + P_{2k-2}^1(x) B_k\right]\right\} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)\left\{t_2\left[(\nu+1) P_\nu(x) + (\nu+1)^{-1}\operatorname{ctg}\theta P_\nu^1(x)\right] - \right. \\ \left. - (\nu+2)\left[(\nu+1)^2 - 2(1-\sigma)\right] P_{\nu+2}(x) - t\operatorname{ctg}\theta P_{\nu+2}^1(x)\right\} r^{-\nu-3} d\nu$$

$$\tau_{r\theta}^{(k)}(r, \theta) = -r^{-2k-1}\left[\frac{2k^2 - 1 + \sigma}{k-2+2\sigma} P_{2k}^1(x) A_k + 2k P_{2k-2}^1(x) B_k\right] + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu) t_2\left[\frac{\nu+2}{\nu+1} P_\nu^1(x) + P_{\nu+2}^1(x)\right] r^{-\nu-3} d\nu$$

$$\sigma_r^{(k)}(r, \theta) = 2r^{-2k-1} k\left[\frac{(2k+1)(k+1) - 1 - \sigma}{k-2+2\sigma} P_{2k}(x) A_k + (2k-1) P_{2k-2}(x) B_k\right] - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)(\nu+2)\left\{t_2 P_\nu(x) + \left[(\nu+2)(\nu+5) - 2\sigma\right] P_{\nu+2}(x)\right\} r^{-\nu-3} d\nu$$

$$\sigma_\varphi^{(k)}(r, \theta) + \sigma_\theta^{(k)}(r, \theta) = \\ = -2r^{-2k-1} k\left[\frac{(k-1)(2k+1) + 2 - 4k\sigma}{k-2+2\sigma} P_{2k}(x) A_k + (2k-1) P_{2k-2}(x) B_k\right] + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L E_k(\nu)(\nu+2)\left\{t_2 P_\nu(x) + \left[\nu(\nu+3) + 4 - 4\sigma(\nu+2)\right] P_{\nu+2}(x)\right\} r^{-\nu-3} d\nu$$

$$E_k(\nu) = \frac{(-1)^k k(\nu+1)\left\{\left[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)\right] A_k - 2(2k-1)(k-2+2\sigma) B_k\right\}}{(2k-1)(k-2+2\sigma)(2k-2-\nu)(\nu+2)(2\nu+3)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\nu\right)} \tag{1.13}$$

Сравнение этих выражений с (1.41) из [3] показывает, что они определяют однородное решение задачи (1.1) с главным вектором $T \neq 0$, если положить $k = 0$, $A_0 = B_0 = 0$

$$E_0(\nu) = -\frac{T}{4(2+\nu)(2\nu+3)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\nu\right)} \tag{1.14}$$

Нормальные напряжения и перемещения на границе вблизи линии раздела условий находятся, как в [1], при помощи контурного интегрирования и асимптотических оценок и имеют вид ($k \geqslant 1$)

$$\sigma_\theta^{(k)}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \sim -\frac{4(-1)^k k}{\pi(2k-1)\sqrt{2(1-r)}} \times$$

$$\times \left\{\frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{2(k-2+2\sigma)} A_k - (2k-1) B_k\right\} \quad \text{при } r \to 1-0$$

$$u_\theta^{(k)}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \sim \frac{4(1-\sigma)k(-1)^k\sqrt{2(r-1)}}{\pi G(2k-1)} \times$$

$$\times \left\{\frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{2(k-2+2\sigma)} A_k - (2k-1) B_k\right\} \quad \text{при } r \to 1+0$$

$$\sigma_\theta^{(0)}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \sim -\frac{T}{2\pi\sqrt{2(1-r)}}, \quad u_\theta^{(0)}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) \sim \frac{T(1-\sigma)\sqrt{2(r-1)}}{2\pi G} \tag{1.15}$$

2. Решения задач а) и б), которые определяются граничными условиями

$$\tau_{r\theta} = u_\theta = 0 \quad (\rho \leqslant r \leqslant 1,\ \theta = {}^1\!/_2\pi) \quad \tau_{r\theta} = \sigma_\theta = 0 \quad (1 < r < \infty,\ \theta = {}^1\!/_2\pi) \tag{2.1}$$

$$\text{а)}\ \tau_{r\theta} = \sigma_r = 0, \quad \text{б)}\ \tau_{r\theta} = u_r = 0 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant {}^1\!/_2\pi,\ r = \rho) \tag{2.2}$$

