

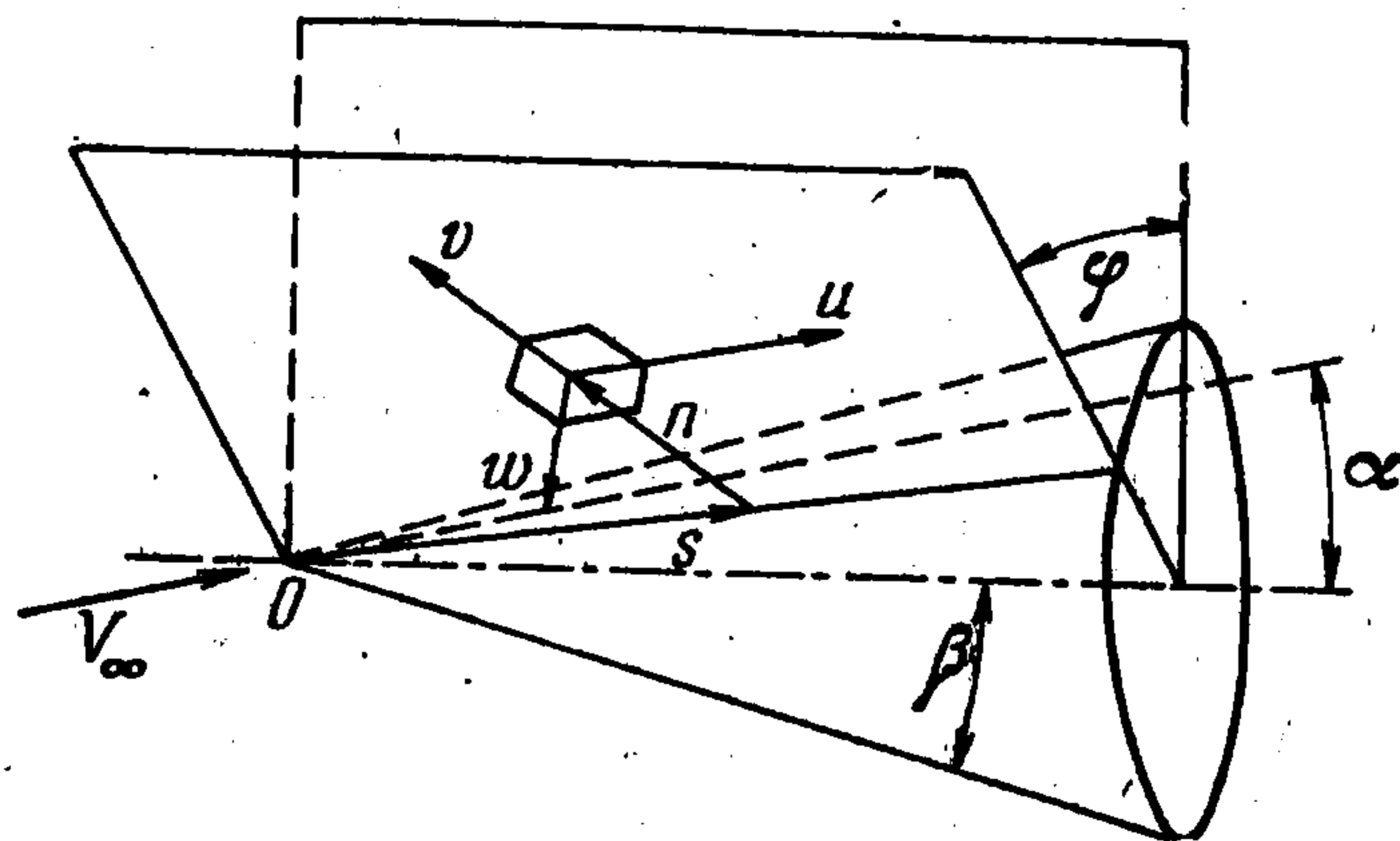
ОБ ОДНОМ ТИПЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ВНЕШНЕГО (НЕВЯЗКОГО) ПОТОКА ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Б. М. Булах

(Ленинград)

Рассматривается задача о несимметричном стационарном обтекании кругового конуса однородным сверхзвуковым потоком вязкого газа при больших числах Рейнольдса R . В работе [1] показано, что во многих случаях решение задачи обтекания конуса невязким потоком таково, что производные по нормали к поверхности конуса от плотности (температуры) и составляющей скорости частиц газа, касательной к поверхности конуса, обращаются на ней в бесконечность. В этих случаях из условия сопряжения решения задачи обтекания конуса невязким потоком (которое рассматривается как первый член асимптотического разложения решения полной задачи по степеням $\varepsilon = R^{-1/2}$ вне погранслоя) с решением задачи в пограничном слое следует, что в последнем решении появляются дополнительные члены, которые могут дать существенную поправку к результатам обычной теории погранслоя. Показано (в случае ламинарного пограничного слоя), что эти дополнительные члены автомодельны, и дана строгая постановка задачи для их определения.

