

## РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ КОНТУРА СОСТАВНОГО СОПЛА

А. Н. Крайко, Н. И. Тилляева

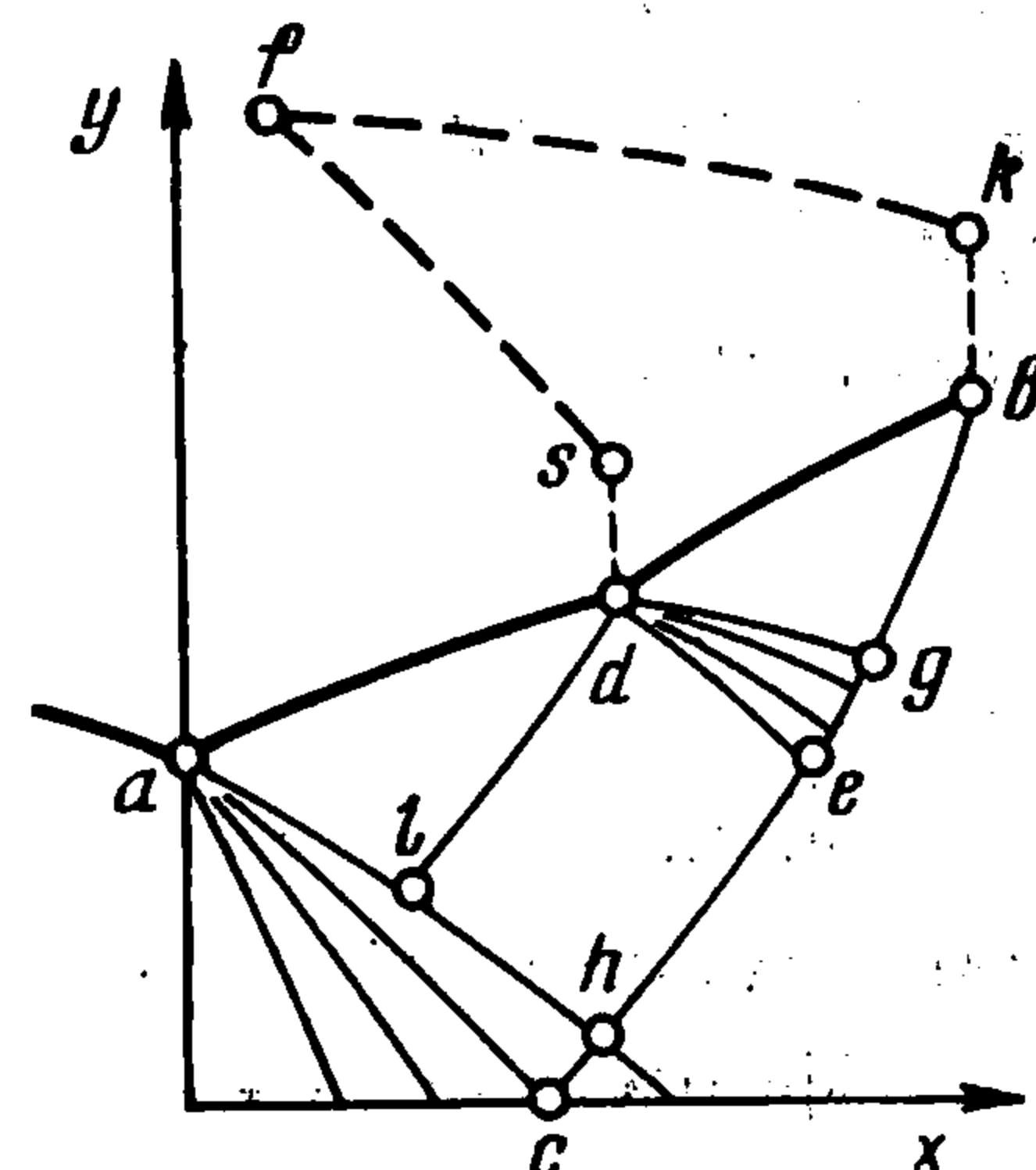
(Москва)

Решена вариационная задача о построении контура сверхзвуковой части оптимального составного сопла предназначенного для работы на двух существенно различных режимах. При этом полное сопло работает на режиме, который характеризуется большим перепадом давления. На режиме с меньшим перепадом концевой участок сопла убирается (или отстреливается). Задаются максимально допустимая длина полного сопла, противодействия, определяющие каждый режим, и вероятности использования полного сопла и его части. Оптимизация производится по средней тяге.

