

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ЛАПЛАСА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОБЛЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ
ПЛОТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ ПУЧКОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

В. Н. Данилов, В. А. Сыровой

(Москва)

Приведено решение задачи о формировании (п. 1) ряда трехмерных пучков, представляемое в виде асимптотических разложений. Результаты сравниваются с точными выражениями, определяющими формирующие электроды для плоского течения по круговым траекториям (п. 2). Из параксиального приближения для электростатического пучка выделены случаи, позволяющие удовлетворить условиям полного пространственного заряда на эмиттере без нарушения равномерности этого приближения (п. 3). Рассмотрены квазиаксиальносимметричные пучки (п. 4) и квазицилиндрическая область с произвольным сечением (п. 5).

Гидродинамическая теория интенсивных пучков заряженных частиц представляет собой один из разделов механики сплошной среды. Однако асимптотические методы, давно и широко применяемые в других ее разделах, сравнительно недавно стали получать здесь распространение. Обратная задача или задача синтеза, возникающая при создании систем с желаемыми свойствами, состоит из двух частей: внутренняя задача, заключающаяся в решении уравнений пучка, и внешняя задача, связанная с определением формирующих электродов, обеспечивающих реализацию рассчитанного течения. Математическим выражением последней является задача Коши для уравнения Лапласа. К решению внутренней задачи для узких пучков были успешно применены [1-3] асимптотические методы типа метода растяжения или метода узких полос [4,5], в то время как рассмотрение задачи формирования затруднялось существованием особых точек на границе течения. Ниже приводится приближенное решение этой проблемы при наличии особенностей в условиях Коши, основывающееся на методе многих масштабов и факторизации.

1. Постановка задачи. Уравнение Лапласа в системе x^i ($i = 1, 2, 3$) с метрическим тензором g_{ik} , $g = \det g_{ik}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

При этом потенциал и его нормальная производная на поверхности Σ , разделяющей область Ω , занятую зарядами, и свободную от них область, полагаются известными

$$\varphi|_{\Sigma} = V(P), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Sigma} = F(P), \quad P \in \Sigma \quad (1.2)$$

Условия Коши для достаточно сложных пространственно-неоднородных пучков могут быть получены двумя способами: (1) немногочисленные точные решения уравнений пучка в Ω , (2) решения параксиального приближения. Геометрическая сложность задач, представляющих предмет обсуждения, практически исключает возможность их точного решения. Поэтому рассмотрению будет предшествовать в рамках асимптотического под

хода: речь будет идти о построении решения в узкой полосе вблизи достаточно гладкой осевой кривой $r = R(l)$, характеризуемой кривизной $k(l)$ и кручением $\kappa(l)$.

Для оценки порядка членов разложения удобно ввести указатель порядка малости μ , проставляемый там, где при обезразмеривании появляется малый параметр μ_* , представляющий отношение ширины полосы a_* к характерному продольному размеру L_* . Кривизна и кручение осевой кривой при решении внешней задачи предполагаются малыми величинами порядка μ : μk , $\mu \kappa$.

Параксиальный подход [3] при решении уравнений пучка выражается в представлении искомых функций в виде разложений по степеням малого параметра ε_* , характеризующего узость области Ω и дает ошибку порядка ε_*^3 . В каждой конкретной задаче можно установить связь между ε и μ , например $\mu = \varepsilon^{1/2}$, которая позволяет, учитывая погрешность решения в Ω , определить число членов в разложении для внешней задачи

$$\varphi = \sum_{n=0} \varphi \langle n \rangle \mu^n \quad (1.3)$$

обеспечивающее заданную точность. Переход к безразмерным координатам (растяжение) не является обязательным, поэтому вместо ε_* , μ_* можно пользоваться символами ε , μ с тем, чтобы в конечных формулах положить их равными единице.

Известно, что при рассмотрении течений, берущих начало с эмиттирующих поверхностей, при нулевой скорости старта условия Коши на Σ будут иррегулярными функциями. Особностей может быть несколько; простейшим примером является особая точка типа точки ветвления ($\varphi \sim \sim l^{1/2}$), соответствующая электростатическому течению в режиме полного пространственного заряда. В дальнейшем будем интересоваться в основном как раз такими особенностями.

Квазиодномерные асимптотические разложения типа (1.3), приводимые в [3], или тесно связанные с ними ряды по степеням нормальной к Σ координате [6,7], становятся неравномерными при приближении к особой точке. Для построения разложений (1.3), равномерно пригодных во всей полосе, необходимо правильно выделить особенность. Это удастся сделать, вводя дополнительную переменную, подобную координате, предназначенной для описания существенно двумерного распределения потенциала в окрестности особой точки (метод многих масштабов [5]). Так вместо l возникают две продольные координаты z и L , причем перед производными по L появляется указатель μ

$$l \rightarrow z, L, \frac{\partial}{\partial l} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial L}, \frac{\partial^2}{\partial l^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial z \partial L} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial L^2} \quad (1.4)$$

На долю L выпадает описание гладких, медленно меняющихся функций, поэтому ее удобно называть «медленной» координатой в отличие от «быстрой» переменной z . В конечных формулах следует положить $l = z = L$

2. Формирование плоского течения с круговыми траекториями. Уравнения пучка для этого случая были решены в [8]. Задача состоит в решении уравнения Лапласа

$$\partial^2 \varphi / \partial \sigma^2 + \partial^2 \varphi / \partial \psi^2 = 0, \quad \sigma = \ln R \quad (2.1)$$

удовлетворяющего при $\sigma = 0$ условиям

$$\varphi|_{\sigma=0} = \left(\sin \frac{3}{2} \psi \right)^{4/3} = V(\psi), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial R} \Big|_{\sigma=0} = -2V(\psi) = F(\psi) \quad (2.2)$$

