Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ЖИДКОСТИ

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается возникновение автоколебаний при переходе числа Рейнольдса (или иного параметра, определяющего стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости) через критическое значение.

Л. Д. Ландау в работе [1] (см. также [2, 3]) рассматривал рождение периодического автоколебательного режима как первый шаг в переходе от ламинарного течения жидкости к турбулентному. Его метод, развитый также Д. Мексином, Дж. Т. Стюартом, Дж. Ватсоном (см. [4–7]), требует знания тех собственных векторов линеаризованного (около основного ламинарного режима, при данном числе Рейнольдса) оператора Навье — Стокса, которым отвечают растущие (по линейной теории) возмущения. Для коэффициентов Фурье поля скорости, соответствующие этим собственным векторам, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Правые части этой системы вычислять, однако, довольно сложно. По этой причине метод не привел пока к окончательным результатам в конкретных случаях — скажем для течения Пуазейля в канале. Видимо, метод Л. Д. Ландау более подходит для исследования процесса установления, чем для расчета установившегося периодического режима.

В данной работе возникновение автоколебаний изучается при помощи метода Ляпунова — Шмидта. Метод Ляпунова — Шмидта изложен в [8–9]. Ветвление периодических решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается в [10], где имеются ссылки на более ранние работы. Вопрос о рождении цикла рассматривается в [10, 11] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а в [12–14] также в специальном случае галеркинских уравнений, аппроксимирующих систему Навье — Стокса; в [13, 14] сформулированы также и некоторые утверждения о полных уравнениях Навье — Стокса.

В § 1 дается развернутая постановка задачи и вводятся основные определения; устанавливается априорная оценка частот возможных автоколебательных режимов (лемма 1.2); доказано, что точкой ответвления цикла может быть лишь критическое значение параметра (лемма 1.3).

Дальнейшее посвящено выяснению дополнительных условий, при которых действительно возникает цикл. В § 2 доказывается теорема 2.1, которая является аналогом теоремы М. А. Красносельского [15] о точках бифуркации. В условиях теоремы 2.1 существование автоколебательного периодического движения устанавливается на основе анализа одних лишь линеаризованных уравнений, независимо от вида нелинейных членов.

Теорема 2.2 и дальнейшие замечания к ней содержат более подробное исследование возникающих циклов, их числа и аналитических свойств как функций параметра γ.

Так как доказательства теорем 2.1 и 2.2 опираются лишь на самые общие свойства уравнений Навье — Стокса, они легко обобщаются на широкий класс обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. теоремы 3.1 и 3.2 в § 3), содержащий, в частности, различные задачи для уравнений параболического типа, уравнений конвекции, магнитной гидродинамики и т. п.

§ 1. Существование автоколебаний.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая однородная жидкость заполняет ограниченную

область Ω трехмерного евклидова пространства [1]. Предположим, что вектор массовых сил и вектор скорости на границе S области Ω заданы, не зависят от времени и зависят от некоторого параметра γ.

Пусть существует стационарное решение уравнений Навье — Стокса $(\mathbf{a}(x,\gamma),\ p_0(x,\gamma))$, которое дальше будем называть основным.

Значение γ_0 параметра γ называется критическим, если при $\gamma=\gamma_0$ спектр устойчивости основного течения имеет непустое пересечение с мнимой осью.

Если спектр устойчивости при $\gamma=\gamma_0$ содержит нуль, то при переходе параметра γ через критическое значение γ_0, как правило, от основного течения ответвляются новые стационарные режимы (см. [16-18]). Здесь же рассматривается тот случай, когда при $\gamma=\gamma_0$ спектр устойчивости содержит пару чисто мнимых собственных значений $\mp i\omega_0$ ($\omega_0\neq 0$). В этом случае линеаризованная система имеет периодическое решение и следует ожидать, что при γ, близких к γ_0, существует автоколебательное периодическое решение нелинейных уравнений Навье — Стокса. Далее указаны условия, при которых это действительно имеет место.

Спектр устойчивости автоколебательного режима при γ, близких к γ_0, содержит точки $\sigma_{1,2}$, близкие к $\mp i\omega_0$ (их можно вычислить при помощи рядов теории возмущений). Если они оказываются в правой полуплоскости, то автоколебательный режим неустойчив. Неустойчив он и в том случае, когда при $\gamma=\gamma_0$ основное течение неустойчиво, и это выражается в присутствии точек правой полуплоскости в его спектре устойчивости. Если же все точки спектра устойчивости основного течения при $\gamma=\gamma_0$, за исключением $\mp i\omega_0$, лежат внутри левой полуплоскости, и $\operatorname{Re}\sigma_{1,2}<0$, то автоколебательный режим оказывается устойчивым. Метод возмущений позволяет выяснить, какая из указанных возможностей реализуется.

Будем считать дальше, что $S\in C^2$, и вектор $\mathbf{a}$ зависит от γ аналитически в окрестности γ_0

$$\mathbf{a}(x,\gamma)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{a}_k(x)\,\delta^k,\qquad \delta\doteq\gamma-\gamma_0 \tag{1.1}$$

причем ряд (1.1) сходится в $W_2^{(2)}$.

Полагая для любого решения $\mathbf{v}'$, P' уравнений Навье — Стокса

$$\mathbf{v}'=\mathbf{v}+\mathbf{a},\qquad P'=q+P_0 \tag{1.2}$$

придем к нелинейному уравнению возмущений

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+A\mathbf{v}+\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k B_k\mathbf{v}=-K\mathbf{v} \tag{1.3}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{gathered}K\mathbf{v}=K_{20}(\mathbf{v},\mathbf{v}),\qquad K_{20}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\Pi(\mathbf{u},\nabla)\,\mathbf{v}\\ K_{20}{}^{\circ}(\mathbf{u},\mathbf{v})=K_{20}(\mathbf{u},\mathbf{v})+K_{20}(\mathbf{v},\mathbf{u}),\qquad B_k\mathbf{v}=K_{20}{}^{\circ}(\mathbf{a}_k,\mathbf{v})\quad(k=0,1,\ldots)\\ A=A_0+B_0,\qquad A_0=-\nu\Pi\Delta\end{gathered} \tag{1.4}$$

[1] Двумерный и n-мерный случаи рассматриваются аналогично.

Оператор П есть ортогональный проектор в L_2 на подпространство, $H = S_2$ — замыкание в L_2 множества гладких соленоидальных векторов, исчезающих вблизи границы области Ω.

Неизвестную циклическую частоту искомого периодического решения уравнения (1.3) обозначим через ω. Делая замену $\omega t = \tau$, приведем уравнение (1.3) к виду

$$\omega \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + A\mathbf{v} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k B_k \mathbf{v} = -K\mathbf{v} \tag{1.5}$$

Предположим, что собственному числу $-i\omega_0$ отвечает единственный собственный вектор φ оператора A. Тогда собственному числу $i\omega_0$ отвечает комплексно-сопряженный собственный вектор φ^*

$$A\varphi + i\omega_0\varphi = 0, \qquad A\varphi^* - i\omega_0\varphi^* = 0 \tag{1.6}$$

Введем оператор A^* — сопряженный к оператору A в H: область определения его совпадает с D_A и

$$A^* = A_0 + B_0^*, \qquad B_0^*\mathbf{u} = -\Pi\left\{a_k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_i\right\} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — координатные орты в R^3.