Получены необходимые условия, которые позволяют построить оптимальный контур, и развит соответствующий численный алгоритм, опирающийся на эти условия. Даны примеры оптимальных составных сопел, построенных с использованием указанного алгоритма, и проведено их сравнение с оптимальными сплошными соплами, рассчитанными на среднее противодействие. Выполнен анализ эволюции формы оптимального составного сопла во всем диапазоне возможных значений максимально допустимой длины.

Вопрос о возможности применения составного сопла обсуждается в работах [1,2]. Профилирование такого сопла не может быть проведено в соответствии с имеющимися решениями [3-5], и получение необходимых условий экстремума требует привлечения общего метода множителей Лагранжа. К решению вариационных задач газовой динамики указанный метод впервые был применен Гудерлеем и Армиейджем [6,7] и независимо, хотя и несколько позже, Т. К. Сиразетдиновым [8].

1. Рассмотрим плоское ( $\nu = 0$ ) или осесимметричное ( $\nu = 1$ ) сопло (фиг. 1), концевой участок которого  $db$  может отделяться от начального участка  $ad$ . Такое сопло будем называть составным. Пусть газ течет слева направо, а оси прямоугольной системы координат  $xu$ , которая в осесимметричном случае лежит в меридиональной плоскости течения, расположим так, чтобы начальная точка  $a$  искомого контура сопла лежала на оси  $y$ . Контур слева от  $a$  считается заданным, поэтому в общем случае точка  $a$  будет точкой излома (направление искомого контура справа от  $a$  не обязано совпадать с направлением заданного участка слева от  $a$ ). Ограничимся случаем, когда в той части области влияния искомого контура, которая лежит слева от характеристики  $hb$ , отсутствуют ударные волны.



Фиг. 1

Газ будем считать невязким и нетеплопроводным, а его энтропию и полную энтальпию при  $x = 0$  — заданными и постоянными по сечению.

В силу сделанных предположений эти величины сохраняются постоянными всюду слева от  $hb$ . Поэтому давление  $p$ , плотность  $\rho$ , скорость звука  $c$  и другие термодинамические параметры есть функции модуля скорости  $w$  и для определения параметров потока достаточно использовать уравнения безвихренности и неразрывности

$$L_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad L_2 \equiv \frac{\partial y^\nu \rho u}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

где  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости газа на оси  $x$  и  $y$ .

Если величина излома стенки в точке  $a$  превосходит некоторое значение, которое определяется формой контура при  $x < 0$ , то течение в трансзвуковой области не зависит от формы контура при  $x > 0$  и, в частности, от  $\vartheta_a$  — угла наклона контура стенки к оси  $x$  справа от  $a$ . От величины  $\vartheta_a$  в данном случае зависит лишь протяженность пучка волн разрежения, выходящего из  $a$ , т. е. положение характеристики второго семейства  $ah$ , ограничивающей этот пучок справа. Поэтому параметры на некоторой «внутренней» характеристике пучка, например на  $ac$ , можно считать заданными. В соответствии с этим течение в области  $G$ , ограниченной характеристиками  $ac$  и  $cb$  и контуром  $adb$ , определяется (при заданной характеристике  $ac$  и параметрах потока на ней) уравнениями (1.1) и условием непротекания

$$L \equiv \xi' - u/v = 0 \quad (1.2)$$

на стенке сопла. В (1.2) и далее штрихом обозначена полная производная по  $y$  вдоль контура  $adb$ , а  $x = \xi(y)$  — уравнение этого контура.