1. Рассмотрим стационарное обтекание кругового конуса с полураствором β однородным сверхзвуковым потоком вязкого газа под углом атаки α . В системе координат, в которой s отсчитывается от вершины конуса вдоль образующей тела, n — по нормали к нему, а угол φ определяет меридиональную плоскость (фигура), уравнения неразрывности, количества движения (уравнения Навье — Стокса), энергии и уравнение состояния газа имеют вид



$$\left(\frac{\rho u}{h}\right)_s + \left(\frac{\rho v}{h}\right)_n + (\rho w)_\varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \{ \rho [u u_s + v u_n + h w (u_\varphi - \sin \beta w)] + p_s \} = & \{ (\lambda + 2\mu) u_s + \\ & + \lambda [v_n + h (w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta)] \}_s + \{ \mu (v_s + u_n) \}_n + \\ & + h \{ \mu [h (u_\varphi - w \sin \beta) + w_s] \}_\varphi + \mu h \{ 2 \sin \beta [u_s - \\ & - h (w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta)] + \cos \beta (v_s + u_n) \} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \{ \rho [u w_s + v w_n + h w (w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta)] + h p_\varphi \} = & \{ \mu [h (u_\varphi - w \sin \beta) + \\ & + w_s] \}_s + \{ \mu [w_n + h (v_\varphi - w \cos \beta)] \}_n + h \{ (\lambda + 2\mu) h (w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta) + \\ & + \lambda (v_n + u_s) \}_\varphi + 2h\mu \{ \sin \beta [h (u_\varphi - w \sin \beta) + w_s] + \cos \beta [h (v_\varphi - w \cos \beta) + w_n] \} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} \{ \rho [uv_s + vv_n + hw(v_\varphi - \cos \beta w)] + p_n \} = & [\mu(v_s + u_n)]_s + \\ & + \{ (\lambda + 2\mu)v_n + \lambda [u_s + h(w_s + u \sin \beta + v \cos \beta)] \}_n + \\ & + h \{ \mu [w_n + h(v_\varphi - w \cos \beta)] \}_\varphi + \mu h \{ \sin \beta (v_s + u_n) + \\ & + 2 \cos \beta [v_n - h(w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta)] \} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} [\rho (uT_s + vT_n + whT_\varphi) - (up_s + vp_n + whp_\varphi)] = \\ = \sigma^{-1} [(\mu T_s)_s + (\mu T_n)_n + h^2 (\mu T_\varphi)_\varphi] + \Phi \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \mu \{ 2 [u_s^2 + v_n^2 + h^2 (w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta)^2] + \\ + (v_s + u_n)^2 + [w_n + h(v_\varphi - w \cos \beta)]^2 + [w_\varphi + h(u_\varphi - w \sin \beta)]^2 + \\ + \lambda [u_s + v_n + h(w_\varphi + u \sin \beta + v \cos \beta)]^2 \} \end{aligned}$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T, \quad \mu = \mu(T), \quad \lambda = \lambda(T)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad R = \frac{V_0 l_0 \rho_0}{\mu_0}, \quad h = (s \sin \beta + n \cos \beta)^{-1} \quad (1.6)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости в направлении увеличения s, n, φ соответственно; ρ — плотность, p — давление, T — температура, σ — число Прандтля, μ, λ — коэффициенты вязкости, γ — адиабатический индекс, R — число Рейнольдса, построенное по характерным параметрам потока; производные обозначены индексами, например $u_n = \partial u / \partial n$. В уравнениях (1.1) — (1.6) все длины отнесены к l_0 , скорости — к V_0 , плотность — к ρ_0 , давление — к $\rho_0 V_0^2$, температура — к $T_0 = V_0^2 c_p^{-1}$ (c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении), коэффициенты вязкости — к μ_0 . Обозначения для безразмерных величин сохранены те же, что и для размерных.