Для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in D_A$ имеет место тождество

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (\mathbf{u}, A^*\mathbf{v})_H \tag{1.8}$$

Скалярное произведение в H имеет вид

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^* dx \tag{1.9}$$

Оператор A имеет дискретный спектр, его резольвента представляет собой вполне непрерывный оператор в энергетическом пространстве H_1 оператора A_0; каждый обобщенный собственный вектор φ принадлежит D_{A_0}, каждое собственное число оператора A есть также и собственное число сопряженного оператора A^*. Собственный вектор оператора A^*, отвечающий собственному числу $i\omega_0$, обозначим через Φ. Имеем

$$A^*\Phi - i\omega_0\Phi = 0, \qquad A^*\Phi^* + i\omega_0\Phi^* = 0 \tag{1.10}$$

Предположим, что собственные числа $\mp i\omega_0$ — простые; это означает, кроме единственности соответствующих им собственных векторов, что $(\varphi, \Phi)_H \neq 0$, и можно считать выполненным условие

$$(\varphi, \Phi)_H = \int_\Omega \varphi\cdot\Phi^* dx = 1 \tag{1.11}$$

Будем разыскивать ненулевые 2π-периодические решения уравнения (1.5) в гильбертовом пространстве H_2 — замыкании множества вектор-функций $\mathbf{v}(\tau) : \tau \in [0, 2\pi]$ таких, что $A\mathbf{v}(\tau)$ и $d\mathbf{v}(\tau)/d\tau$ сильно непрерывны на $[0, 2\pi]$, в метрике

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_2} = \int_0^{2\pi}\left[\omega_0^2\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}\right)_H + (A_0\mathbf{u}, A_0\mathbf{v})_H\right] d\tau \tag{1.12}$$

Назовем число γ_0 точкой ответвления цикла, если существует последовательность $\gamma_n \to \gamma_0$ $(\delta_n = \gamma_n - \gamma_0 \to 0)$ и соответствующие последовательности чисел $\omega_n \neq 0$ и вектор-функций $v_n \in H_2$; $\mathbf{v}_n \neq 0$ — решений уравнения (1.5), причем $\mathbf{v}_n \to 0$ в H_2. Скажем, что ответвляется нормальный цикл, если существуют однопараметрические семейства ω_γ, v_γ: $\mathbf{v}_\gamma \in H_2$; $\mathbf{v}_\gamma \neq 0$ $(\gamma \neq \gamma_0)$, непрерывные по γ и удовлетворяющие уравнению (1.5), когда γ пробегает некоторый интервал J, имеющий γ_0 своей предельной точкой, причем $\omega_\gamma \to \omega_0 \neq 0$; $v_\gamma \to 0$ при $\gamma \to \gamma_0$. Если $\omega_\gamma \to 0$ $(\omega_\gamma \to \infty)$, а все прочие условия выполняются, то назовем цикл медленным (быстрым). Наконец, назовем (нормальный, медленный или быстрый) цикл двусторонним, если указанный выше интервал J можно выбрать так, чтобы он содержал точку γ_0. В противном случае будем называть цикл односторонним [1].

Дальнейшее посвящено изучению условий, при выполнении которых γ_0 является точкой ответвления цикла, а также исследованию множества тех γ и ω, для которых уравнение (1.5) имеет ненулевое решение.

Введем оператор $L : H_2 \to H' = L_2((0, 2\pi), H)$, полагая для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in H_2$

$$L\mathbf{u} \equiv \omega_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + A\mathbf{u} \tag{1.13}$$

Лемма 1.1. Для того чтобы оператор L был обратим, необходимо и достаточно, чтобы точки $in\omega_0$ $(n = 0, \mp 1, \ldots)$ не принадлежали спектру оператора A.

Доказательство. Можно считать, что $\omega_0 > 0$ (в противном случае этого можно добиться заменой $\omega_0 \to -\omega_0$; $\tau \to -\tau$). Пусть $f \in H'$. Рассмотрим уравнение

$$L\mathbf{u} \equiv \omega_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + A\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{1.14}$$

Покажем, что задача отыскания его 2π-периодического решения сводится к уравнению Фредгольма второго рода. Для этого перепишем уравнение (1.14) в виде

$$L_0\mathbf{u} \equiv \omega_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + A_0\mathbf{u} = f - B_0\mathbf{u} \tag{1.15}$$

Нетрудно видеть, что оператор $L_0 : H_2 \to H'$ обратим. Обратный оператор можно представить в различных формах

$$u_0(t) = (L_0^{-1}\mathbf{f})(t) = \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{1}{\omega_0}(t-\tau) A_0\right] \mathbf{f}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in_0 t} (in\omega_0 I + A_0)^{-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{f}(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau \tag{1.16}$$

$$u_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} \varphi_k \frac{1}{\lambda_k^2 + in\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\mathbf{f}(\tau), \varphi_k)\, e^{-in\tau}\, d\tau \tag{1.17}$$

---

[1] Этим определением не исключается тот случай, когда при переходе параметра γ через критическое значение γ_0 возникают циклы двух или даже всех трех перечисленных сортов.

Здесь φ_k — полная система собственных векторов (самосопряженного, положительно определенного, имеющего вполне непрерывный обратный) оператора A_0, λ_k^2 — соответствующие собственные числа: $\lambda_k^2 \to \infty$ $(k \to \infty)$; из результатов [20] следует, что

$$\varphi_k \in W_p^{(2)}(\Omega) \qquad \text{при } p \geqslant 1$$

Обращая оператор L_0, приведем уравнение (1.15) к эквивалентному виду

$$\mathbf{u} + L_0^{-1}B_0\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \qquad \mathbf{u}_0 = L_0^{-1}\mathbf{f} \tag{1.18}$$

Покажем, что оператор $L_0^{-1}B_0 : H_2 \to H_2$ вполне непрерывен. Действительно, его можно представить в виде $L_0^{-1}B_0J$, где J — оператор вложения пространства H_2 в пространство H_1' 2π-периодических вектор-функций из $L_2((0, 2\pi), H_1)$. Для любой вектор-функции

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{nk} l^{int}$$

имеем

$$\|\mathbf{u}\|_{H_2}^2 = 2\pi \sum_{n,k} (n^2\omega_0^2 + \lambda_k^4) |c_{nk}|^2, \qquad \|\mathbf{u}\|_{H_1'}^2 = 2\pi \sum_{n,k} \lambda_k^2 |c_{nk}|^2 \tag{1.19}$$

Из критерия компактности в l_2 следует поэтому, что шар пространства H_2 есть компактный эллипсоид в H_1'. Итак, оператор $J : H_2 \to H_1'$ вполне непрерывен. Оператор $B_0 : H_1' \to H'$ ограничен: учитывая его определение (1.4) и элементарное неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{H_1'}^2 \geqslant \lambda_1^2 \|\mathbf{u}\|_{H'}^2$$

получаем

$$\|B_0\mathbf{u}\|_{H'} \leqslant c_0 \|\mathbf{u}\|_{H_1'}$$

$$c_0^2 = 2 \max_{x \in \Omega} |a(x)|^2 + 2 \frac{1}{\lambda_1^2} \int_\Omega (\operatorname{rot} a)^2 \, dx \tag{1.20}$$

Оператор $L_0^{-1}B_0 = L_0^{-1}B_0J$, таким образом, вполне непрерывен в H_2. Согласно теории Фредгольма, для разрешимости уравнения (1.18) (или уравнения (1.14)) необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение не имело ненулевых решений. При помощи разложения в ряд Фурье легко убеждаемся в том, что последнее условие совпадает с условием леммы, чем и завершается ее доказательство.