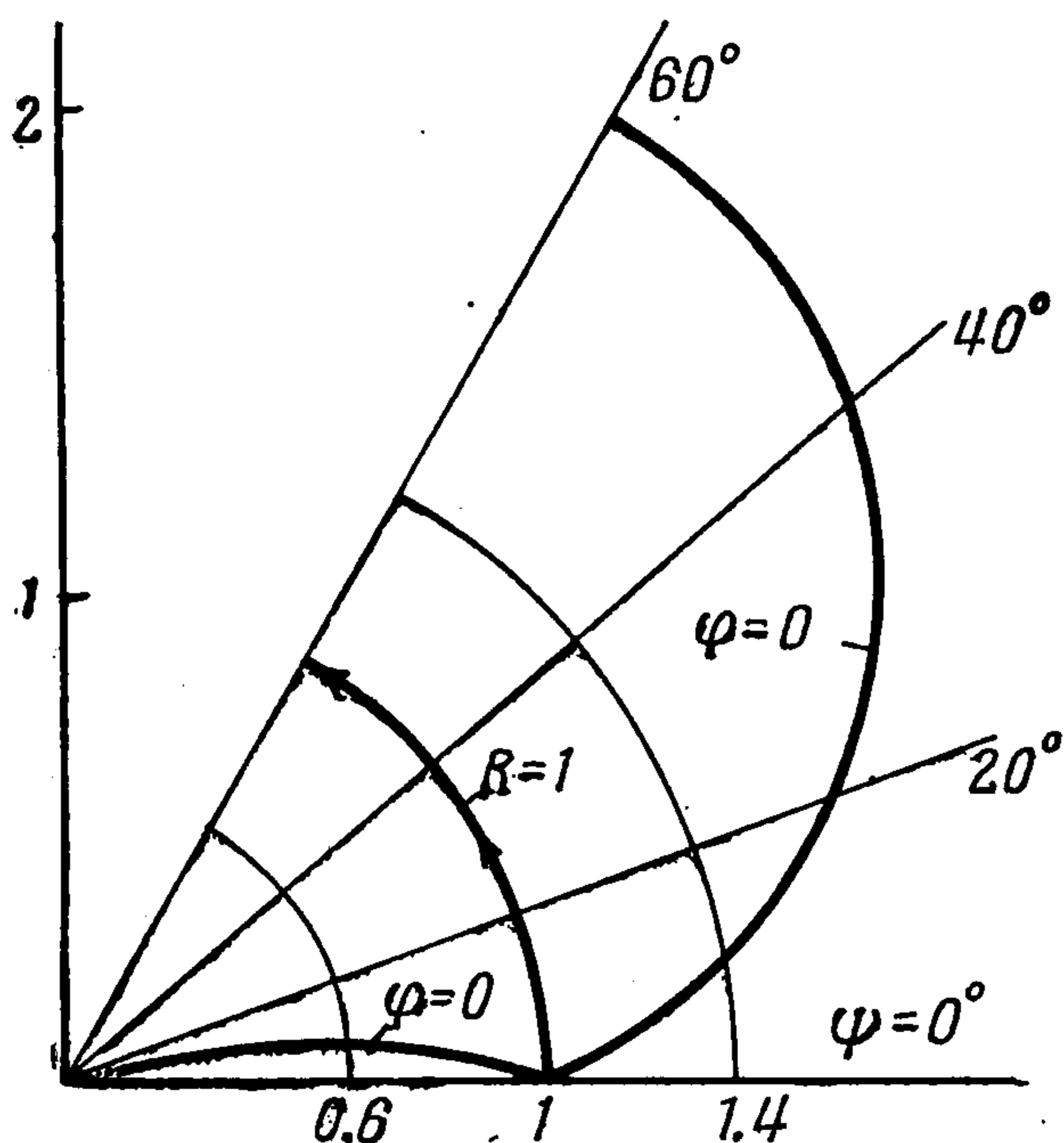
Здесь R, ψ — полярные координаты. Задача (2.1), (2.2) имеет точное решение

$$\varphi = \operatorname{Re} V(w) + \operatorname{Im} \int_0^w F(t) dt, \quad w = \psi + i\sigma \quad (2.3)$$

причем в [9] приведены разложения для интеграла в (2.3), которые становятся непригодными при приближении к особым точкам ($\psi = 0, 120^\circ$) функций (2.2), а в [10] эквипотенциальные поверхности построены в результате интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения эквипотенциали.

Чтобы выделить особенность в наиболее простой форме, в дополнение к ψ введем новую угловую переменную θ и прибегнем к факторизации условий (2.2)

$$V = \left(\sin \frac{3}{2} \psi \right)^{4/3} = \left(\frac{3}{2} \theta \right)^{4/3}, \quad A(\Psi), \quad F = -2V, \quad A(\Psi) = \left(\frac{\sin^{3/2} \Psi}{3/2 \Psi} \right)^{4/3} \quad (2.4)$$



Переменная θ тождественна ψ и предназначена исключительно для описания особенности. Таким образом, факторизация обеспечивает выделение иррегулярной части в простейшем виде, а функция $A(\Psi)$ регулярна при $0 \leq \psi \leq 60^\circ$, т. е. в области, которой ограничивается рассмотрение в силу симметрии условий Коши относительно луча $\psi = 60^\circ$. Уравнение (2.1) при этом запишется так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \Psi} - \mu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Psi^2} \quad (2.5)$$

Представляя решение в форме (1.3), получим следующие выражения для $\varphi \langle n \rangle$:

$$\begin{aligned} \varphi \langle n \rangle &= \left(-\frac{1}{2} \right)^n A^{(n)}(\Psi) \Phi_n(w, \bar{w}), \quad \Phi_n(w, \bar{w}) = \int_x^w dx \int_x^{\bar{w}} F_n(x, y) dy \\ F_n &= \Phi_{n-1, w} + \Phi_{n-1, \bar{w}} - \Phi_{n-2}, \quad w = \theta + i\sigma, \quad \bar{w} = \theta - i\sigma, \quad \Phi_{n, w} = \partial \Phi_n / \partial w \\ \Phi_0 &= \frac{1}{2} (w^{4/3} + \bar{w}^{4/3}) + \frac{1}{2i} \cdot \frac{6}{7} (w^{7/3} - \bar{w}^{7/3}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