будем искать в виде рядов

$$u_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} u_\theta^{(k)}(r, \theta), \qquad u_r = \sum_{k=0}^{\infty} u_r^{(k)}(r, \theta) \tag{2.3}$$

сразу удовлетворяющих условиям (2.1) и условию равновесия. В силу леммы Жордана и теоремы о вычетах интегралы в формулах (1.12) можно заменить при $r = \rho$ рядами вычетов в отрицательных нулях функции $\cos({}^1\!/_2\pi\nu)$. Тогда получим

$$2Gu_\theta{}^k(\rho, \theta) = \rho^{-2k}\left[P_{2k}^1(x) A_k + P_{2k-2}^1(x) B_k\right] + \tag{2.4}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_k{}^*(n)\left\{\frac{(2n+1)^2-2(1-\sigma)}{2n+2} P_{2n+2}^1(x) + (2n+5-4\sigma) P_{2n}^1(x)\right\}\rho^{2n+1}$$

$$2Gu_r^{(k)}(\rho, \theta) = -\rho^{-2k}\left[\frac{k(2k+3-4\sigma)}{k-2+2\sigma} P_{2k}(x) A_k + (2k-1) P_{2k-2}(x) B_k\right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_k{}^*(n)\left\{[(2n+1)^2-2(1-\sigma)] P_{2n+2}(x) + (2n+1)(2n-2+4\sigma) P_{2n}(x)\right\}\rho^{2n+1} \tag{2.5}$$

$$\tau_{r\theta}^{(k)}(\rho, \theta) = -\rho^{-2k-1}\left[\frac{2k^2-1+\sigma}{k-2+2\sigma} P_{2k}^1(x) A_k + 2kP_{2k-2}^1(x) B_k\right] + \tag{2.6}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_k{}^*(n)\left[(2n+1)^2 - 2(1-\sigma)\right]\left[\frac{2n+1}{2n+2} P_{2n+2}^1(x) + P_{2n}^1(x)\right]\rho^{2n}$$

$$\sigma_r^{(k)}(\rho, \theta) = 2\rho^{-2k-1}k\left[\frac{2k^2+3k-\sigma}{k-2+2\sigma} P_{2k}(x) A_k + (2k-1) P_{2k-2}(x) B_k\right] + \tag{2.7}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E_k{}^*(n)(2n+1)\left[(4n^2+4n-1+2\sigma) P_{2n+2}(x) + \right.$$

$$\left. + (4n^2-2n-2-2\sigma) P_{2n}(x)\right]\rho^{2n}$$

$$E_k{}^*(n) =$$

$$= \frac{4(-1)^{k+n+1} k(n+1)\left[(4k^2-4k-1+2\sigma) A_k - 2(2k-1)(k-2+2\sigma) B_k\right]}{\pi(2k-1)(2n+1)(2k+2n+1)(k-2+2\sigma)(4n+3)} \quad (k \geqslant 1)$$

$$E_0{}^*(n) = \frac{(-1)^n T}{2\pi(2n+1)(4n+3)} \tag{2.8}$$

Подставим формулы (2.5) — (2.7) в решения (2.3) и в условия (2.2), после чего поменяем порядки суммирования в двойных рядах. Приравнивая коэффициенты при функциях $P_{2k}(x)$ и $P_{2k}^1(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$), получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$a_0 X_{1,4} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{0,n} \rho^{2n+1} X_{n,3} = g_0 \tag{2.9}$$

$$b_k^{(s)} (X_{k,3} + X_{k,4}) + a_k^{(s)} X_{k+1,4} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{k,n}^{(s)} \rho^{2k+2n+1} X_{n,3} = g_k^{(s)} \tag{2.10}$$

$$(s = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots)$$

Здесь для обеих задач

$$X_{k,3} = \rho^{-2k-1}\left[\frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{(2k-1)(k-2+2\sigma)} A_k - 2B_k\right], \quad X_{k,4} = 2\rho^{-2k-1} B_k \tag{2.11}$$