2. При решении задачи обтекания тел в случае $\varepsilon \ll 1$ различают пограничный слой — область толщиной $O(\varepsilon)$, непосредственно прилегающую к поверхности тела, и область «внешнего потока». В последней области решение системы уравнений (1.1) — (1.6) ищется в простейшем случае в виде асимптотического разложения

$$f(s, n, \varphi, \varepsilon) \sim F_1(s, n, \varphi) + \varepsilon F_2(s, n, \varphi) + \dots \quad (2.1)$$

Здесь под f понимаются u, v, w, p, ρ, T . В области пограничного слоя, где силы вязкости имеют такой же порядок, что и силы инерции, вводится переменная $N = n\varepsilon^{-1}$, и решение ищется в виде асимптотического разложения

$$\begin{aligned} f(s, n, \varphi, \varepsilon) \sim f_1(s, N, \varphi) + \varepsilon f_2(s, N, \varphi) + \dots \\ v \sim \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где под f подразумеваются u, w, p, ρ, T . Уравнения для первых членов разложения (2.1) есть уравнения Эйлера, уравнения для первых членов разложения (2.2) — уравнения пограничного слоя Прандтля. Полное решение задачи получается путем сопряжения разложений (2.1), (2.2) в некоторой области перекрытия [2].

3. Для рассматриваемого случая кругового конуса члены $F_1(s, n, \varphi)$ в разложении (2.1), соответствующие решению задачи обтекания конуса

невязким потоком, в окрестности поверхности конуса ($n = 0$) имеют (для конического течения) вид [1]

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* + A(n/s)^B + \dots, & p &= p^* + \rho^* w^{*2} \operatorname{ctg} \beta (n/s) + O[(n/s)^{B+1}] \\ u &= u^* + D\left(\frac{n}{s}\right)^B + \dots, & v &= -\left[u^* + \frac{1}{\rho^* \sin \beta} (\rho^* w^*)_{\varphi}\right] \left(\frac{n}{s}\right) + O\left[\left(\frac{n}{s}\right)^{B+1}\right] \\ w &= w^* + \frac{1}{w^*} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*}{\rho^{*2}} A - u^* D\right) \left(\frac{n}{s}\right)^B + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $f^* = f^*(\varphi) = f(n/s, \varphi)/_{n=0}$ (многоточиями обозначены члены более высокого порядка малости по n/s , чем выписанные), A и D — некоторые функции φ , постоянная B определяется по формуле

$$B = \frac{2\tau}{2 + \tau}, \quad \tau = \frac{u_{\varphi\varphi}^*(\pi)}{u^*(\pi) \sin^2 \beta} \quad (3.2)$$

и в большинстве случаев $B < 1$. В дальнейшем рассматривается случай, когда $B < 1$.

4. При сопряжении разложений (2.1) и (2.2) в «области перекрытия» выражение (2.1) записывается при малых n , затем вместо n подставляется $n = N\varepsilon$; в результате должно получиться выражение (2.2), записанное при больших N . Подстановка $n = N\varepsilon$ в формулы (3.1) дает

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* + \varepsilon^B A (N/s)^B + \dots, & p &= p^* + O(\varepsilon) \\ u &= u^* + \varepsilon^B D (N/s)^B + \dots, & v &= O(\varepsilon) \\ w &= w^* + \varepsilon^B \frac{1}{w^*} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*}{\rho^{*2}} A - u^* D\right) (N/s)^B + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Первые слагаемые в (4.1), выписанные явно, дают граничные условия при больших N для членов $f_1(s, N, \varphi)$ в разложении (2.2), которые определяют обычное решение в пограничном слое. (Условие сопряжения v выполняется автоматически.) Вторые слагаемые в (4.1), имеющие порядок ε^B , указывают на то, что в случаях $B < 1$ разложение (2.2) должно быть заменено разложением

$$f(s, n, \varphi, \varepsilon) \sim f_1(s, N, \varphi) + \varepsilon^B f_2(s, N, \varphi) + \dots \quad (4.2)$$

Можно показать, что члены $f_2(s, N, \varphi)$ удовлетворяют линейным уравнениям, которые получаются методом возмущений из обычных уравнений пограничного слоя Прандтля.

При $B \ll 1$ величина ε^B не будет малой величиной (например, для $M_{\infty} = 7$, $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 5^\circ$, $B \approx 0.075$ и при $R = 10^6$, $\varepsilon^B \approx 0.6$), поэтому члены $O(\varepsilon^B)$ в (4.2) могут дать существенную поправку к результатам обычной теории пограничного слоя. Описанное выше взаимодействие невязкого потока и пограничного слоя похоже на вихревое взаимодействие при гиперзвуковых скоростях, но там причиной взаимодействия служит сильное искривление головной ударной волны, в то время как здесь простой физической причины возникновения указанного взаимодействия не видно.