При помощи формул (2.6) были получены семь приближений, включая $\varphi \langle 7 \rangle$. Фигура дает представление об области, знание потенциала в которой дает полное решение задачи формирования: она ограничивается лучами $\psi = 0^\circ, \psi = 60^\circ$ и нулевой эквипотенциалью при $R \geq 1$. При $\varphi \sim 1$ вычислялась относительная ошибка $\delta_n = |1 - \varphi_n / \varphi_{ex}| \%$, где φ_n — потенциал n -го приближения, φ_{ex} — точное значение потенциала. В точках максимального удаления от границы точность оценивалась по положению нулевой эквипотенциали. Заметим, что хотя особая точка в начале координат никак не учитывалась в разложении (2.6), тем не менее его следует признать достаточно удачным. Оказалось, что $\varphi \langle 7 \rangle$ дает возможность вычислить потенциал в области $0.1 \leq R \leq 1$ с ошибкой, не превышающей 1%, а при $R \geq 1$ дает практически точные значения;

φ_2 в полосе $0.6 \leq R \leq 1.4$ определяет решение с погрешностью менее 2%, φ_3 — менее 0.5%. Ошибка в координатах нулевой эквипотенциали для φ_2, φ_3 имеет следующие значения: $\psi = 60^\circ$, $\delta_2 = 11.6\%$, $\delta_3 = 8.8\%$; $\psi = 40^\circ$, $\delta_2 = 8.8\%$, $\delta_3 = 6.6\%$; $\psi = 20^\circ$, $\delta_2 = 1.7\%$, $\delta_3 = 0.07\%$.

При этом можно надеяться, что приближенный подход, примененный к физически однотипным задачам, будет давать ошибку одного порядка в различных задачах этого класса.

3. Рассмотрение параксиальных уравнений пучка и выделение особенностей. Выше уже отмечалось, что решения, определяющие достаточно сложные геометрически, пространственно-неоднородные потоки, могут быть получены почти исключительно в рамках параксиального приближения, построению которого в случае приосевых пучков посвящена работа [3]. Здесь будут рассмотрены только решения для электростатического течения, соответствующие почти однородному распределению плотности в поперечном сечении. Приближение формулируется в координатах l, s, q , связанных с декартовыми координатами соотношением

$$\mathbf{r} = R(l) + s(l)s + q(l)q \quad (3.1)$$

Здесь l — длина дуги осевой кривой, s, q — орты в направлении нормали и бинормали. Траектории $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ определяются формулами

$$s = \alpha(l)\xi + \beta(l)\eta, \quad q = \mu(l)\xi + \nu(l)\eta \quad (3.2)$$

Здесь ξ, η — начальные значения поперечных координат на поверхности эмиттера. Соответствующее этому случаю разложение потенциала в области, заполненной зарядами, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}V^2(l) + \varepsilon^{-1}kV^2s + \frac{1}{2}V^2(3k^2s^2 - \kappa^2s^2 - \kappa^2q^2) + \frac{1}{2}\Psi_{ss}s^2 + \Psi_{sq}sq + \frac{1}{2}\Psi_{qq}q^2, \quad D = \alpha\nu - \beta\mu$$

$$D\Psi_{ss} = \alpha''\nu - \beta''\mu - 2\kappa V(\mu'\nu - \nu'\mu), \quad D\Psi_{sq} = \beta''\alpha - \alpha''\beta - \kappa V(\nu'\alpha - \alpha'\nu + \beta'\mu - \mu'\beta)$$

$$D\Psi_{qq} = \nu''\alpha - \mu''\beta - 2\kappa V(\alpha'\beta - \beta'\alpha), \quad \alpha' = Vd\alpha/dl \quad (3.3)$$

В этих формулах $k = k(l)$, $\kappa = \kappa(l)$ — кривизна и кручение оси; $V = V(l)$ — значение продольной скорости на ней; ε — указатель малости, отвечающий за относительную ширину пучка; функции $\alpha, \beta, \mu, \nu, k, \kappa, V$ связаны соотношениями

$$\mu'\nu - \nu'\mu + \alpha'\beta - \beta'\alpha = -2\kappa D, \quad V' = dV/dl$$

$$D'' - 2(\alpha'\nu' - \beta'\mu') + [2(k^2 + \kappa^2)V^2 + (VV)']D = J/V, \quad J = \text{const} \quad (3.4)$$

В рамках приближения (3.3) эмиссия с нулевой скоростью может осуществляться только с плоскости. В работе [1] параксиальное приближение для осесимметричного потока с прямолинейной осью строится в ортогональных координатах ξ, ζ , связанных с траекториями $\xi = \text{const}$. При этом условиям термоэмиссии можно удовлетворить на криволинейной поверхности $\zeta = 0$. Заметим, что на необходимость построения асимптотических разложений в криволинейных координатах, связанных с характери-

ками (в данном случае с траекториями), для задач с особенностями на поверхностях указывает метод деформированных координат [5]. Итак, чтобы распространить анализ на случай криволинейного эмиттера, перейдем от координат l, s, q к координатам ζ, ξ, η

$$\zeta = l + 1/2 \varepsilon^{-2} (Q_{ss}s^2 + 2Q_{sq}sq + Q_{qq}q^2), \quad \alpha' = d\alpha/dl \quad (3.5)$$

$$DQ_{ss} = \alpha'v - \beta'\mu, \quad DQ_{sq} = \beta'\alpha - \alpha'\beta, \quad DQ_{qq} = v'\alpha - \mu'\beta$$

Деформирование координаты l в соответствии с (3.5) с точностью до ε^3 обеспечивает выделение особенности в разложении (3.3)

$$\varphi = 1/2 V^2 \{ \varepsilon^{-2} + 2\varepsilon^{-1}ks + (3k^2s^2 - \kappa^2s^2 - \kappa^2q^2) + D^{-1} [\alpha''v - \beta''\mu - 2\kappa (\mu'v - v'\mu)] s^2 + 2D^{-1} [\beta''\alpha - \alpha''\beta - \kappa (v'\alpha - \alpha'v + \beta'\mu - \mu'\beta)] \times \\ \times sq + D^{-1} [v''\alpha - \mu''\beta - 2\kappa (\alpha'\beta - \beta'\alpha)] q^2 \} \quad (3.6)$$

Ввиду того что деформация продольной координаты слабая, все функции l , кроме V , при переходе от l, s, q к ζ, ξ, η можно считать теми же функциями новой продольной координаты ζ . Для s, q в (3.6) следует воспользоваться формулами (3.2). Заметим, что при $\kappa \neq 0$ система ζ, ξ, η не будет ортогональной.