$$a_0 = {}^1/_2, \qquad a_k^{(1)} = k+1, \qquad b_k^{(1)} = \frac{(2k-1)(2k^2-1+\sigma)}{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}$$

$$g_k^{(1)} = \frac{T(-1)^k \rho^{2k}}{2\pi}\left[\frac{(2k+1)^2 - 2(1-\sigma)}{(2k+1)(4k+3)} - \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2 2k(4k-1)}\right]$$

$$f_{k,n}^{(1)} = \frac{(-1)^{k+n+1} 2n}{\pi}\left\{\frac{(2k+2)[(2k+1)^2 - 2(1-\sigma)]}{(2k+1)(4k+3)(2k+2n+1)} - \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)(2k+2n-1)}\right\}$$

Кроме того, для задачи а)

$$a_k^{(2)} = -(k+1)(2k+1)$$

$$g_k^{(2)} = \frac{T(-1)^k \rho^{2k}}{2\pi}\left[\frac{2k(2k-1) - 2(1+\sigma)}{4k+3} - \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)}\right] \tag{2.12}$$

$$g_0 = \frac{T(1+\sigma)}{3\pi}, \qquad b_k^{(2)} = -\frac{2k(2k-1)[(2k+1)(k+1) - (1+\sigma)]}{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}$$

$$f_{0,n} = \frac{4(-1)^{n+1}(1+\sigma)n}{3\pi(2n+1)}$$

$$f_{k,n}^{(2)} = \frac{(-1)^{k+n+1} 2n}{\pi}\left\{\frac{(2k+2)[(2k-1)2k - 2(1+\sigma)]}{(4k+3)(2k+2n+1)} - \frac{2k[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)]}{\rho^2(4k-1)(2k+2n-1)}\right\}$$

для задачи б)

$$a_k^{(2)} = \frac{2k+1}{2}, \qquad g_k^{(2)} = \frac{T(-1)^k \rho^{2k}}{2\pi}\left[\frac{2k-2+4\sigma}{4k+3} - \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)(2k-1)}\right] \tag{2.13}$$

$$g_0 = -\frac{T(1-2\sigma)}{3\pi}, \qquad b_k^{(2)} = \frac{k(2k-1)(2k+3-4\sigma)}{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}, \qquad f_{0,n} = \frac{8(-1)^n(1-2\sigma)n}{3\pi(2n+1)}$$

$$f_{k,n}^{(2)} = \frac{2n(-1)^{k+n+1}}{\pi}\left\{\frac{(2k+2)(2k-2+4\sigma)}{(4k+3)(2k+2n+1)} - \frac{2k[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)]}{\rho^2(4k-1)(2k-1)(2k+2n-1)}\right\}$$

Приведем систему (2.9), (2.10) к канонической форме. Исключив из уравнений (2.10) при $s = 1, 2$ соответственно неизвестные $X_{k,4}$ и $X_{k+1,4}$, получим ($k = 1, 2, \ldots$)

$$(a_k^{(1)} b_k^{(2)} - a_k^{(2)} b_k^{(1)}) X_{k+1,4} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k,n}^{(1)} b_k^{(2)} - f_{k,n}^{(2)} b_k^{(1)}) \rho^{2k+2n+1} X_{n,3} =$$
$$= g_k^{(1)} b_k^{(2)} - g_k^{(2)} b_k^{(1)} \tag{2.14}$$

$$(a_k^{(2)} b_k^{(1)} - a_k^{(1)} b_k^{(2)}) (X_{k,3} + X_{k,4}) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{k,n}^{(1)} a_k^{(2)} - f_{k,n}^{(2)} a_k^{(1)}) \rho^{2k+2n+1} X_{n,3} =$$
$$= g_k^{(1)} a_k^{(2)} - g_k^{(2)} a_k^{(1)} \tag{2.15}$$