Лемма 1.2. Множество тех ω, которым соответствуют ненулевые 2π-периодические решения уравнения (1.5) из любого шара $\|\mathbf{v}\|_{H_2} \leqslant r$, ограничено числом, зависящим только от r, $\|\mathbf{a}\|_{W_2^{(2)}}$ и области Ω.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}$ — ненулевое 2π-периодическое решение уравнения (1.5). Положим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^\circ + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{v}^\circ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\tau) \, d\tau \tag{1.21}$$

Вектор-функция $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\omega (d\mathbf{u}/d\tau) + A_0\mathbf{u} = -K(\mathbf{v}^\circ + \mathbf{u}) + K_0(\mathbf{v}^\circ + \mathbf{u}) - B\mathbf{u} \equiv g(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\circ)$$

$$K_0(\mathbf{v}^\circ + \mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\mathbf{v}^\circ + \mathbf{u}) \, d\tau, \qquad B\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k B_k \mathbf{u} \tag{1.22}$$

Из определения (1.21) вектор-функции $\mathbf{u}$ вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{H_2} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{H_2} \tag{1.23}$$

Из уравнения (1.22), интегрируя по τ от 0 до 2π скалярные квадраты в H обеих его частей, получим

$$J_\omega \equiv \int_0^{2\pi} \left(\omega^2 \left\|\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}\right\|_H^2 + \|A_0\mathbf{u}\|_H^2\right) d\tau = \int_0^{2\pi} \|g(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\circ)\|_H^2 \, d\tau \tag{1.24}$$

Применяя для оценки правой части (1.24) неравенство (1.21) и элементарное неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^m f_k \right\|_{H'}^2 \leqslant m \sum_{k=1}^m \|f_k\|_{H'}^2, \tag{1.25}$$

получаем

$$J_\omega \leqslant 5c_0^2 \|\mathbf{u}\|_{H_1'}^2 + 5 \int_0^{2\pi} d\tau \int_\Omega [\mathbf{v}^2 (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 + \mathbf{u}^2 (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + \mathbf{u}^2 (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2] \, dx \tag{1.26}$$

Для дальнейшего понадобятся неравенства вложения

$$\max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \|\mathbf{v}(\tau)\|_{H_1} \leqslant c_1 \|\mathbf{v}\|_{H_2}, \qquad \|\mathbf{v}\|_{L_{10}(Q)} + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{L_{10/3}(Q)} \leqslant c_2 \|\mathbf{v}\|_{H_2} \tag{1.27}$$

$$Q = \Omega \times [0, 2\pi]$$

где постоянные c_1, c_2 зависят только от области Ω.

Для доказательства первого неравенства (1.27) рассмотрим тождество

$$\frac{d}{d\tau} \|u\|_{H_1}^2 = \left\| \frac{du}{d\tau} + A_0 u \right\|_H^2 - \left\| \frac{du}{d\tau} \right\|_H^2 - \|A_0 u\|_{H'}^2, \qquad \nu = 1 \tag{1.28}$$

Из (1.28), используя неравенство

$$\|A_0 u\|_H \geqslant \lambda_1 \|u\|_{H_1}$$

получим

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{H_1}{}^2 + \lambda_1{}^2 \|\mathbf{u}\|_{H_1}{}^2 \leqslant 2 \left(\left\| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\|_H^2 + \|A_0 \mathbf{u}\|_{H}{}^2 \right) \equiv \varphi^2(t) \tag{1.29}$$

Умножая обе части этого неравенства на $e^{\nu\lambda_1^2 t}$ и интегрируя по t от $-\infty$ до τ, получим

$$e^{\lambda_1^2 \tau} \|\mathbf{u}(\tau)\|_{H_1}{}^2 \leqslant 2 \int_{-\infty}^{\tau} e^{\nu\lambda_1^2 t} \varphi^2(t) \, dt \tag{1.30}$$

Правую часть (1.30) можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^\infty \int_{\tau - 2\pi(n+1)}^{\tau - 2\pi n} e^{\lambda_1^2 t} \varphi^2(t) \, dt = \frac{e^{\lambda_1^2 (\tau - 2\pi)}}{1 - e^{-2\pi\lambda_1^2}} \int_0^{2\pi} e^{\lambda_1^2 s} \varphi^2(\tau + s) \, ds \tag{1.31}$$

Отсюда уже нужное неравенство получается непосредственно; постоянную c_1 можно принять равной $2\,(1 - e^{-2\pi\lambda_1^2})^{-1}$.

Второе неравенство (1.27) выводится теперь, как в [19].

Дальше понадобятся мультипликативные неравенства

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L_{5/2}(\Omega)} \leqslant C_3 \|\mathbf{u}\|_{H_1}^{7/10} \cdot \|A_0 \mathbf{u}\|_H^{3/10}, \qquad \|\mathbf{u}\|_{L_5(\Omega)} \leqslant C_4 \|\mathbf{u}\|_H^{1/10} \cdot \|\mathbf{u}\|_{H_1}^{9/10} \tag{1.32}$$

Отметим, наконец, неравенства, справедливые для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in H_2$; $u^\circ = 0$

$$\|\mathbf{u}\|_{H'}^2 \leqslant 1/\omega^2 J_\omega, \qquad \|\mathbf{u}\|_{H_1'}^2 \leqslant \frac{1}{\omega} J_\omega \tag{1.33}$$

Для их доказательства достаточно разложить вектор-функцию $\mathbf{u}$ в ряд Фурье и воспользоваться равенством Парсеваля (1.19) и т. п.

Теперь вернемся к соотношению (1.26) и займемся последовательной оценкой слагаемых его правой части.

Применяя неравенство Гельдера и первое неравенство (1.32), получим

$$\int_0^{2\pi} d\tau \int_\Omega \mathbf{v}^2 (\operatorname{rot}\mathbf{u})^2\, dx \leqslant c_3{}^2 \|\mathbf{v}\|^2_{L_{10}(Q)} \left[\int_0^{2\pi} \|\mathbf{u}\|^{7/4}_{H_1} \cdot \|A_0\mathbf{u}\|^{5/4}_{H}\, d\tau\right]^{4/5} \tag{1.34}$$

Снова пользуясь неравенством Гельдера, выведем

$$\int_0^{2\pi} d\tau \int_\Omega \mathbf{v}^2 (\operatorname{rot}\mathbf{u})^2\, dx \leqslant c_3{}^2 \|\mathbf{v}\|^2_{L_{10}(Q)} \cdot \|A_0\mathbf{u}\|^{3/5}_{L_2(Q)} \cdot \max_\tau \|\mathbf{u}(\tau)\|^{2/5}_{H_1} \cdot \|\mathbf{u}\|_{H_1}, \tag{1.35}$$

Наконец, применяя для оценки правой части (1.35) неравенства (1.27), (1.33), получим

$$\int_0^{2\pi} d\tau \int_\Omega \mathbf{v}^2 (\operatorname{rot}\mathbf{u})^2\, dx \leqslant \frac{c_5 r^2}{\sqrt{\omega}} J_\omega, \qquad c_5 = c_3{}^2 c_2{}^2 c_1{}^{2/5} \tag{1.36}$$

Аналогично выводятся неравенства

$$\int_0^{2\pi} d\tau \int_\Omega \mathbf{u}^2 (\operatorname{rot}\mathbf{v})^2\, dx \leqslant \frac{c_6 r^2}{\sqrt{\omega}} J_\omega, \qquad c_6 = c_4{}^2 c_2{}^2 c_1^{6/5} \tag{1.37}$$

$$\int_0^{2\pi} d\tau \int_\Omega \mathbf{u}^2 (\operatorname{rot}\mathbf{u})^2\, dx \leqslant \frac{c_5 r^2}{\sqrt{\omega}} J_\omega \tag{1.38}$$

При выводе неравенства (1.38) использовано (1.23).