Наряду с участками  $ad$  и  $db$  сопло имеет кормовые части, контуры которых  $bkf$  и  $dsf$  газом не обтекаются и на фиг. 1 даны штрихами. Давления  $p^+$  и  $p^{+0}$ , которые действуют на  $bkf$  и  $dsf$  соответственно, суть заданные константы, характеризующие режимы работы полного сопла и его части. В общем случае точка  $d$ , как и точка  $a$ , может быть точкой излома. Такая ситуация изображена и на фиг. 1, где  $de$  и  $dg$  — характеристики второго семейства, ограничивающие соответствующий пучок волн разрежения.

В силу сделанных предположений тяги полного и укороченного сопел  $\chi$  и  $\chi^0$  с точностью до несущественных для дальнейшего слагаемых и положительного множителя равны

$$\chi = \int_a^b p y^\nu dy - y_b^{1+\nu} \frac{p^+}{1+\nu}, \quad \chi^0 = \int_a^d p y^\nu dy - y_d^{1+\nu} \frac{p^{+0}}{1+\nu} \quad (1.3)$$

Здесь и далее нижние индексы  $b, d, \dots$  приписаны параметрам в соответствующих точках.

Сформулируем вариационную задачу. Пусть задана максимально допустимая длина полного сопла  $X$ , давления  $p^+$  и  $p^{+0}$ , положительные числа  $n$  и  $n^0$ , полная энтальпия и энтропия газа на входе в сопло и форма его дозвуковой части (как указывалось выше, в этом случае можно считать заданным течение слева от характеристики  $ac$ ). Требуется построить такой контур  $adb$ , т. е. найти зависимость  $x = \xi(y)$ , где  $0 \leq \xi(y) \leq X$ , и координаты точек  $d$  и  $b$ , чтобы составное сопло реализовывало максимум

«средней» тяги

$$\chi_{\Sigma} = n\chi + n^{\circ}\chi^{\circ} \quad (1.4)$$

Коэффициенты  $n$  и  $n^{\circ}$  в (1.4), которые определяются назначением сопла, вероятностями использования полного сопла и его части и т. п., удобно нормировать так, чтобы  $n + n^{\circ} = 1$ . Тогда (1.4) в соответствии с (1.3) станет

$$\chi_{\Sigma} = \int_a^d py^{\nu} dy + n \int_a^b py^{\nu} dy - ny_b^{1+\nu} \frac{p^+}{1+\nu} - (1-n) y_d^{1+\nu} \frac{p^{+\circ}}{1+\nu} \quad (1.5)$$

При  $n = 1$  имеем  $n^{\circ} = 0$ , и, таким образом, используется только полное сопло ( $\chi_{\Sigma} = \chi$ ). При  $n < 1$  вклад начального и конечного участков контура в функционал (1.5) различен. Это и служит причиной того, что в точке  $d$  в общем случае оптимальный контур имеет излом. В качестве еще одного условия задачи можно потребовать, чтобы длина укороченного сопла определялась абсциссой точки  $d$ , т. е. чтобы на  $fd$  выполнялось условие  $x \leq x_d$ .

Параметры в (1.1) — (1.5) удобно считать безразмерными. При приведении к безразмерному виду за характерные размерные длину, скорость и плотность ( $l_*$ ,  $w_*$ ,  $\rho_*$ ) удобно принять ординату точки  $a$  и критические скорость и плотность потока. Безразмеривание достигается отнесением величин с размерностью длины к  $l_*$ , скорости — к  $w_*$ , плотности — к  $\rho_*$ , давления — к  $\rho_* w_*^2$  и тяги — к  $\rho_* w_*^2 l_*^{1+\nu}$ . В плоском случае  $\chi$ ,  $\chi^{\circ}$  и  $\chi_{\Sigma}$  в (1.3) — (1.5) суть величины, приходящиеся на единицу ширины сопла (в направлении, перпендикулярном плоскости  $xy$ ).