Если эмиттирующая часть стартовой поверхности ограничена замкнутым контуром $\xi = \xi(t), \eta = \eta(t)$, то граница течения задается параметрическими уравнениями

$$s = \alpha(\zeta) \xi(t) + \beta(\zeta) \eta(t), \quad q = \mu(\zeta) \xi(t) + v(\zeta) \eta(t) \quad (3.7)$$

Разложение (3.6) равномерно во всей области, включая эмиттер, если V является единственной иррегулярной функцией и детерминант D нигде не приближается к нулю. Предположим, что эти требования выполнены; тогда при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, для потенциала и поля на границе, а также скорости на оси получаем

$$\varphi = \zeta^{1/3} \Phi(\zeta, t), \quad \partial\varphi/\partial s = \zeta^{1/3} E(\zeta, t), \quad V = \zeta^{1/3} W(\zeta) \quad (3.8)$$

Пусть функции $\kappa, \alpha, \beta, \mu, v$, определяющие форму пучка, выбраны так, что первое соотношение (3.4) выполняется. Тогда V должна находиться интегрированием второго уравнения (3.4). Подставляя (3.8) в (3.4) и заменяя l на ζ , находим

$$D\zeta^2 W(WW'' + W'^2) + (8/3 D\zeta + D'\zeta^2) W^2 W' + \\ + [2/9 D + 2(k^2 + \kappa^2) D\zeta^2 - 2(\alpha'v' - \beta'\mu')] \zeta^2 + 2/3 D'\zeta + \\ + D''\zeta^2] W^3 = J, \quad W' = dW/d\zeta \quad (3.9)$$

При $\zeta = 0$ имеем ($\alpha = v = 1, \beta = \mu = 0, D = 1$) и следующие условия, необходимые для интегрирования (3.9):

$$\zeta = 0, \quad W = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3}, \quad W' = -\frac{4}{15} \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3} D' \quad (3.10)$$

Приведенное в (3.10) значение производной W' обеспечивает регулярность этой функции и следует из разложений, приведенных в [11]; J имеет смысл плотности тока эмиссии. В рамках рассматриваемого приближения

плотность тока должна быть однородной. Стартовая поверхность определяется уравнением $\zeta = 0$ и, как видно из (3.5), представляет собой параболоид, аппроксимирующий с точностью до ε^3 любую достаточно гладкую поверхность.

Численное интегрирование (3.9) не представляет каких-либо трудностей и может выполняться с равномерным шагом, соизмеримым с шириной пучка. Семь функций $\alpha, \beta, \mu, \nu, k, \kappa, V$ связаны только двумя соотношениями (3.4). Этот факт делает параксиальное приближение весьма гибким инструментом при конструировании пространственных течений.

4. Формирование квазиаксиальносимметричных пучков. Квазицилиндрические координаты l, ρ, ϑ связаны с l, s, q в (3.1) соотношениями

$$s = \rho \cos \vartheta, \quad q = \rho \sin \vartheta$$

Метрика в l, ρ, ϑ задается выражением

$$dr^2 = [(1 - k\rho \cos \vartheta)^2 + \kappa^2 \rho^2] dl^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + 2\kappa \rho^2 dl d\vartheta \quad (4.1)$$

Детерминант метрического тензора

$$g = |g_{ik}| = (1 - k\rho \cos \vartheta)^2 \rho^2$$

Уравнение Лапласа в квазицилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} - 2\kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l \partial \vartheta} + \frac{1}{\rho} (1 - 3k\rho \cos \vartheta + 2k^2 \rho^2 \cos^2 \vartheta) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \\ & + (1 - k\rho \cos \vartheta)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\kappa k \rho \sin \vartheta}{1 - k\rho \cos \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{k \sin \vartheta}{\rho} \left(1 - k\rho \cos \vartheta - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa^2 \rho^2}{1 - k\rho \cos \vartheta} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho^2} [(1 - k\rho \cos \vartheta)^2 + \kappa^2 \rho^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для выделения особенности необходимо воспользоваться соотношениями (1.4). Гладкость осевой кривой означает, что $k = k(L)$, $\kappa = \kappa(L)$.

Будем искать решение в виде

$$\varphi = \sum_{n=0} \varphi \langle n \rangle \mu^n, \quad \varphi \langle n \rangle = \sum_{p=0} (\Phi_{np} \cos p\vartheta + \Psi_{np} \sin p\vartheta) \quad (4.3)$$

Тогда функции Φ_{np} и Ψ_{np} удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 S_{np}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S_{np}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 S_{np}}{\partial \rho^2} - \frac{p^2}{\rho^2} S_{np} = T_{np} \quad (4.4)$$

При этом в случае плоской осевой кривой $\kappa = 0$

$$\begin{aligned} T_{np} = & k \left\{ \left(\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) [S_{n-1, p+1} + (1 + \delta_{ip}^\Phi) S_{n-1, p-1}] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\rho} \left(p + \frac{1}{2} \right) (p+1) S_{n-1, p+1} - \frac{1}{\rho} \left(p - \frac{1}{2} \right) (p-1) S_{n-1, p-1} \right\} + \\ & + k^2 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{4} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) [S_{n-2, p+2} + (2 + \delta_{1p}^\Phi - \delta_{1p}^\Psi) S_{n-2, p} + \right. \\ & \left. + (1 + \delta_{2p}^\Phi) S_{n-2, p-2}] + \frac{1}{4} (p+2)(p+1) S_{n-2, p+2} + \frac{1}{2} p^2 S_{n-2, p} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (p-2)(p-1) S_{n-2, p-2} \right\} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial L} S_{n-1, p} - \frac{\partial^2}{\partial L^2} S_{n-2, p} \\ & \delta_{ip}^\Phi = 1, \quad i = p, \quad S_{np} = \Phi_{np}; \quad \delta_{ip}^\Psi = 1, \quad i = p, \quad S_{np} = \Psi_{np} \end{aligned} \quad (4.5)$$