Из (1.26), (1.33) и (1.36) — (1.38), выводим

$$1 \leqslant \frac{5c_0{}^2}{\omega} + \frac{c_7 r^2}{\sqrt{\omega}} \tag{1.39}$$

Отсюда и вытекает искомая оценка величины ω

$$\omega \leqslant {}^1/_4 \left(c_7 r^2 + \sqrt{c_7{}^2 r^4 + 20 c_0{}^2}\right)^2 \tag{1.40}$$

Лемма 1.2 доказана.

Из леммы 1.2 следует, что при рассматриваемых условиях не может возникнуть быстрый цикл. Этот факт тесно связан с тем, что пересечение спектра линеаризованного оператора Навье — Стокса с любой прямой, параллельной мнимой оси, ограничено. Интересно было бы узнать, при каких условиях общее уравнение (1.5) может иметь быстрый цикл. По-видимому, предрасполагающим обстоятельством к возникновению быстрого цикла является свойство спектра линеаризованного оператора A иметь бесконечно удаленную точку мнимой оси в качестве предельной. Возможно своего рода быстрые циклы возникают и в случае уравнений Навье — Стокса, но лишь когда $\gamma_0 = \infty$, т. е. «ответвляются» от таких течений, которые остаются устойчивыми при любых числах Рейнольдса.

Примером могут служить плоское течение Куэтта, течение Пуазейля в круглой трубе (хотя никто этого пока строго не доказал), устойчивые вращательные потоки [17,18]. На наш взгляд, именно так объясняется малая устойчивость этих режимов при больших числах Рейнольдса, впрочем, возможно, при бесконечном числе Рейнольдса с этими течениями сливаются иные режимы, например стационарные или условно периодические.

Дальше изучаются в основном нормальные циклы.

Лемма 1.3. Точками ответвления цикла могут быть лишь критические значения параметра: пусть $\gamma_n \to \gamma_0$; $\omega_n \to \omega_0$, а соответствующие ненулевые решения $\mathbf{v}_n$ уравнения (1.5) стремятся к нулю по норме H_2. Тогда среди чисел $\mp im\omega_0$ $(m = 0, 1 \ldots)$] есть хотя бы одно, принадлежащее спектру оператора A.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть утверждение леммы неверно. Полагая $\omega = \omega_0 + \mu$, приводим уравнение (1.5) к виду

$$M\mathbf{v} \equiv \omega_0 \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + A v + \mu \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k B_k \mathbf{v} + K\mathbf{v} = 0 \tag{1.41}$$

Оператор M непрерывно переводит пространство $H_2 \times R \times R$ (пространство троек $\mathbf{v}$, μ, δ) в H'. Его дифференциал Фреше при $\mathbf{v} = 0$; $\mu = \delta = 0$ есть оператор L, который в силу леммы 1.1 обратим. Тогда, по теореме о неявной функции, уравнению (1.41) при достаточно малых μ, δ удовлетворяет только $\mathbf{v} = 0$. Это противоречит предположению, что γ_0 — точка ответвления цикла. Лемма доказана.

Итак, задача заключается в отыскании условий, достаточных для того, чтобы данное критическое значение параметра было точкой ответвления цикла.

§ 2. Уравнение разветвления. Рассмотрим вначале задачу определения периодического решения линейного неоднородного уравнения и выведем условие ее разрешимости.

Лемма 2.1. Пусть оператор A имеет на мнимой оси пару простых собственных значений $\mp i\omega_0$ $(\omega_0 > 0)$, а остальные точки мнимой оси регулярны. Тогда для существования 2π-периодического решения уравнения

$$\omega_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + A\mathbf{u} = \mathbf{f}(\tau), \qquad \mathbf{f} \in H' \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{f}(\tau), \Phi) e^{-i\tau} d\tau = 0 \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость условия (2.2) проверяется простой выкладкой: если уравнение (2.1) разрешимо, то, согласно (2.1) и (1.10), имеем

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{f}(\tau), \Phi) e^{-i\tau} d\tau = \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}(\tau), A^*\Phi - i\omega_0\Phi) e^{-i\tau} d\tau = 0 \tag{2.3}$$

Докажем достаточность. Пусть $\sigma_0(A)$, $\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$ обозначает соответственно части спектра $\sigma(A)$, лежащие на мнимой оси, внутри правой и внутри левой полуплоскости, через P_0, P_+, P_- обозначим соответствующие проекторы

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad P_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad P_- = I - P_0 - P_+ \tag{2.4}$$

Здесь Γ_0 и Γ_+ суть гладкие контуры, лежащие в ограниченной части комплексной плоскости, состоящие из одних регулярных точек оператора A, при этом в области, ограниченной контуром Γ_0 (Γ_+), содержится множество $\sigma_0(\sigma_+)$ и не содержится других точек спектра $\sigma(A)$. Введенные проекторы коммутируют между собой и с оператором A.

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau) + \mathbf{u}_+(\tau) + \mathbf{u}_-(\tau), \quad \mathbf{u}_0 = P_0\mathbf{u}; \quad \mathbf{u}_\mp = P_\mp \mathbf{u} \tag{2.5}$$

Вектор-функции $\mathbf{u}_\mp$ найдем из уравнений

$$\omega_0 \frac{d\mathbf{u}_\mp}{d\tau} + A\mathbf{u}_\mp = \mathbf{f}_\mp, \quad \mathbf{f}_\mp = P_\mp \mathbf{f} \tag{2.6}$$

Легко видеть, что эти уравнения разрешимы и

$$\mathbf{u}_+(\tau) = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{1}{\omega_0}(\tau-s)A} f_+(s)\,ds, \quad \mathbf{u}_-(\tau) = \frac{-1}{\omega_0}\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{1}{\omega_0}(\tau-s)A} f_-(s)\,ds \tag{2.7}$$

Вектор-функция $\mathbf{u}_0$ имеет вид

$$\mathbf{u}_0(\tau) = \alpha(\tau)\varphi + \alpha^*(\tau)\varphi^* \tag{2.8}$$

Функция $\alpha(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_0 \frac{d\alpha}{d\tau} - i\omega_0\alpha = (\mathbf{f}(\tau), \Phi)_H \tag{2.9}$$

Последнее можно переписать в виде

$$\omega_0 \frac{d}{d\tau} e^{-i\tau}\alpha(\tau) = e^{-i\tau}(\mathbf{f}(\tau), \Phi)_H \tag{2.10}$$

Из условия (2.2) следует 2π — периодичность функции α. Следующая лемма содержит общее условие разрешимости уравнения (2.1).

Лемма 2.2. Для существования 2π-периодического решения уравнения (2.1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{f}(\tau), \Phi)\, e^{-in\tau}\, d\tau = 0 \tag{2.11}$$

для любого собственного вектора Φ сопряженного оператора A^*, которому отвечает собственное число $in\omega_0$ с целым n.