2. Для решения сформулированной вариационной задачи составим вспомогательный функционал

$$J = \chi_{\Sigma} + \int_a^b \alpha L dy + \iint_G (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2) dx dy \quad (2.1)$$

в котором  $\alpha = \alpha(y)$  и  $\mu_i = \mu_i(x, y)$  — переменные множители Лагранжа. В силу уравнений (1.1) и (1.2) при допустимом варьировании, когда компоненты скорости  $u$  и  $v$ , а также плотность и давление, являющиеся известными функциями  $u$  и  $v$ , удовлетворяют уравнениям и граничным условиям задачи, первая вариация  $\delta J$  и первая вариация исходного функционала  $\delta \chi_{\Sigma}$  совпадают.

При получении  $\delta J$  следует иметь в виду, что при малых вариациях контура  $adb$  параметры газа изменяются лишь в подобласти  $G^{\circ}$  области  $G$ , лежащей справа от  $ah$ , и, кроме того, происходит сдвиг этой характеристики. Вариации параметров слева от  $ah$  равны нулю. С учетом этого, привлекая уравнения течения (1.1), можно показать, что, хотя вариации  $\delta u$  и  $\delta v$  на  $ah$  отличны от нуля (в силу перемещения  $ah$  из-за варьирования угла излома в точке  $a$ ), их комбинации на  $ah$ , появляющиеся в  $\delta J$  при варьировании интеграла по  $G$ , исчезают. Вычисление вклада в  $\delta J$ , связанного с варьированием координат точки  $d$ , производится так же, как в [9]. Кроме того, допускаются разрывы множителей  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , которые могут иметь место только на характеристиках [9, 10].

После вычисления  $\delta J$  коэффициенты перед всеми вариациями, отличными от вариаций координат контура  $adb$ , можно обратить в нули выбором множителей Лагранжа  $\alpha$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В результате получается «сопряженная»

задача для определения  $\alpha$  на  $adb$  и множителей  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в области  $G^\circ$ . Так, в подобластях своей непрерывности  $\mu_1$  и  $\mu_2$  должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + y^\nu (\rho u)_u \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + y^\nu \rho_u v \frac{\partial \mu_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - y^\nu \rho_v u \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - y^\nu (\rho v)_v \frac{\partial \mu_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эта система при  $w > c$  имеет два семейства действительных характеристик, которые совпадают с характеристиками уравнений течения (1.1) и на которых

$$d\mu_1 \mp y^\nu \rho \beta d\mu_2 = 0 \quad (\beta = \sqrt{M^2 - 1}) \quad (2.3)$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак отвечает характеристикам первого (второго) семейства;  $M = w / c$  — число Маха. Дифференциалы  $d\mu_1$  и  $d\mu_2$  в (2.3) берутся вдоль характеристики.

На характеристиках, лежащих в  $G^\circ$  и являющихся линиями разрыва множителей Лагранжа, скачки  $\mu_1$  и  $\mu_2$  удовлетворяют равенствам

$$[\mu_i] \pm y^\nu \rho \beta [\mu_j] = 0 \quad (2.4)$$

где  $[\mu_i]$  — разность значений  $\mu_i$  справа и слева от разрыва.

Граничные условия сопряженной задачи для  $\mu_i$  формулируются на стенке сопла и на замыкающей характеристике  $hb$  и имеют вид

$$\mu_1 = y^\nu \rho v \quad \text{на } ad, \quad \mu_1 = y^\nu \rho v n \quad \text{на } db, \quad \mu_1 + y^\nu \rho \beta \mu_2 = 0 \quad \text{на } hb \quad (2.5)$$

Наконец, множитель Лагранжа  $\alpha$  на  $ad$  и  $db$  определяется так, чтобы

$$\alpha + y^\nu \rho v \mu_2 = 0 \quad (2.6)$$

Использование третьего условия из (2.5) позволяет проинтегрировать уравнение из (2.3), отвечающее характеристике первого семейства, и найти таким образом  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на  $hb$  через  $y$  и параметры потока. Соответствующие формулы имеют вид

$$\mu_1 = C (y^\nu \rho \beta)^{1/2}, \quad \mu_2 = -C (y^\nu \rho \beta)^{-1/2} \quad \text{на } hb \quad (2.7)$$

Здесь  $C$  — константа, которая определяется, например, из сравнения значений  $\mu_{1b}$ , получающихся из (2.5) и (2.7).