При $\kappa \neq 0$ правые части в (4.4) приобретают более сложный вид, так как функции Φ_{np} , Ψ_{np} перестают быть независимыми. Дополнительные члены в T_{1p} , T_{2p} без выделения разных масштабов по l приведены ниже

$$\Delta T_{1p} = \pm 2\kappa p \frac{\partial}{\partial l} S_{0p}$$

$$\Delta T_{2p} = \pm 2\kappa p \frac{\partial}{\partial l} S_{1p} + \kappa^2 p^2 S_{0p} + \frac{1}{2} \kappa k p \frac{\partial}{\partial l} [\mp S_{0, p+1} \pm (1 + \delta_{1p} \Phi) S_{0, p-1}]$$

Верхний знак соответствует случаю $S_{np} = \Psi_{np}$, нижний — $S_{np} = \Phi_{np}$. Решение уравнения (4.4), когда условия Коши заданы на границе

$$\rho = \rho_e(t), \quad l = l_e(t) \quad (4.6)$$

проводится по методу Римана. Функцией Римана $G(\lambda)$ оказывается гипергеометрическая функция [11], которая может быть выражена также через функцию Лежандра

$$G = F(1/2 + p, 1/2 - p; 1; \lambda) = P_{p-1/2}(v)$$

$$\lambda = -\frac{(\rho - \rho_c)^2 + (l - l_c)^2}{4\rho\rho_c}, \quad v = 1 - 2\lambda = \frac{\rho^2 + \rho_c^2 + (l - l_c)^2}{2\rho\rho_c} \quad (4.7)$$

Здесь ρ_c, l_c — координаты точки наблюдения, в которой вычисляется значение S_{np} . Более подробно приводимые здесь обозначения поясняются в [11]. Если S_0, S_{v0} — значение функции и ее нормальной производной на границе $v = 0$

$$l + i\rho = l_e(w) + i\rho_e(w), \quad w = u + iv$$

$$S|_{v=0} = S_0(t) \quad \partial S / \partial v|_{v=0} = S_{v0}(t) \quad (4.8)$$

то, решение задачи (4.4), (4.8) дается выражением

$$S = \text{Re} \left\{ \left[\frac{\rho_e(w)}{\rho} \right]^{1/2} S_0(w) + \int_0^v \left[\left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)^{1/2} (S_{v0} + \frac{\beta}{2\rho_e} S_0) F\left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda_e\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{4} - p^2\right) \frac{S_0}{2\rho_e^{1/2}\rho^{3/2}} \left(\frac{\rho^2 - \rho_e^2 + [l_e - l]^2}{2\rho_e} \beta + [l_e - l] \alpha \right) F\left(\frac{3}{2} + p, \frac{3}{2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - p, 2; \lambda_e \right) \right] d\xi - \frac{1}{\rho^{1/2}} \int_0^v d\xi \int_0^{v-\xi} K(u + i\xi, \eta) d\eta \right\}, \quad K(u, v) = \rho^{1/2} G T, \quad \zeta = u + i\xi$$

$$(4.9)$$

$$\lambda = -\frac{[\rho(\zeta, \eta) - \rho(u, v)]^2 + [l(\zeta, \eta) - l(u, v)]^2}{4\rho(\zeta, \eta)\rho(u, v)}, \quad \lambda_e = -\frac{(\rho_e - \rho)^2 + (l_e - l)^2}{4\rho_e\rho}$$

Функции $S_0, S_{v0}, \rho_e, l_e, \alpha = d\rho_e/dt, \beta = dl_e/dt$ имеют в качестве аргумента $\zeta = u + i\xi$; $\rho = \rho(u, v), l = l(u, v)$. Формула (4.9) будет основной для дальнейших специализаций и упрощений.

Можно показать, что для электростатических течений при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, граница течения описывается регулярной кривой, однако в более сложных случаях (магнитное поле; эмиссия, ограниченная температурой и т. д.) как граница, так и условия Коши на ней в явном виде будут определяться функциями с особенностями,

характер которых не исчерпывается простейшей степенной зависимостью, выделявшейся в п. 3.

Заметного упрощения формулы (4.9) можно добиться, если интересоваться электростатическими пучками с регулярной границей, рассматриваемой как квазицилиндр, радиус которого меняется только за счет медленной координаты L .

4.1°. *Квазицилиндрическая граница задается соотношениями*

$$\rho = \rho_e(t) = \rho_0(L), \quad z = z_e(t) = t \quad (4.10)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} z + i\rho &= w + i\rho_0(L), & \alpha(t) &= 0, & \beta(t) &= 1 \\ \rho &= v + \rho_0(L), & z &= u, & w &= u + iv = z + i(\rho - \rho_0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая (4.10), (4.11), получаем вместо (4.9)

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{\rho_0(L)}{\rho} \right]^{1/2} \operatorname{Re} S_0(w) + \int_{\rho_0}^{\rho} \left\{ \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} F \left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda_e \right) \times \right. \\ &\times \operatorname{Re} \left[S_{\nu_0}(\zeta) + \frac{1}{2\rho_0} S_0(\zeta) \right] - \left(\frac{1}{4} - p^2 \right) \frac{\rho^2 - 2\rho_0^2 + 2\rho_0\sigma - \sigma^2}{2(\rho_0\rho)^{3/2}} \times \\ &\times F \left(\frac{3}{2} + p, \frac{3}{2} - p, 2; \lambda_e \right) \operatorname{Re} S_0(\zeta) \left. \right\} d\sigma - \frac{1}{\rho^{1/2}} \int_{\rho_0}^{\rho} d\sigma \int_{\sigma}^{\rho} r^{1/2} \times \\ &\times F \left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda \right) \operatorname{Re} T(\zeta, r) dr, \quad T(\zeta, r) = T(z, p) \Big|_{z \rightarrow \zeta, \rho \rightarrow r} \quad (4.12) \\ \lambda_e &= \frac{(\sigma - \rho)(\sigma + \rho - 2\rho_0)}{4\rho\rho_0}, \quad \lambda = \frac{(\sigma - \rho_0)^2 - (r - \rho)^2}{4rp} \quad \zeta = z + i(\sigma - \rho_0) \end{aligned}$$

Видно, что аргументы λ и λ_e стали действительными, а $\rho_0(L)$, отвечающее за геометрию течения, не подвергается действию дифференциальных операторов по быстрым координатам.

Выражение для решения в случае, когда граница является истинным цилиндром в квазицилиндрических координатах l, ρ, ϑ , получается из (4.12) при $\rho_0(L) = 1$.