Доказательство. Необходимость доказывается точно так же, как в лемме 2.1. Для доказательства достаточности применим теорему Фредгольма — Рисса к эквивалентному уравнению (1.18). Используя соотношение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_2} = (L_0\mathbf{u}, L_0\mathbf{v})_{H'} \tag{2.12}$$

нетрудно вывести, что соответствующее сопряженное однородное уравнение имеет вид

$$\mathbf{v} + L_0^{-1}L_0^{*-1}B_0^*L_0\mathbf{v} = 0 \tag{2.13}$$

Оператор L_0^*: $H_2 \to H'$ определяется равенством

$$L_0^*\mathbf{v} \equiv -\omega_0 \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + A_0\mathbf{v} \tag{2.14}$$

Надо иметь в виду, что оператор $L_0^{*-1}B_0^*$ допускает замыкание до вполне непрерывного в H', так как он на плотном в H' линеале H_1' совпадает с сопряженным к вполне непрерывному в H' оператору $B_0L_0^{-1} = B_0JL_0^{-1}$ (см. доказательство леммы 1.1).

Полагая $\dot{L}_0 \mathbf{v} = \varphi$, видим, что вектор-функция φ удовлетворяет уравнению

$$-\omega_0 \frac{d\varphi}{d\tau} + A_0\varphi + B_0{}^*\varphi = 0 \tag{2.15}$$

Наоборот, если φ — 2π — периодическое решение уравнения (2.15), то $\mathbf{v} = L_0^{-1}\varphi$ удовлетворяет уравнению (2.13).

Условие разрешимости уравнения (1.18) имеет вид

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_{H_2} = (\mathbf{f}, L_0\mathbf{v})_{H'} = (\mathbf{f}, \varphi)_{H'} = 0 \tag{2.16}$$

для любого 2π-периодического решения φ уравнения (2.15). При помощи разложения в ряд Фурье убеждаемся в том, что последнее представляет собой линейную комбинацию решений вида $e^{in\tau}\Phi$: n — целое число, Φ — решение уравнения

$$-in\omega_0\Phi + A^*\Phi = 0 \tag{2.17}$$

Поэтому условие (2.16) совпадает с (2.11), и лемма доказана.

Заметим, что лемма легко обобщается и на тот случай, когда оператор B_0 зависит от времени (скажем, непрерывно по норме $H_1' \to H'$); вместо условия (2.11) в этом случае надо только поставить условие (2.16).

Будем рассматривать уравнение (1.5) или (1.41), где δ — известный, а μ — неизвестный малые параметры. Предположим, что пересечение спектра оператора A с мнимой осью состоит из пары собственных значений $\mp i\omega_0$ $(\omega_0 > 0)$, которые будем считать простыми [1].

Вектор-функцию $\mathbf{v}$ ищем в виде

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{u}(\tau) + \alpha e^{i\tau}\varphi + \alpha^* e^{-i\tau}\varphi^* \tag{2.18}$$

Постоянную α определим однозначно требованием

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{u}(\tau), \Phi)_H e^{-i\tau}\, d\tau = 0 \tag{2.19}$$

Так как уравнение (1.5) не содержит явно времени, вместе с периодическим решением $\mathbf{v}$ оно имеет также периодическое решение $\mathbf{v}_h : \mathbf{v}_h(\tau) = \mathbf{v}(\tau + h)$ при любом вещественном h. Фазу h зафиксируем требованием, чтобы постоянная α была положительной (в противном случае достаточно было бы от $\mathbf{v}$ перейти к $\mathbf{v}_h$ при $h = -\arg\alpha$). Итак, решение $\mathbf{v}$ можно искать в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \alpha\psi, \qquad \psi = e^{i\tau}\varphi + e^{-i\tau}\varphi^*, \qquad \alpha > 0 \tag{2.20}$$

где $\mathbf{u}$ удовлетворяет условию (2.19). Подставляя (2.20) в (1.41), получаем

$$D\mathbf{u} \equiv \omega_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + A\mathbf{u} = -\mu \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} - \mu \frac{d\psi}{d\tau}\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k B_k(\mathbf{u} + \alpha\psi) + K(\mathbf{u} + \alpha\psi) \tag{2.21}$$

Обозначим через $H_2{}^\circ$, $H_0{}^1$ подпространства в H_2 и H', определяемые условием (2.19). Будем рассматривать D как оператор из $H_2{}^\circ$ в $H_0{}'$.

[1] Не составляет труда выписать систему уравнений разветвления в общем случае.

В силу леммы 2.1 (или 2.2) существует ограниченный обратный оператор D^{-1}.

Обозначим через P проектор в H' на подпространство H_0'

$$Pu = u - \varphi e^{i\tau}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(s), \Phi)e^{-is}ds - \varphi^* e^{-i\tau}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(s), \Phi^*)e^{is}ds \quad (2.22)$$

Задача определения u, α из уравнений (2.21) и (2.19) эквивалентна следующей:

$$u = D^{-1}P\left\{-\mu\frac{du}{d\tau} - \mu\alpha\frac{d\psi}{d\tau} - \sum_{k=1}^{\infty}\delta^k B_k(u+\alpha\psi) + K(u+\alpha\psi)\right\} \equiv D^{-1}Pf \quad (2.23)$$

$$(I-P)\left\{-\mu\frac{du}{d\tau} - \mu\alpha\frac{d\psi}{d\tau} - \sum_{k=1}^{\infty}\delta^k B_k(u+\alpha\psi) + K(u+\alpha\psi)\right\} = 0 \quad (2.24)$$

Правая часть уравнения (2.23) представляет собой непрерывный в H_2° оператор, аналитически зависящий от (δ, α, μ) и равный нулю при $\delta = \alpha = \mu = 0$. Поэтому, согласно теореме о неявной функции, уравнение (2.23) можно разрешить относительно u. При этом решение аналитически зависит от δ, α, μ в окрестности точки (0, 0, 0) и однозначно определяется требованием: $u = 0$ при $\delta = \alpha = \mu = 0$. Его нетрудно найти методом неопределенных коэффициентов, подставляя в (2.23) ряд

$$u = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} u_{klm}\delta^k\alpha^l\mu^m; \qquad u_{000} = 0 \quad (2.25)$$

Таким способом получаем, что члены первой степени в (2.25) отсутствуют: $u_{100} = u_{010} = u_{001} = 0$; далее $u_{200} = u_{101} = u_{011} = u_{002} = 0$ и среди членов второй степени могут быть отличны от нуля только u_{110} и u_{020}

$$u_{110} = -D^{-1}PB_1\psi, \qquad u_{020} = D^{-1}PK\psi = D^{-1}K\psi \quad (2.26)$$

Выпишем коэффициенты при членах третьей степени:

$$u_{300} = u_{201} = u_{102} = u_{012} = u_{003} = 0$$
$$u_{210} = -D^{-1}P(B_1u_{110} + B_2\psi), \qquad u_{120} = D^{-1}P(-B_1u_{020} + K_{20}^\circ(u_{110}, \psi))$$
$$u_{111} = -du_{110}/d\tau, \qquad u_{030} = K_{20}^\circ(u_{020}, \psi)$$
$$u_{021} = -du_{020}/d\tau \quad (2.27)$$

Приведем еще для примера выражение коэффициента u_{040}

$$u_{040} = D^{-1}P(K_{20}^\circ(u_{020}, u_{020}) + K_{20}^\circ(u_{020}, \psi)) \quad (2.28)$$

Вообще для коэффициента u_{0l0} ($l = 3, 4, \ldots$) имеем

$$u_{0l0} = D^{-1}P(K_{20}^\circ(u_{0,l-1,0}, \psi) + \sum_{r=2}^{l-2} K_{20}^\circ(u_{0r0}, u_{0,l-r,0})) \quad (2.29)$$

Заметим еще, что $\mathbf{u}_{k0m} = 0$ (k, $m = 0, 1, \ldots$). Действительно, при $\alpha = 0$ искомое решение уравнения (2.23) обращается, очевидно, в нуль.