5. Учитывая сказанное выше, а также то, что решение обычной задачи о пограничном слое для кругового конуса автотомельно [3], будем искать решение уравнений (1.1) — (1.6) в области пограничного слоя (вне неко-

торой окрестности вершины конуса) в виде

$$\begin{aligned} u &= u_1(\zeta, \varphi) + \varepsilon^B s^{-1/2} B u_2^\circ(\zeta, \varphi) + o(\varepsilon^B) \\ w &= w_1(\zeta, \varphi) + \varepsilon^B s^{-1/2} B w_2^\circ(\zeta, \varphi) + o(\varepsilon^B) \\ v &= \varepsilon s^{-1/2} [v_1^\circ(\zeta, \varphi) + \varepsilon^B s^{-1/2} B v_2^\circ(\zeta, \varphi) + o(\varepsilon^B)], \quad p = p_1(\varphi) + o(\varepsilon^B) \\ \rho &= \rho_1(\zeta, \varphi) + \varepsilon^B s^{-1/2} B \rho_2^\circ(\zeta, \varphi) + o(\varepsilon^B) \\ [T = t_1(\zeta, \varphi) + \varepsilon^B s^{-1/2} B t_2^\circ(\zeta, \varphi) + o(\varepsilon^B)], \quad \zeta = N s^{-1/2}, \quad N = n \varepsilon^{-1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Подстановкой разложений (5.1) в систему уравнений (1.1) — (1.6) и приравниванием членов одинакового порядка по ε получаем следующие системы уравнений для функций с индексами 1 и 2:

$$(\rho_1 w_1)_\varphi + \sin \beta [\rho_1 u_1 - 1/2 \zeta (\rho_1 u_1)_\zeta + (\rho_1 v_1^\circ)_\zeta] = 0 \quad (5.2)$$

$$\rho_1 \left[w_{1\zeta} (v_1^\circ - 1/2 \zeta u_1) + \frac{w_1}{\sin \beta} (w_{1\varphi} + u_1 \sin \beta) \right] + \frac{p_{1\varphi}}{\sin \beta} = (\mu_1 w_{1\zeta})_\zeta$$

$$\rho_1 \left[u_{1\zeta} (v_1^\circ - 1/2 \zeta u_1) + \frac{w_1}{\sin \beta} u_{1\varphi} - w_1^2 \right] = (\mu_1 u_{1\zeta})_\zeta$$

$$\rho_1 \left[t_{1\zeta} (v_1^\circ - 1/2 \zeta u_1) + \frac{w_1}{\sin \beta} t_{1\varphi} \right] - \frac{w_1}{\sin \beta} p_{1\varphi} = \sigma^{-1} (\mu_1 t_{1\zeta})_\zeta + \mu_1 (u_{1\zeta}^2 + w_{1\zeta}^2)$$

$$p_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_1 t_1, \quad \mu_1 = \mu(t_1), \quad p_{1\zeta} = 0$$

$$\begin{aligned} \sin \beta [(1 - 1/2 B) (\rho_1 u_2^\circ + u_1 \rho_2^\circ) - 1/2 \zeta (\rho_1 u_2^\circ + u_1 \rho_2^\circ)_\zeta + \\ + (\rho_1 v_2^\circ + \rho_2^\circ v_1^\circ)_\zeta] + (\rho_1 w_2^\circ + \rho_2^\circ w_1)_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_2^\circ \left[w_{1\zeta} (v_1^\circ - 1/2 \zeta u_1) + \frac{w_1}{\sin \beta} (w_{1\varphi} + u_1 \sin \beta) \right] + \rho_1 \left\{ -1/2 [B u_1 w_2^\circ + \right. \\ \left. + \zeta (u_1 w_{2\zeta}^\circ + u_2^\circ w_{1\zeta})] + v_1^\circ w_{2\zeta}^\circ + v_2^\circ w_{1\zeta} + \frac{w_2^\circ}{\sin \beta} (w_{1\varphi} + u_{1\varphi} \sin \beta) + \right. \\ \left. + \frac{w_1}{\sin \beta} (w_{2\varphi}^\circ + u_2^\circ \sin \beta) \right\} = (\mu_1 w_{2\zeta}^\circ)_\zeta + (\mu_t w_{1\zeta} t_2^\circ)_\zeta, \quad [\mu_t = \left(\frac{d\mu}{dT} \right)_{T=t_1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2^\circ \left[u_{1\zeta} (v_1^\circ - 1/2 \zeta u_1) + \frac{w_1}{\sin \beta} u_{1\varphi} - w_1^2 \right] + \rho_1 \left\{ -1/2 [B u_1 u_2^\circ + \right. \\ \left. + \zeta (u_1 u_{2\zeta}^\circ + u_{1\zeta} u_2^\circ)] + v_1^\circ u_{2\zeta}^\circ + v_2^\circ u_{1\zeta} + \frac{1}{\sin \beta} (w_1 u_{2\varphi}^\circ + w_2^\circ u_{1\varphi}) - \right. \\ \left. - 2 w_1 u_2^\circ \right\} = (\mu_1 u_{2\zeta}^\circ)_\zeta + (\mu_t t_2^\circ u_{1\zeta})_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2^\circ \left[t_{1\zeta} (v_1^\circ - 1/2 \zeta u_1) + \frac{w_1}{\sin \beta} t_{1\varphi} \right] + \rho_1 \left\{ -1/2 [B u_1 t_2^\circ + \right. \\ \left. + \zeta (u_1 t_{2\zeta}^\circ + u_2^\circ t_{1\zeta})] + v_1^\circ t_{2\zeta}^\circ + v_2^\circ t_{1\zeta} + \frac{1}{\sin \beta} (w_1 t_{2\varphi}^\circ + w_2^\circ t_{1\varphi}) \right\} - \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\sin \beta} p_{1\varphi} w_2^\circ = \sigma^{-1} [(\mu_1 t_{2\zeta}^\circ)_\zeta + (\mu_t t_2^\circ t_{1\zeta})_\zeta] +$$