4.2°. *Квазиконическая граница в квазицилиндрических координатах.* Коническая граница в координатах l, ρ, ϑ является простейшим примером поверхности с особенностью, для которой неприменимо представление (4.10) и решение (4.12). Ясно, что введение дополнительной переменной z позволит рассматривать, например, такие течения, граница которых близка к конусу вблизи начала координат и превращается в квазицилиндр вдали от него:

$$\rho = z(1 + L)^{-1} \rho_0(L), \quad \rho_0(0) = \text{const}$$

Введем квазисферические координаты r, θ

$$r^2 = z^2 + s^2 + q^2, \quad \theta = \arctg(\rho / z) \quad (4.13)$$

Квазиконус в z, L, ρ, ϑ определим параметрически

$$\rho = \rho_e(t) = e^t \sin \theta_0 R(L) = \alpha(t), \quad z = z_e(t) = e^t \cos \theta_0 = \beta(t) \quad (4.14)$$

Если потребовать, чтобы $R(0) = 1$, то θ_0 имеет смысл угла конуса, касательного в начале координат к квазиконусу (4.14). Подстановка (4.14) в (4.9) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{R \sin \theta_0}{A(v, L)} \right]^{1/2} \operatorname{Re} [e^{iv/2} S_0(w)] + \int_0^v \left\{ \left[\frac{R \sin \theta_0}{A(v, L)} \right]^{1/2} \operatorname{Re} \left[e^{i\xi/2} \left\{ S_{\nu_0}(\zeta) + \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{2R} S_0(\zeta) \right\} \right] \times \right. \\ &\times F \left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda_e \right) - \left(\frac{1}{4} - p^2 \right) C(L) \frac{\cos \theta_0 \cos \xi - B(v, L)}{2 [R \sin \theta_0 A(v, L)]^{3/2}} \operatorname{Re} [e^{i\xi/2} S_0(\zeta)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times F\left(\frac{3}{2} + p, \frac{3}{2} - p, 2; \lambda_e\right) \left\} d\xi - \int_0^v d\xi \int_0^{v-\xi} \left[\frac{A(\eta, L)}{A(v, L)}\right]^{1/2} \operatorname{Re} [e^{i\xi/2} T(\zeta, \eta)] \times \\ & \times F\left(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} - p, 1; \lambda\right) d\eta \\ \lambda_e &= \frac{C(L)(\cos v - \cos \xi)}{2R \sin \theta_0 A(v, L)}, \quad \lambda = \frac{C(L)[\cos(v - \eta) - \cos \xi]}{2A(\eta, L)A(v, L)}, \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi \\ u &= \ln [r / C(L)], \quad v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(\operatorname{tg} \theta - R \operatorname{tg} \theta_0) / (1 + R \operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \theta)] \\ T(\zeta, \eta) &= T(u, v)_{u \rightarrow \zeta, v \rightarrow \eta}, \quad A(x, L) = \sin x \cos \theta_0 + R \cos x \sin \theta_0 \\ B(x, L) &= \cos x \cos \theta_0 - R \sin x \sin \theta_0, \quad C(L) = \cos^2 \theta_0 + R^2 \sin^2 \theta_0 \quad (4.15) \end{aligned}$$

Видно, что выражение (4.15) по сложности не превосходит (4.12), λ_e и λ снова получились действительными. При $R(L) = 1$ получается истинный конус в квазицилиндрических координатах, и наступают дальнейшие упрощения.

До сих пор условия Коши для функции S_{np} предполагались известными. Значение потенциала и его производной на границе Σ пучка получаются из решения внутренней задачи (для квазицилиндра см. п. 4) и могут содержать малый параметр ε , характеризующий узость области, занятой зарядами. Если представить эти функции в виде рядов, аналогичных (4.3)

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Sigma} &= V(t, \vartheta, L, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{\circ}(t, \vartheta, L) \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t, \vartheta, L) \mu^n \\ \partial \varphi / \partial v|_{\Sigma} &= F(t, \vartheta, L, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{\circ}(t, \vartheta, L) \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t, \vartheta, L) \mu^n \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} V_n(t, \vartheta, L) &= \sum_{p=0}^{\infty} (\vartheta_{np}^c \cos p\vartheta + \vartheta_{np}^s \sin p\vartheta), \quad F_n(t, \vartheta, L) = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (f_{np}^c \cos p\vartheta + f_{np}^s \sin p\vartheta) \end{aligned}$$

то в качестве S_0 и S_{v_0} следует взять $\vartheta_{np}(t, L)$ и $f_{np}(t, L)$. В дальнейшем из них можно конструировать полные функции V, F , как это делается в [11]; эта операция имеет смысл, например, в том случае, когда V, F берутся из точного решения.

Заметим, что решение в форме (4.9) позволяет, по-видимому, рассматривать не только наиболее простые электростатические пучки при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, но и более сложные случаи, когда граница, оставаясь близкой к оси, характеризуется отличной от (4.10), (4.14) зависимостью по быстрым координатам. При этом выделение степенной особенности в функциях V, F не является необходимым для построения алгоритма, и этот момент не столь критичен, как в течениях с произвольным сечением, которые будут рассмотрены ниже.

Вообще же деформация координат в виде (3.5), необходимая во внутренней области, включая границу, является излишней при решении внешней задачи, так что для нее дело сводится к изменению закона парамет-

ризации точек границы $\rho = \rho_e(l)$ при помощи перехода

$$\zeta(l) = l + 1/2 \varepsilon^2 Q_{\rho\rho}(l) \rho_l^2(l) \quad (4.17)$$

который даст поправку в правой части (4.4), начиная с $n = 6$.

В случае введения дополнительной координаты условия Коши S_0, S_{v0} в (4.9) факторизуются аналогично (2.4); можно показать, что вторые производные в (4.5) при этом не приводят к увеличению порядка особенности, компенсируясь двукратным интегрированием в (4.9). Таким образом, оказывается соблюденным соответствующий принцип асимптотических разложений [5].