Исключим из (2.9) при помощи (2.15) неизвестное $X_{1,4}$. В (2.15) индекс k заменим на $k+1$ и исключим из (2.14) неизвестное $X_{k+1,4}$. Тогда получим ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{gathered}
a_0 (b_1^{(1)} a_1^{(2)} - b_1^{(2)} a_1^{(1)}) X_{1,3} + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_0 (f_{1,n}^{(1)} a_1^{(2)} - f_{1,n}^{(2)} a_1^{(1)}) \rho^2 + f_{0,n} (b_1^{(2)} a_1^{(1)} - a_1^{(2)} b_1^{(1)})] \rho^{2n+1} X_{n,3} = \\
= a_0 (a_1^{(2)} g_1^{(1)} - a_1^{(1)} g_1^{(2)}) + g_0 (b_1^{(2)} a_1^{(1)} - b_1^{(1)} a_1^{(2)}) \qquad (2.16) \\
(a_{k+)1}^{(2)} b_{k+1}^{(1)} - a_{k+1}^{(1)} b_{k+1}^{(2)}) (a_k^{(1)} b_k^{(2)} - a_k^{(2)} b_k^{(1)}) X_{k+1,3} + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} [(f_{k+1,n}^{(1)} a_{k+1}^{(2)} - f_{k+1,n}^{(2)} a_{k+1}^{(1)}) (a_k^{(1)} b_k^{(2)} - b_k^{(1)} a_k^{(2)}) - \\
- \rho^{-2} (f_{k,n}^{(1)} b_k^{(2)} - f_{k,n}^{(2)} b_k^{(1)}) (b_{k+1}^{(1)} a_{k+1}^{(2)} - b_{k+1}^{(2)} a_{k+1}^{(1)})] \rho^{2k+2n+3} X_{n,3} = \\
= (g_{k+1}^{(1)} a_{k+1}^{(2)} - g_{k+1}^{(2)} a_{k+1}^{(1)}) (a_k^{(1)} b_k^{(2)} - a_k^{(2)} b_k^{(1)}) + (g_k^{(1)} b_k^{(2)} - g_k^{(2)} b_k^{(1)})(b_{k+1}^{(2)} a_{k+1}^{(1)} - b_{k+1}^{(1)} a_{k+1}^{(2)})
\end{gathered}$$

Очевидно, при всех $\rho < 1$ двойной ряд матрицы этой системы абсолютно сходится, а модули ее свободных членов ограничены. Таким образом, система (2.16) относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха [5]. Дословно повторяя рассуждения п. 2 [1], заключаем, что решения этой системы для обеих задач а) и б) существуют, единственны и могут быть получены по правилу Крамера; при больших k A_k, $B_k \sim k\rho^{4k}$.

Важно отметить, что в систему (2.16) вошли только неизвестные $X_{k,3}$, а неизвестные $X_{k,4}$ вычисляются по формулам (2.9), (2.14). Это дает возможность после усечения системы (2.15) получить в ее решении удвоенное число верных знаков по сравнению с решением, найденным из системы (2.9), (2.10), усеченной до того же порядка. Отметим еще, что задача а) легко обобщается на случай, когда к сферической части границы полупространства приложены произвольные нагрузки, а задача б) — на тот случай, когда сферическая часть штампа AC несколько отличается от формы выемки, т. е. $u_r = f(\theta)$ при $r = \rho$. В последнем случае нужно разложить функцию $f(\theta)$, которая появится в условии (2.2), в ряд по четным полиномам Лежандра, в остальном ход решения не изменится.

В заключение выпишем формулу, связывающую заглубление штампа δ с величиной приложенной к нему силы T

$$2G\delta = 2Gu_r \big|_{\substack{\theta=0 \\ r=\infty}} = \qquad (2.17)$$

$$= \lim_{r\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_L E_k(\nu) [t_2 P_\nu(1) + (\nu+2)(\nu+5-4\sigma) P_{\nu+2}(1)] r^{-\nu-2} d\nu =$$

$$= -\frac{T(1-\sigma)}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\sigma)(-1)^k \{[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)] A_k - 2(2k-1)(k-2+2\sigma) B_k\}}{(2k-1)(k-2+2\sigma)}$$

3. Рассмотрим задачу в). Для области B сохраним прежние G и σ, упругие постоянные области C обозначим через G_1 и σ_1, Решения будем искать: в области B в форме (2.3), в области C в рядах по однородным решениям, удовлетворяющим условиям $\tau_{r\theta} = u_\theta = 0$ при $\theta = {}^1/_2\pi$ и име-