Теперь, подставляя разложение (2.25) в (2.24), получим уравнение разветвления в виде

$$g(\delta, \alpha, \mu) = 0 \tag{2.30}$$

Здесь g — комплекснозначная функция, так что (2.30) представляет систему двух уравнений с двумя неизвестными α, μ, Функция g аналитична по δ, α, μ в окрестности точки (0, 0, 0), и ее разложение в ряд Тэйлора имеет вид

$$g(\delta, \alpha, \mu) \equiv \sum_{k,l,m=0}^{\infty} g_{klm} \delta^k \alpha^l \mu^m, \qquad g_{klm} = (\mathbf{f}_{klm}, \Phi e^{i\tau})_{H'} \tag{2.31}$$

где $\mathbf{f}_{klm}$ — коэффициент при $\delta^k \alpha^l \mu^m$ в тэйлоровском разложении выражения в фигурных скобках в (2.23), (2.24). Нетрудно увидеть, что g есть нечетная функция переменной α: замена $\tau \to \tau + \pi$, $\alpha \to -\alpha$ не меняет уравнения (2.23), а левую часть уравнения (2.24) превращает в противоположное число.

Теперь, учитывая (2.25) — (2.28), можем записать уравнение разветвления (2.30) в виде

$$\begin{aligned} g(\delta, \alpha, \mu) \equiv &-2\pi i \alpha\mu - \delta\alpha (B_1 \psi, \Phi e^{i\tau})_{H'} - \delta^2 \alpha (B_1 \mathbf{u}_{110} + B_2 \psi, \Phi e^{i\tau})_{H'} + \\ &+ \alpha^3 (K_{20}{}^\circ (\mathbf{u}_{020}, \psi), \Phi e^{i\tau})_{H'} + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

где опущены члены четвертой степени и выше по δ, α, μ.

Коэффициентам уравнения (2.32) можно придать более простой вид, выполняя интегрирование по времени. Например, имеем

$$g_{110} = -(B_1 \psi, \Phi e^{i\tau})_{H'} = -\int_0^{2\pi} (B_1 \varphi e^{i\tau} + B_1 \varphi^* e^{i\tau}, \Phi)_H e^{-i\tau} d\tau = -2\pi (B_1 \varphi, \Phi)_H \tag{2.33}$$

$$g_{210} = -2\pi (B_2 \varphi, \Phi)_H + 2\pi (B_1 \mathbf{W}, \Phi)_H \tag{2.34}$$

где вектор $\mathbf{W}$ есть решение уравнения

$$(A + i\omega_0 I) \mathbf{W} = B_1 \varphi - (B_1 \varphi, \Phi)_H \varphi, \qquad (\mathbf{W}, \Phi)_H = 0 \tag{2.35}$$

Далее, из (2.26) следует, что вектор-функция $\mathbf{u}_{020}$ имеет вид

$$\mathbf{u}_{020} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{z} e^{2i\tau} + \mathbf{z}^* e^{-2i\tau} \tag{2.36}$$

где векторы $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}$ определяются равенствами

$$\mathbf{z}_0 = A^{-1} K_{20}{}^\circ (\varphi, \varphi^*) \tag{2.37}$$

$$\mathbf{z} = (A + 2i\omega_0 I)^{-1} K_{20} (\varphi, \varphi) \tag{2.38}$$

Используя выражение (2.36), получаем

$$g_{030} = 2\pi (K_{20}{}^\circ (\mathbf{z}_0, \varphi) + K_{20}{}^\circ (\mathbf{z}, \varphi^*), \Phi)_H \tag{2.39}$$

Анализируя уравнение разветвления, можно узнать число ответвляющихся циклов, а также выяснить их аналитические свойства по параметру

δ (для каждого из них α и μ, а в силу (2.25) и $\mathbf{u}$, суть ряды по дробным степеням параметра δ).

Следующая теорема дает условия, при которых существование цикла можно установить, рассматривая лишь линеаризованное уравнение.

Теорема 2.1. Пусть γ_0 — критическое значение параметра γ, и оператор A (см. (1.4)) имеет пару чисто мнимых простых[1] собственных значений $\mp i\omega_0 \neq 0$.

Пусть при этом среди чисел $in\omega$ (n — целое число, $n \neq \mp 1$) нет собственных значений оператора A. Пусть выполняется условие

$$\operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi)_H \neq 0 \tag{2.40}$$

Тогда γ_0 есть точка ответвления цикла. При этом имеются лишь две возможности: либо существует единственный нормальный односторонний цикл, либо при $\gamma=\gamma_0$; $\omega=\omega_0$ уравнение (1.5) имеет однопараметрическое семейство 2π-периодических решений $\{\mathbf{v}_\alpha\}$; $\mathbf{v}_0=0$, зависящее аналитически от малого параметра α; если при этом $\gamma - \gamma_0$ достаточно мало, но отлично от нуля, то уравнение (1.5) не имеет малых периодических решений.

Доказательство. Сокращая (2.32) на $2\pi\alpha$, получим уравнение

$$h(\delta, \alpha^2, \mu) \equiv i\mu + (B_1\varphi, \Phi)_H\delta + \ldots = 0 \tag{2.41}$$

где опущены члены степени выше первой по δ, α, μ.

Полагая $\operatorname{Re} h = h_r$, $\operatorname{Im} h = h_i$ и вычисляя якобиан, получаем

$$\left.\frac{\partial(h_r, h_i)}{\partial(\delta, \mu)}\right|_{\alpha=\delta=\mu=0} = \operatorname{Im}\left.\frac{\partial h}{\partial\mu}\frac{\partial h^*}{\partial\delta}\right|_{\alpha=\delta=\mu=0} = \operatorname{Re}(B_1\varphi, \Phi)_H \neq 0 \tag{2.42}$$

Отсюда по теореме о неявной функции, заключаем, что при достаточно малом $|\alpha|$ уравнение (2.41) можно разрешить относительно δ, μ: существуют аналитические функции $\delta = \theta(\alpha^2)$, $\mu = \rho(\alpha^2)$, обращающие (2.41) в тождество и однозначно определяемые требованием: $\theta(0) = \rho(0) = 0$.

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\alpha_n \to 0$ и построим соответствующие последовательности

$$\delta_n = \theta(\alpha_n^2) \to 0, \qquad \mu_n = \rho(\alpha_n^2) \to 0, \qquad \omega_n = \omega_0 + \mu_n$$

Тогда ряд (2.25) даст соответствующее решение уравнения (2.21), а формула (2.20) — решение уравнения (1.5) — очевидно, ненулевое, так как $\alpha_n > 0$. Таким образом, доказано, что γ_0 — точка ответвления цикла.

Если левая часть уравнения (2.41) не зависит от α, то единственное малое решение уравнения (2.41) есть, очевидно, $\mu = \delta = 0$. При этом величина α остается произвольной, и если α достаточно мало, ряд (2.25) представляет решение уравнения (2.23) при $\delta = \mu = 0$. Итак, в этом случае реализуется вторая возможность, указанная в теореме 2.1[2]. Пусть теперь левая часть уравнения (2.41) зависит от α. Разложим функцию

---

[1] Напомним, что это означает не только единственность собственных векторов φ, φ^*, отвечающих собственным значениям $-i\omega_0$ и $i\omega_0$, но также отсутствие присоединенных векторов, что приводит к условию $(\varphi, \Phi)_H \neq 0$ (см. (1.11)).