5. Формирование квазицилиндрических пучков с произвольным сечением. Пусть

$$s = s_e(t, l), \quad q = q_e(t, l) \quad (5.1)$$

параметрические уравнения границы течения, причем зависимость от l является слабой. Деформированная координата ζ на поверхности Σ определяется формулами (4.5), (5.1). С точки зрения параксиального подхода п. 3 обратным этому преобразованию будет

$$l = \zeta - 1/2 \varepsilon^2 [Q_{ss}(\zeta) s_e^2(t, \zeta) + 2Q_{sq}(\zeta) s_e(t, \zeta) q_e(t, \zeta) + Q_{qq}(\zeta) q_e^2(t, \zeta)] \quad (5.2)$$

Метрика в l, s, q задается соотношением [3]

$$d\mathbf{r}^2 = [(1 - ks)^2 + \kappa^2 (s^2 + q^2)] dl^2 + ds^2 + dq^2 - 2\kappa q dl ds + 2\kappa s dl dq \quad (5.3)$$

Совершим конформное отображение

$$s + iq = s_e(w, \zeta) + iq_e(w, \zeta) \quad w = u + iv \quad (5.4)$$

ставящее в соответствие поверхности (5.1) действительную ось $v = 0$ в плоскости uv , и перейдем к координатам $x^1 = \zeta, x^2 = u, x^3 = v$. При этом отличие l от ζ скажется не ранее члена порядка μ^4 .

С этой точностью (5.3) примет вид

$$d\mathbf{r}^2 = g_{ik} dx^i dx^k = [(1 - ks)^2 + (\kappa s + q_{,\zeta})^2 + (\kappa q - s_{,\zeta})^2] d\zeta^2 + (s_{,u}^2 + s_{,v}^2) (du^2 + dv^2) - 2[(\kappa s + q_{,\zeta}) s_{,v} + (\kappa q - s_{,\zeta}) s_{,u}] dud\zeta + 2[(\kappa s + q_{,\zeta}) s_{,u} - (\kappa q - s_{,\zeta}) s_{,v}] dvd\zeta, \quad \sqrt{g_0} = s_{,u}^2 + s_{,v}^2, \quad s_{,u} = \partial s / \partial u \quad (5.5)$$

Здесь k, κ — функции ζ ; s, q — функции u, v, ζ , определяемые формулой (5.4).

Уравнение Лапласа может быть выписано в метрике (5.5), позволяющей правильно осуществить группировку членов одного порядка малости. Разделим зависимость от деформированной координаты ζ на быструю и медленную

$$\zeta \rightarrow z, Z, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

При этом все функции в (5.5) зависят от Z , а условия Коши на границе пучка Σ имеют в соответствии с п. 3 вид

$$\varphi|_{\Sigma} = z^{\nu} V(t, Z, \varepsilon), \quad \partial \varphi / \partial \nu|_{\Sigma} = z^{\mu} F(t, Z, \varepsilon) \quad (5.6)$$

Функция n -го приближения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi \langle n \rangle}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi \langle n \rangle}{\partial v^2} + \sqrt{g_0(u, v, Z)} \frac{\partial^2 \varphi \langle n \rangle}{\partial z^2} = T \langle n \rangle, \quad T \langle 0 \rangle = 0 \quad (5.7)$$

Для $T \langle 1 \rangle$, например, получаем

$$T \langle 1 \rangle = -2ks \sqrt{g_0} \frac{\partial^2 \varphi \langle 0 \rangle}{\partial z^2} + g_{12} \frac{\partial^2 \varphi \langle 0 \rangle}{\partial z \partial u} + g_{13} \frac{\partial^2 \varphi \langle 0 \rangle}{\partial z \partial v} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial \sqrt{g_0}}{\partial Z} \right) \frac{\partial \varphi \langle 0 \rangle}{\partial z} + \\ + ks_{,u} \frac{\partial \varphi \langle 0 \rangle}{\partial u} + ks_{,v} \frac{\partial \varphi \langle 0 \rangle}{\partial v} - 2 \sqrt{g_0} \frac{\partial^2 \varphi \langle 0 \rangle}{\partial z \partial Z} \quad (5.8)$$

Решение задачи Коши для уравнения (5.7) с условиями (5.6) на $v = 0$ будем искать [7], пользуясь интегральным представлением

$$z^\nu = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{(0)}^{\infty} \frac{e^{-pz}}{p^{\nu+1}} dp \quad (5.9)$$

в следующем виде:

$$\varphi \langle n \rangle = \int_{(0)}^{\infty} \Phi_n(u, v, Z, p) e^{-pz} dp, \quad T \langle n \rangle = \int_{(0)}^{\infty} T_n(u, v, Z, p) e^{-pz} dp \quad (5.10)$$

При этом для Φ_n получаем:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial v^2} + \sqrt{g_0(u, v, Z)} p^2 \Phi_n = T_n \quad (5.11)$$

$$\Phi_n|_{v=0} = \vartheta(u, L, p) = \frac{V(u, L, \varepsilon)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{p^{\nu+1}}, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} \Big|_{v=0} = f(u, L, p) = \frac{F(u, L, \varepsilon)}{\Gamma(-\mu)} \frac{1}{p^{\mu+1}}$$

Решение задачи (5.11) по методу Римана дает

$$\Phi_n = \operatorname{Re} \left\{ \frac{V(w, L, \varepsilon)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{p^{\nu+1}} + \int_0^v \left[J_0(\lambda_e) \frac{F(\zeta)}{\Gamma(-\mu)} \frac{1}{p^{\mu+1}} - \right. \right. \\ \left. \left. - p^2 \frac{J_1(\lambda_e)}{\lambda_e} \{ (s_e - s) \beta - (q_e - q) \alpha \} \frac{V(\zeta)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{p^{\nu+1}} \right] d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^v d\xi \int_0^{v-\xi} K_n(\zeta, \eta) d\eta \right\}, \quad K_n(u, v, p) = J_0(\lambda) T_n$$

$$\lambda_e = -pr_e = -p[(s_e - s)^2 + (q_e - q)^2]^{1/2}, \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi \quad (5.12)$$

$$\lambda = -pr = -p\{[s(\zeta, \eta) - s(u, v)]^2 + [q(\zeta, \eta) - q(u, v)]^2\}^{1/2}$$