ющим особенность на бесконечности [2]

$$2G_1u_r = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2k+1)(2k-2+4\sigma_1)\,r^{2k+1}}{2k+5-4\sigma_1}C_k + 2kr^{2k-1}D_k\right]P_{2k}(x)$$

$$2G_1u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty}\left[r^{2k+1}C_k + r^{2k-1}D_k\right]P_{2k}^1(x) \tag{3.1}$$

При этом условие равновесия и граничные условия задачи в)

$$u_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant 1,\ \theta = {}^1\!/_2\pi), \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1 < r < \infty,\ \theta = {}^1\!/_2\pi)$$

будут удовлетворены. Удовлетворим четырем условиям сопряжения решений (2.3) и (3.1) на полусфере $0 \leqslant \theta \leqslant {}^1\!/_2\pi$, $r = \rho$ $(\rho < 1)$.

Используя разложения (2.4) — (2.7) и вновь приравнивая множители при функциях $P_{2k}(x)$ и $P_{2k}^1(x)$, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{p=1}^{4} d_{kp}^{(i)}X_{k,p} + d_k^{(i)}X_{k+1,4} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{k,n}^{(i)}\rho^{2k+2n+1}X_{n,3} = h_k^{(i)} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{3.2}$$

При $k = 0$ $i = 1, 2$, при $k \geqslant 1$ $i = 1, 2, 3, 4$ и введены обозначения

$$X_{k,1} = \rho^{2k}C_k, \quad X_{k,2} = \rho^{2k-2}D_k, \quad X_{k,3} = \rho^{-2k-1}\left[\frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{(2k-1)(k-2+2\sigma)}A_k - 2B_k\right]$$

$$X_{k,4} = 2\rho^{-2k-1}B_k, \quad d_{01}^{(1)} = -\frac{1-2\sigma_1}{G_1(5-4\sigma_1)}, \quad d_{02}^{(1)} = d_{03}^{(1)} = d_{04}^{(1)} = 0$$

$$d_{02}^{(2)} = d_{03}^{(2)} = d_{04}^{(2)} = 0$$

$$d_0^{(1)} = \frac{1}{4G}, \quad \varphi_{0,n}^{(1)} = \frac{4(-1)^n(1-2\sigma)\,n}{3\pi G(2n+1)}, \quad h_0^{(1)} = -\frac{T(1-2\sigma)}{6\pi G} \tag{3.3}$$

$$d_{01}^{(2)} = \frac{1+\sigma_1}{5-4\sigma_1}, \quad d_0^{(2)} = {}^1\!/_2, \quad \varphi_{0n}^{(2)} = \frac{4(-1)^{n+1}(1+\sigma)\,n}{3\pi(2n+1)}, \quad h_0^{(2)} = \frac{T(1+\sigma)}{3\pi}$$

$$d_{k1}^{(1)} = d_{k2}^{(1)} = -\frac{1}{2G_1}, \quad d_{k3}^{(1)} = d_{k4}^{(1)} = \frac{(2k-1)(k-2+2\sigma)}{2G[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)]}, \quad d_k^{(1)} = \frac{1}{4G}$$

$$\varphi_{kn}^{(1)} = \frac{(-1)^{k+n}n}{\pi G}\left[\frac{(2k+2)(2k+5-4\sigma)}{(4k+3)(2k+3)(2k+2n+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)(2k-1)(2k+2n-1)}\right]$$

$$h_k^{(1)} = \frac{T(-1)^{k+1}\rho^{2k}}{4\pi G}\left[\frac{2k+5-4\sigma}{(4k+3)(2k+1)} - \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)(2k-1)\,2k}\right]$$

$$d_{k1}^{(2)} = \frac{(2k+1)(2k-2+4\sigma_1)}{(2k+5-4\sigma_1)\,2G_1}, \qquad d_{k2}^{(2)} = \frac{k}{G_1}$$

$$d_{k3}^{(2)} = d_{k4}^{(2)} = \frac{k(2k-1)(2k+3-4\sigma)}{2G[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)]}, \qquad d_k^{(2)} = \frac{2k+1}{4G}$$

$$\varphi_{k,n}^{(2)} = \frac{(-1)^{k+n+1}n}{\pi G}\left[\frac{(2k+2)(2k-2+4\sigma)}{(4k+3)(2k+2n+1)} - \frac{2k[(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)]}{\rho^2(4k-1)(2k-1)(2k+2n-1)}\right]$$