Для произвольного контура  $adb$ , обтекание которого происходит без образования в  $G^\circ$  ударных волн, уравнения и граничные условия (2.2) — (2.7) позволяют решить в  $G^\circ$  сопряженную задачу и найти, в частности, значения множителей Лагранжа на контуре  $adb$ . При этом можно показать, что в случае, изображенном на фиг. 1, линией разрыва множителей  $\mu_1$  и  $\mu_2$  будет характеристика первого семейства  $dl$ , приходящая в точку  $d$ . После выбора множителей Лагранжа выражение для  $\delta \chi_\Sigma = \delta J$  примет

ВИД

$$\begin{aligned} \delta\chi_{\Sigma} = & A\Delta y_d + B\Delta x_d - ny_b^v \left( p^+ - p + \frac{\rho}{\beta} uv \right)_b \Delta y_b + \\ & + \left( y^v \rho v^2 \frac{n}{\beta} \right)_b \Delta x_b + \int_a^d \rho v y^v (\mu_2 - u)' \delta\xi dy + \\ & + \int_a^b \rho v y^v (\mu_2 - nu)' \delta\xi dy \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$A = y_d^v (p_- - np_+ - n^{\circ} p^{+\circ})_d - [\mu_2 y^v \rho u]_d - \int_{d^-}^{d^+} \{ \mu_1 dv - \mu_2 y^v d(\rho u) \}$$

$$B = [\mu_2 y^v \rho v]_d - \int_{d^-}^{d^+} \{ \mu_1 du + \mu_2 y^v d(\rho v) \}$$

Здесь интегралы в точке  $d$  берутся через весь веер волн разрежения; нижний индекс «минус» («плюс») приписан параметрам на стенке до (после) точки излома;  $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$ ; через  $\delta\xi$  обозначена вариация абсциссы стенки (при фиксированном  $y$ ), а через  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — приращения координат соответствующих точек.

Если контур  $adb$  оптимален, то при любом допустимом варьировании вариация  $\delta\chi_{\Sigma}$  будет неположительной. Это при  $x_d < x_b$  с учетом ограничения на длину полного сопла приводит к следующим условиям для определения формы оптимального контура:

$$\begin{aligned} (\mu_2 - u)' = 0 \text{ на } ad, \quad (\mu_2 - nu)' = 0 \text{ на } db \\ A = 0, \quad B = 0 \quad \text{в точке } d \\ (p^+ - p + \rho uv \beta^{-1})_b = 0, \quad (y^v \rho v^2 n \beta^{-1})_b \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь третье, четвертое и соответственно пятое и шестое условия определяют ординату и абсциссу точек  $d$  и  $b$ , причем выполнение неравенства в последнем условии свидетельствует о том, что длина полного сопла равна максимально допустимой.

В определенном диапазоне параметров  $X$ ,  $n$ ,  $p^+$  и  $p^{+\circ}$ , в частности если  $p^{+\circ} \simeq p^+$ , оптимально не составное, а сплошное сопло, когда  $x_d \equiv x_b$ . Можно показать, что в таком случае ордината концевой точки определяется предпоследним условием (2.9) с заменой  $p_+$  средним противодавлением  $p_{\Sigma}^+ = np^+ + n^{\circ} p^{+\circ}$ . Условие того, что максимум  $\chi_{\Sigma}$  реализует сплошное сопло, имеет вид

$$\{(\rho v^2 \beta^{-1})_- - n(\rho v^2 \beta^{-1})_+\}_b \geq 0 \quad (2.10)$$

В случае выполнения данного неравенства введение бесконечно малого съемного концевой участка приводит к уменьшению тяги сопла. Наклон указанного концевой участка  $\zeta_+$ , где  $\zeta = v/u$ , выбирается оптимальным, т. е. таким, чтобы параметры (с нижним индексом «плюс»), которые получаются на стенке после разворота от  $\zeta = \zeta_- \equiv \zeta_b$  до  $\zeta = \zeta_+$ , удовлетворяли предпоследнему условию (2.9). Так как  $p^+ < p_{\Sigma}^+$ , то  $\zeta_+ > \zeta_-$ . Нижний индекс «минус» в (2.10) приписан параметрам на стенке сплош-

ного сопла. Условие (2.10) можно получить как из непосредственного варьирования концевой элемента сопла, так и из (2.8). При этом необходимо учесть связь между допустимыми приращениями координат точек  $b$  и  $d$  для  $x_d = x_b$  и то, что здесь  $\Delta x_d \leq 0$ .