$$+ 2 \mu_1 (u_{1\zeta} u_{2\zeta}^\circ + w_{1\zeta} w_{2\zeta}^\circ) + \mu_t t_2^\circ (u_{1\zeta}^2 + w_{1\zeta}^2)$$

$$\rho_2^\circ = - \frac{\rho_1}{t_1} t_2^\circ$$

Краевые условия для систем уравнений (5.2) и (5.3) следуют из условия обтекания конуса и формул (4.1) и имеют вид

$$\zeta = 0, \quad u_1 = v_1^\circ = w_1 = 0, \quad t_1 = T_w \quad (\text{или } t_1 \zeta = 0) \quad (5.4)$$

(T_w — температура поверхности конуса)

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow +\infty, \quad u_1 \rightarrow u^*(\varphi), \quad w_1 \rightarrow w^*(\varphi), \quad \rho_1 \rightarrow \rho^*(\varphi) \\ \left[t_1 \rightarrow \frac{p_1^*(\varphi)}{\rho_1^*(\varphi)} \frac{\gamma}{\gamma-1}, \quad v_1^\circ \sim O(\zeta) \right] \\ \zeta = 0, \quad u_2^\circ = v_2^\circ = w_2^\circ = 0, \quad t_2^\circ = 0 \quad (\text{или } t_2 \zeta^\circ = 0) \quad (5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow +\infty, \quad u_2^\circ \sim D(\varphi) \zeta^B, \quad \rho_2^\circ \sim A(\varphi) \zeta^B \\ w_2^\circ \sim \frac{1}{w^*(\varphi)} \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^*(\varphi)}{(\rho^*(\varphi))^2} A(\varphi) - u^*(\varphi) D(\varphi) \right] \zeta^B \\ \left[t_2^\circ \sim -\frac{t_1}{\rho_1} A \zeta^B, \quad v_2^\circ \sim O(\zeta^{B+1}) \right] \end{aligned}$$

6. Система уравнений (5.2) с краевыми условиями (5.4) определяет известное решение уравнений Прандтля для конуса. Численное интегрирование системы уравнений, эквивалентной системе уравнений (5.2) выполнено в [3]. Отметим, что система уравнений (5.2) рассматривалась в [3] как эволюционная, и роль времени играл угол φ . Параметры потока вначале находятся в плоскости $\varphi = \pi$, а затем при $0 < \varphi \leq \pi$. Системы уравнений (5.3) с краевыми условиями (5.5) также может рассматриваться как эволюционная, причем при $\varphi = \pi$

$$u_2^\circ = w_2^\circ = v_2^\circ = \rho_2^\circ = t_2^\circ = 0, \quad u_{2\varphi}^\circ = w_{2\varphi}^\circ = v_{2\varphi}^\circ = \rho_{2\varphi}^\circ = t_{2\varphi}^\circ = 0$$

Поступила 15 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. О вихревом слое на круговом конусе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости, М., «Мир», 1967.
3. Введенская Н. Д. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки. ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 2.