[2] Конечно, этот случай — исключительный. Например, он имеет место, если $K\psi = 0$. Возможно ли это для уравнений Навье — Стокса, неизвестно. Привести примеры нелинейных операторов с этим свойством, разумеется, не составляет труда.

θ в ряд Тэйлора и попытаемся при малых δ разрешить относительно α уравнение

$$\delta = \theta(\alpha^2) = c_m \alpha^{2m} + c_{m+1}\alpha^{2(m+1)} + \ldots \tag{2.43}$$

При этом считаем, что $c_m \neq 0$; $m \geqslant 1$. Если $c_m > 0$ ($c_m < 0$), то уравнение (2.43) имеет единственный малый положительный корень α при $\delta > 0$ ($\delta < 0$) и не имеет малых вещественных корней при $\delta < 0$ ($\delta > 0$). В обоих случаях имеем

$$\alpha = \left(\frac{\delta}{c_m}\right)^{1/2m}\left[1 - \frac{c_{m+1}}{2mc_m}\left(\frac{\delta}{c_m}\right)^{1/m} + \ldots\right] \tag{2.44}$$

В квадратной скобке стоит ряд по степеням параметра $(\delta/c_m)^{1/m}$.

Для доказательства представления (2.44) достаточно применить теорему о неявной функции к уравнению, полученному из (2.43) делением на c_m и извлечением из обеих частей корня степени $2m$.

Итак, единственность и односторонность цикла в этом случае установлены. То, что он нормальный, очевидно, так как $\omega_n = \omega_0 + \mu_n \to \omega_0$. Теорема 2.1 доказана.

Для более детального исследования существования малых циклов, их числа и аналитических свойств, необходимо учесть нелинейные члены. Типичный и простейший случаи описываются следующим утверждением.

Теорема 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1. Пусть выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\, g_{030} \equiv \mathrm{Re}\,(K_{20}{}^{\circ}(u_{020}, \psi), \Phi e^{i\tau})_{H'} \neq 0 \tag{2.45}$$

Тогда γ_0 есть точка ответвления единственного нормального одностороннего цикла, который существует при малых $\delta > 0$ ($\delta < 0$), если $\mathrm{Re}\, g_{030} / \mathrm{Re}\, g_{110} < 0$ (> 0) и представляет собой аналитическую функцию параметра $\sqrt{\delta}$ ($\sqrt{-\delta}$); величина μ — аналитическая функция от δ. При этом имеем

$$\alpha = \left(-\frac{\mathrm{Re}\, g_{110}}{\mathrm{Re}\, g_{030}}\delta\right)^{1/2} + O(\delta)$$
$$\mu = \frac{1}{2\pi}\delta\left(\mathrm{Im}\, g_{110} - \mathrm{Re}\, g_{110}\frac{\mathrm{Im}\, g_{030}}{\mathrm{Re}\, g_{030}}\right) + O(\delta^2) \tag{2.46}$$

Величины g_{110} и g_{030} определены равенствами (2.33) и (2.39).

Доказательство. Обратимся снова к уравнению (2.41). Выписывая явно члены первой степени по δ, α^2, μ, имеем

$$h(\delta, \alpha^2, \mu) \equiv i\mu - \frac{1}{2\pi} g_{110}\delta - \frac{1}{2\pi} g_{030}\alpha^2 + \ldots = 0 \tag{2.47}$$

Уравнение (2.47) можно разрешить относительно α^2, μ: существуют функции $\alpha^2 = \xi(\delta)$; $\mu = \eta(\delta)$, аналитические в точке $\delta = 0$, обращающие уравнение (2.47) в тождество и однозначно определяемые требованием $\xi(0) = \eta(0) = 0$. Это следует из теоремы о неявной функции, так как условие (2.45) влечет за собой неравенство

$$\left.\frac{\partial(h_r, h_i)}{\partial(\alpha^2, \mu)}\right|_{\alpha=\delta=0} = \mathrm{Im}\left.\frac{\partial h}{\partial\mu}\frac{\partial h^*}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=\delta=0} = \mathrm{Im}\, i g_{030} = \mathrm{Re}\, g_{030} \neq 0 \tag{2.48}$$

Далее из (2.48) получаем

$$\xi'(0) = -\frac{\mathrm{Re}\, g_{110}}{\mathrm{Re}\, g_{030}}, \quad \eta'(0) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\, g_{110} + \frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\, g_{030}\,\xi'(0)$$

отсюда сразу следуют соотношения (2.46). Теорема 2.2, таким образом, доказана.

Уравнение разветвления (2.32) нетрудно проанализировать и в различных исключительных случаях. Действительно, согласно теореме о неявной функции, из уравнения $h_i(\delta, \alpha^2, \mu) = 0$ можно выразить μ в виде ряда по степеням δ, α^2, потому что $(\partial/\partial\mu)h_i\ (0, 0, 0) = 1 \neq 0$. Подставляя этот ряд в уравнение $h_r(\delta, \alpha^2, \mu) = 0$, придем к одному уравнению $f(\delta, \alpha^2) = 0$. Полный анализ последнего можно провести, как известно, при помощи диаграммы Ньютона. Таким путем легко доказать, например, что в условиях теоремы 2.1, если $\operatorname{Re} g_{030} = 0$, но

$$\operatorname{Re} g_{050} \equiv \operatorname{Re}\left(K_{20}^\circ(\mathbf{u}_{040}, \psi) + 2K_{20}^\circ(\mathbf{u}_{020}, \mathbf{u}_{030}), \Phi e^{i\tau}\right)_{H'} \neq 0 \tag{2.49}$$

то ответвляется единственный, нормальный, односторонний цикл, аналитически зависящий от $\delta^{1/4}$ или $(-\delta)^{1/4}$, причем μ зависит аналитически от $\delta^{1/2}$ или $(-\delta)^{1/2}$ и

$$\alpha = \left(-\frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{050}}\delta\right)^{1/4} + O(\delta^{3/4}) \tag{2.50}$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im} g_{030}\left(-\frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{050}}\delta\right)^{1/2} + \frac{1}{2\pi}\delta\left(\operatorname{Im} g_{110} - \frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{050}}\operatorname{Im} g_{050}\right) + O(\delta^{3/2})$$

Рассмотрим еще один случай, когда $\operatorname{Re} g_{110} = 0$, и условие (2.40) не выполняется. Исключим μ из уравнения (2.47), пользуясь его выражением в виде ряда по степеням δ, α^2

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im} g_{110}\,\delta + \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im} g_{030}\alpha^2 + \ldots \tag{2.51}$$

где опущены члены степени выше первой по δ, α^2. Тогда для определения α получаем уравнение

$$\operatorname{Re} g_{030}\alpha^2 + \operatorname{Re} g_{210}\delta^2 + \ldots = 0 \tag{2.52}$$

где опущенные члены имеют порядок не ниже третьего относительно δ, α. Теперь ясно, что малых циклов не существует, если

$$\operatorname{Re} g_{030}\operatorname{Re} g_{210} > 0 \tag{2.53}$$

Это полностью выясняет роль условия (2.40) в теореме 2.1; оно необходимо и достаточно для того, чтобы при выполнении прочих условий теоремы, критическое значение γ_0 было точкой ответвления цикла при «произвольных» чисто нелинейном операторе K и линейных операторах B_1, B_2.