$$h_k^{(2)} = \frac{T(-1)^k\rho^{2k}}{4\pi G}\left[\frac{2k-2+4\sigma}{4k+3} - \frac{(2k-1)^2 - 2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)(2k-1)}\right]$$

$$d_{k1}^{(3)} = \frac{(2k+1)[2k(2k-1) - 2(1+\sigma_1)]}{2k+5-4\sigma_1}, \qquad d_{k2}^{(3)} = 2k(2k-1)$$

$$d_k^{(3)} = -\frac{(2k+2)(2k+1)}{2}, \quad d_{k3}^{(3)} = d_{k4}^{(3)} = -\frac{2k(2k-1)[(2k+1)(k+1)-(1+\sigma)]}{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}$$

$$\varphi_{kn}^{(3)} = \frac{(-1)^{k+n+1}2n}{\pi}\left\{\frac{4(k+1)[k(2k-1)-1-\sigma]}{(4k+3)(2k+2n+1)} - \frac{2k[(2k-1)^2-2(1-\sigma)]}{\rho^2(4k-1)(2k+2n-1)}\right\}$$

$$h_k^{(3)} = \frac{T(-1)^k\rho^{2k}}{2\pi}\left[\frac{2k(2k-1)-2(1+\sigma)}{4k+3} - \frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)}\right]$$

$$d_k^{(4)} = k+1, \qquad d_{k1}^{(4)} = \frac{(2k+1)^2-2(1-\sigma_1)}{2k+5-4\sigma_1}$$

$$d_{k2}^{(4)} = (2k-1), \qquad d_{k3}^{(4)} = d_{k4}^{(4)} = \frac{(2k-1)(2k^2-1+\sigma)}{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}$$

$$\varphi_{kn}^{(4)} = \frac{(-1)^{k+n+1}2n}{\pi}\left[\frac{(2k+2)[(2k+1)^2-2(1-\sigma)]}{(2k+1)(4k+3)(2k+2n+1)} - \frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{\rho^2(4k-1)(2k+2n-1)}\right]$$

$$h_k^{(4)} = \frac{T(-1)^k\rho^{2k}}{2\pi}\left[\frac{(2k+1)^2-2(1-\sigma)}{(2k+1)(4k+3)} - \frac{(2k-1)^2-2(1-\sigma)}{\rho^2 2k(4k-1)}\right]$$

Исключая из каждой группы уравнений (3.2), отвечающих одному индексу k, неизвестные $X_{k,1}$ и $X_{k,2}$, получим (2.9), (2.10), где

$$a_0 = d_{01}^{(2)}d_0^{(1)} - d_{01}^{(1)}d_0^{(2)}, \qquad f_{0n} = \varphi_{0,n}^{(1)}d_{01}^{(2)} - \varphi_{0,n}^{(2)}d_{01}^{(1)}, \qquad g_1^{(1)} = h_0^{(1)}d_{01}^{(2)} - h_0^{(2)}d_{01}^{(1)}$$

$$a_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{4} d_k^{(i)}D_{ks}^{(i)}, \qquad b_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{4} d_{k3}^{(i)}D_{ks}^{(i)}, \qquad f_{k,n}^{(s)} = \sum_{i=1}^{4} \varphi_{kn}^{(i)}D_{ks}^{(i)}, \qquad g_k^{(s)} = \sum_{i=1}^{4} h_k^{(i)}D_{ks}^{(i)}$$

Через $D_{ks}^{(i)}$ обозначены алгебраические дополнения элементов $d_{ks}^{(i)}$

$$\begin{vmatrix} d_{k2}^{(1)} & d_{k2}^{(2)} & 0 & 0 \\ d_{k1}^{(1)} & d_{k1}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{k2}^{(3)} & -d_{k2}^{(4)} \\ 0 & 0 & -d_{k1}^{(3)} & -d_{k1}^{(4)} \end{vmatrix}$$

Таким образом, в задаче в) из нормальной системы алгебраических уравнений (2.16) требуется определить только четвертую часть неизвестных, входящих в решения (2.3), (3.1). Заглубление штампа и в этом случае выражается формулой (2.17).

Поступила 29 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Нуллер Б. М. Упругий сферический пояс в жесткой обойме. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
3. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, Гос. изд. Украина, 1922.