Процесс построения оптимального сопла можно упростить следующим образом. Если участки  $ad$  и  $db$  оптимальны, то в соответствии с (2.5) и (2.9)

$$\mu_1 = y^\nu \rho v, \quad \mu_2 = u + C_1 \quad \text{на } ad, \quad \mu_1 = y^\nu \rho v n, \quad \mu_2 = nu + C_2 \quad \text{на } db$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы. (2.11)

Построение участков  $ad$  и  $db$  оптимального контура в силу решения соответствующих задач Гурса эквивалентно определению «оптимальных» характеристик  $ld$  и  $bg$ . Переход к указанным характеристикам осуществляется благодаря тому, что, как и в [11], первая пара равенств (2.11) дает решение задачи Коши для системы (2.2) с начальными условиями (2.11) на  $ad$  во всем треугольнике  $adl$ . Аналогичным образом вторая пара равенств из (2.11) дает решение соответствующей задачи Коши в  $dbg$ . В итоге множители Лагранжа при решении сопряженной задачи приходится определять лишь в четырехугольнике  $ldgh$ . При этом граничные условия для  $\mu_1$  и  $\mu_2$  ставятся на  $dg$  и  $gh$ .

Оптимальная характеристика  $ld$  определяется равенством

$$E \equiv \mu_1 / y^\nu \rho \beta + \mu_2 - u - v\beta^{-1} - C_1 = 0 \quad \text{на } ld \quad (2.12)$$

которое заменяет первое условие из (2.9) на  $ad$ . Множители Лагранжа, входящие в (2.12), берутся с правой стороны характеристики  $ld$ .

Аналогичным образом условие, определяющее оптимальную характеристику  $bg$ , имеет вид

$$v + \beta (u + C_2) = 0 \quad \text{на } bg \quad (2.13)$$

Значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на  $dg$ , необходимые для решения сопряженной задачи в  $ldgh$ , даются равенствами

$$\mu_1 = y^\nu \rho v n, \quad \mu_2 = nu + C_2 \quad \text{на } dg \quad (2.14)$$

Эти равенства, будучи записанными в точке  $g$ , позволяют вместе с (2.7) выразить константы  $C$  и  $C_2$  через  $n$  и параметры потока в указанной точке.

Отметим, что условие (2.13) на  $bg$  сводится к известному условию оптимальности, которое получается на замыкающей характеристике в задачах оптимизации сплошного сопла [3,4]. Данный результат естествен, так как замыкающий участок работает лишь на одном режиме и изменение его формы в силу сверхзвукового характера течения не влияет на обтекание начального участка  $ad$ .

Полученные выше уравнения и граничные условия составляют основу численного алгоритма построения обтекаемых газом участков  $ad$  и  $db$  оптимального контура и в частности, определения координат точек  $b$  и  $d$ . При этом от обводов кормовых частей требуется лишь, чтобы они соединяли начальную точку  $f$  с точками  $b$  и  $d$  и чтобы длины кормовых частей не превосходили  $X$  для полного сопла и  $x_d$  для его части. Поэтому, хотя форма контуров кормовых частей в данном случае произвольна, последние могут содержать торцы  $bk$  и  $ds$ , где  $x \equiv X$ ,  $x \equiv x_d$  соответственно [12]. Силы, действующие

на указанные кормовые части, не зависят от их конфигурации. Такое положение имеет место только при отсутствии внешнего обтекания. Если на режиме работы полного сопла кормовая часть обтекается сверхзвуковым потоком, то ее построение и определение координат точки  $b$  производится так же, как в [13].