Если вместо (2.53), имеет место противоположное неравенство

$$\operatorname{Re} g_{030}\operatorname{Re} g_{210} < 0 \tag{2.54}$$

то из (2.52) непосредственно следует, что существует единственный, нормальный, двусторонний цикл, для которого

$$\alpha = \left(-\frac{\operatorname{Re} g_{210}}{\operatorname{Re} g_{030}}\right)^{1/2}\delta + O(\delta^2) \tag{2.55}$$

§ 3. Обобщение. В предыдущем изложении лишь в малой мере были использованы свойства уравнений Навье — Стокса, а потому нетрудно провести обобщение на довольно широкий класс обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, включающий многие задачи математической физики, например, нелинейные параболические уравнения, уравнения магнитной гидродинамики и т. п. Заметим еще, что предположение об аналитичности по параметру δ и введенное ниже предположение об аналитичности по u могут быть ослаблены: достаточно потребовать существования нескольких непрерывных производных (в случае теорем 2.1 и 3.1 — всего лишь первых).

Итак, будем разыскивать ненулевые 2π-периодические решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega \frac{dv}{d\tau} + Av = K(v, \delta) \tag{3.1}$$

в банаховом пространстве X при следующих предположениях.

1°. A — линейный оператор производящий оператор аналитической полугруппы. Пересечение его спектра с мнимой осью состоит из пары простых полюсов $\mp i\omega_0 \neq 0$.

Для собственных векторов операторов A и A^* сохраним прежние обозначения (1.6), (1.10).

Пусть W_p — банахово пространство 2π-периодических вектор-функций параметра τ со значениями в X, имеющих конечную норму

$$\|v\|_{W_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\left\| \frac{dv(\tau)}{d\tau} \right\|_X^p + \|Av(\tau)\|_X^p \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} + \max_\tau \|v(\tau)\|_X \tag{3.2}$$

Здесь $p > 1$ — некоторое число.

2°. Предположим, что при любом $\omega \mp \omega_0$; $f \in L_p([0, 2\pi], X)$ уравнение

$$\omega \frac{du}{dt} + Au = f \tag{3.3}$$

имеет единственное 2π-периодическое решение $u = L_\omega f$ и оператор L_ω действует из $L_p([0, 2\pi], X)$ в W_p непрерывно (коэрцитивность).

3°. Нелинейный оператор K при любом достаточно малом δ действует вполне непрерывно из W_p в $L_p([0, 2\pi], X)$ и является аналитическим по совокупности v, δ в окрестности нуля пространства $X \times R$. Его тэйлоровское разложение пусть имеет вид

$$K(v, \delta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} v^m \delta^n, \qquad K_{10} = 0 \tag{3.4}$$

Здесь использовано обозначение

$$K_{mn} v^m = K_{mn}(v, v, \ldots, v) \tag{3.5}$$

где K_{mn} — оператор, линейный по каждому из своих аргументов.

Положим:

$$K_{1n} = -B_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

В рассмотренном выше случае уравнений Навье — Стокса $X = H$; $p = 2$; $W_p = H_2$; B_m, K_{20} даются равенствами (1.4); остальные операторы K_{mn} равны нулю.

Условия 1—3 позволяют перенести предыдущие результаты на общий случай. Доказательства при этом не изменяются; по-прежнему дело сводится к уравнению разветвления вида (2.30). Поэтому ограничимся формулировкой теорем.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 1—3 и

$$\operatorname{Re}(B_1\ \varphi,\ \Phi) \neq 0 \tag{3.6}$$

Тогда $\delta = 0$ есть точка ответвления цикла. При этом либо существует единственный нормальный односторонний цикл, либо при $\delta = 0$; $\omega = \omega_0$ уравнение (3.1) имеет аналитическое по малому параметру α семейство 2π-периодических решений $\{v_\alpha\}$; $v_0{}^\Gamma = 0$, а при малых $\delta \neq 0$ ненулевых 2π-периодических решений не существует [1].

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} g_{030} = \operatorname{Re}(K_{20}{}^\circ(\varphi, z_0) + K_{20}{}^\circ(\varphi^*, z) + K_{30}{}^\circ(\varphi, \varphi, \varphi^*), \Phi) \neq 0 \tag{3.7}$$

$$K_{30}{}^\circ(u,\ u,\ v) = K_{30}(v,\ u,\ u) + K_{30}(u,\ v,\ u) + K_{30}(u,\ u,\ v)$$

Тогда $\delta = 0$ есть точка ответвления единственного нормального одностороннего цикла, который представляет собой аналитическую функцию параметра $\sqrt{\delta}$ или $\sqrt{-\delta}$; величина $\mu = \omega - \omega_0$ — аналитическая функция от δ. При этом

$$v = \left(-\frac{\operatorname{Re} g_{110}}{\operatorname{Re} g_{030}}\delta\right)^{1/2}\psi + O(\delta)$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\delta\left(\operatorname{Im} g_{110} - \operatorname{Re} g_{110}\frac{\operatorname{Im} g_{030}}{\operatorname{Re} g_{030}}\right) + O(\delta^2) \tag{3.8}$$

Переносятся на общий случай и выводы, изложенные в конце предыдущего параграфа, лишь несколько усложняются выражения для коэффициентов g_{klm}.

Поступила 22 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред, изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.
3. М о н и н А. С., Я г л о м А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
4. M e k s y n D., S t u a r t J. T. Stability of viscous motion between parallel planes fot finite disturbances. Proc. Roy. Soc. A 208, 1951, No. 1095, pp. 517—526.
5. S t u a r t J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, No. 1, pp. 1—21.
6. S t u a r t J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt. 1, I. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 3, pp. 353—370.

[1] Теорема переносится и на тот случай, когда на мнимой оси кроме $\mp i\omega_0$ есть другие точки спектра — лишь бы среди них не было $in\omega_0$ ($n = 0,\ \mp 2,\ \mp 3, \ldots$). Надо только иметь в виду, что утверждения об единственности и несуществовании будут относиться тогда не к любым циклам, а только к тем, для которых $\omega \to \omega_0$ при $\delta \to 0$. Если имеется несколько пар чисто мнимых собственных значений $\mp\omega_{01}, \mp\omega_{02}, \ldots, \mp i\omega_{0p}$ и числа ω_{0j}, ω_{0k} при $k \neq j$ несоизмеримы, то теоремы 3.1 и 3.2 приводят к условиям возникновения p циклов.

7. W a t s o n J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt. 2. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 3, pp. 371—383.
8. В а й н б е р г М. М., Т р е н о г и н В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
9. К р а с н о с е л ь с к и й М. А., В а й н и к к о Г. М., З а б р е й к о П. П., Р у т и ц к и й Я. Б., С т е ц е н к о В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
10. Н е й м а р к Ю. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 4.
11. Б р у ш л и н с к а я Н. Н. Качественное интегрирование одной системы n дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1.
12. Б р у ш л и н с к а я Н. Н. О предельных циклах уравнений движения твердого тела и галеркинских уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5.
13. Б р у ш л и н с к а я Н. Н. О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 4.
14. Б р у ш л и н с к а я Н. Н. О рождении периодического течения и тора из ламинарного течения. Сб. «Некоторые вопросы механики горных пород», М., 1968, стр. 57—79.
15. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
16. Ю д о в и ч В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
17. Ю д о в и ч В. И. О бифуркации вращательных течений жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 169, № 2.
18. Ю д о в и ч В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде. Матем. сб., 1967, 74 (116), № 4, стр. 565—579
19. Ю д о в и ч В. И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.
20. В о р о в и ч И. И., Ю д о в и ч В. И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, 53 (95), № 4, стр. 393—428.