Потребуем, чтобы нулевое приближение $\varphi \langle 0 \rangle$ удовлетворяло полным условиям (5.6) на поверхности (5.3), а следующие приближения — однородным условиям на ней. Тогда, используя интеграл Липшица — Ганкеля, имеем

$$\varphi \langle 0 \rangle = z^\nu \operatorname{Re} V(w, Z, \varepsilon) + \operatorname{Re} \int_0^v \left\{ F(\zeta, Z, \varepsilon) (z^2 + r_e^2)^{\mu/2} P_{-\mu-1}(\Theta_e) - \right. \\ \left. - \frac{(s_e - s) \beta - (q_e - q) \alpha}{(z^2 + r_e^2)^{1-\nu/2}} \frac{dP_{-\nu}}{d\Theta_e} V(\zeta, Z, \varepsilon) \right\} d\xi, \quad \Theta_e = \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_e^2}}, \quad \zeta = u + i\xi \quad (5.13)$$

При эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, $\nu = \mu = 4/3$. Функция n -го приближения $\varphi\langle n \rangle$ задается формулой

$$\varphi\langle n \rangle = - \int_{(0)}^{\infty} e^{-pz} dp \int_0^v d\xi \int_0^{v-\xi} K_n(\xi, \eta, p) d\eta \quad (5.14)$$

Для интеграла по контуру в (5.14), к сожалению, не может быть дано замкнутого выражения. Для его оценки следует использовать подход, при помощи которого в [12] были построены формирующие электроды для конического пучка. Заметим, что поскольку

$$dJ_0 / dx = -J_1, \quad dJ_1 / dx = -J_1 / x + J_0$$

то во всех приближениях будут встречаться только J_0 и J_1 . Так, в первом приближении необходимо знать интегралы, содержащие произведения $J_0(ap) J_0(bp)$, $J_0(ap) J_1(bp)$, а во втором приближении интеграл включает различные кубические комбинации бесселевых функций.

5.1°. *Тороидальный пучок с произвольным сечением.* Вырежем пучок указанной конфигурации из потока, определяемого точным решением [8]. Он стартует с плоского эмиттера, так что система координат l, s, q с окружностью в качестве осевой кривой ($k = 1/R_0 = \text{const}$, $\kappa = 0$) оказывается ортогональной и связана с эмиттером и траекториями; таким образом, деформация координат оказывается излишней. Поверхность пучка суть цилиндрическая в l, s, q поверхность

$$s = s_e(t), \quad q = q_e(t); \quad s + iq = s_e(w) + iq_e(w), \quad w = u + iv \quad (5.15)$$

Метрика в координатах l, u, v определяется формулами

$$g_{11} = (1 - ks)^2, \quad g_{22} = g_{33} = s_{,u}^2 + s_{,v}^2, \quad \sqrt{g} = (1 - ks)(s_{,u}^2 + s_{,v}^2)$$

Предположим относительно контура (5.15), что квазицилиндрический угол ϑ может быть использован для однозначного параметрического представления. Тогда потенциал и нормальная производная на $v = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi|_{v=0} = V(z, L, \vartheta) &= \left(\frac{3}{2}z\right)^{4/3} V(L, \vartheta), \quad V(L, \vartheta) = \frac{1}{[1 - ks_e(\vartheta)]^{1/3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{4/3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{v=0} = F(z, L, \vartheta) &= \left(\frac{3}{2}z\right)^{4/3} F(L, \vartheta), \quad F(L, \vartheta) = - \frac{2k\beta(\vartheta)}{[1 - ks_e(\vartheta)]^{1/3}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/3} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$x = 3/2kL [1 - ks_e(\vartheta)]^{-1}, \quad \beta(\vartheta) = dq_e / d\vartheta$$

Правые части в (5.7) и (5.11) для этого случая могут быть выписаны для любого n

$$\begin{aligned} T_n = k \left[2s \left(\frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial v^2} \right) + s_{,u} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial u} + s_{,v} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial v} \right] + \\ + 2(s_{,u}^2 + s_{,v}^2) p \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial L} - k^2 \left[s^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{n-2}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{n-2}}{\partial v^2} \right) + \right. \\ \left. + s s_{,u} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial u} + s s_{,v} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial v} \right] - (s_{,u}^2 + s_{,v}^2) \frac{\partial^2 \Phi_{n-2}}{\partial L^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Заметим, что вторые производные по переменным u, v в T_n могут быть полностью исключены.

Как отмечалось выше, приводившиеся асимптотические разложения равномерно пригодны в полосе шириной μ . Однако для достаточно сложных геометрий использова-

ние этих выражений вдали от эмиттера может оказаться нецелесообразным с точки зрения объема необходимых вычислений, и они могут быть заменены квазиодномерными разложениями [3] или непосредственно рядами по координате, нормальной к границе потока [6].

Использование условий Коши из п. 3 в выражениях пп. 4, 5 дает полное решение обратной задачи теории интенсивных пучков в параксиальном приближении.

Поступила 30 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. О в ч а р о в В. Т. Уравнения электронной оптики для плоскосимметричных и осесимметричных пучков с большой плотностью тока. Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 8.
2. K i r s t e i n P. T. Paraxial formulation of the equations of electrostatic space-charge flow. J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, No. 7.
3. Д а н и л о в В. Н. О параксиальном приближении для плотного электронного пучка. ПМТФ, 1968, № 5.
4. F r i e d r i c h s K. O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 61, No. 6.
5. В а н - Д а й к М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
6. С ы р о в о й В. А. К теории электростатической фокусировки интенсивных пучков заряженных частиц. ПМТФ, 1967, № 4.
7. С ы р о в о й В. А. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерном случае применительно к проблеме формирования интенсивных пучков заряженных частиц. ПММ, 1970, т. 34, № 1.
8. M e l t z e r V. Single component stationary electron flow under space-charge conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, No 2.
9. R a d l e y D. E. The theory of the Pierce type electron guns. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
10. L o m a x R. J. Exact electrode systems for the formation of a curved space-charge beam. J. Electr. Contr., 1957, vol. 3, No. 4.
11. К у з н е ц о в Ю. Е., С ы р о в о й В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. ПМТФ, 1966, № 2.
12. R a d l e y D. E. Electrodes for convergent Pierce-type electron guns. J. Electr. Contr., 1963, vol. 15, No. 5.