3. В рассматриваемой вариационной задаче задаются  $X$ ,  $n$ ,  $p^+$  и  $p^{+0}$ . Численный алгоритм построения оптимального контура оказывается более простым для «обратной задачи». В последней вместо указанных величин считаются заданными: угол излома контура в начальной точке (следовательно, замыкающая характеристика пучка волн разрежения, выходящего из  $a$ ), координаты  $x_l$  и  $x_h$ , которые определяют положение точек  $l$  и  $h$  на замыкающей характеристике первого пучка, и угол излома контура в точке  $d$ . При этом, как было отмечено выше, построение начального участка составного сопла эквивалентно построению оптимальной характеристики  $ld$ , т. е. определению на ней, например зависимости  $\zeta = \zeta(\psi)$ . Функция тока  $\psi$  вводится обычно так, чтобы на оси  $\psi = 0$ , а на стенке  $\psi = 1$ .

Оптимальное распределение  $\zeta(\psi)$  на  $ld$  должно удовлетворять условию (2.12), в котором  $\mu_1$  и  $\mu_2$  находятся из решения задачи Гурса в  $ldgh$  с граничными условиями (2.14) на  $dg$  и (2.7) на  $hg$ . Выполнение условия (2.12) в точке  $l$  обеспечивается выбором константы  $C_1$ . Отличие распределения  $\zeta$  от оптимального означает нарушение условия (2.12), т. е. равенства  $E = 0$  в точках характеристики  $ld$ , отличных от  $l$ . Это обстоятельство и используется для организации итерационного процесса определения оптимального распределения  $\zeta$  на  $ld$ . Итерации велись по схеме

$$\zeta_n^j = \zeta_n^{j-1} + \varepsilon_n^j E_n^j \quad (3.1)$$

которая аналогична схеме, применявшейся в [14, 15]. В (3.1) нижние индексы дают номер точки на  $ld$ , верхние — номер итерации,  $\varepsilon_n^j$  — константы, причем  $|\varepsilon_n^j| < 1$ . Величина  $\varepsilon_n^j$  в указанных пределах может зависеть от номера точки и номера итерации. Так как при заданной точке  $l$  значение  $\psi_l$  известно, а  $\psi_d = 1$ , то точки на  $ld$  удобно располагать так, чтобы фиксированным нижним индексам в (3.1) отвечали фиксированные  $\psi$ .

В каждой итерации найденная из (3.1) зависимость  $\zeta(\psi)$  вместе с уравнениями характеристики первого семейства полностью определяет характеристику  $ld$ . Затем из решения задачи Гурса для уравнений течения в четырехугольнике  $ldgh$  при известных параметрах на  $ld$  и  $lh$  и последующего расчета пучка волн разрежения  $edg$  находится течение во всем четырехугольнике  $ldgh$ . Это, в свою очередь, позволяет решить задачу Гурса для  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и сделать новую итерацию в соответствии с (3.1). После того, как условие  $E_n = 0$  удовлетворено с заданной точностью во всех точках характеристики  $ld$ , строится оптимальная характеристика  $bg$ . Для этого проводится интегрирование от  $\psi = \psi_g$  до  $\psi = 1$  уравнений характеристики первого семейства с учетом равенства (2.13).

В случае, если оптимальным оказалось сопло рассматриваемой схемы (фиг. 1),  $v_b > 0$  и в последнем условии из (2.9) имеет место неравенство, т. е.  $X = x_b$ . Давление  $p^+$ , характеризующее режим работы полного соп-

ла, при данном «обратном» подходе находится (после определения параметров в точке  $b$ ) из предпоследнего условия (2.9). Наконец,  $n$  и  $p^{+0}$  подбираются такими, чтобы удовлетворялись третье и четвертое условия из (2.9). Последние с учетом выражений для  $A$  и  $B$  и решений (2.11) имеют вид

$$\begin{aligned} Ay_{\bar{a}}^{-v} &\equiv \left\{ p_- - np_+ - n^{\circ} p^{+0} - (nu_+ + C_2)(\rho u)_+ + \right. \\ &\left. + (u_- + C_1)(\rho u)_- \right\}_a - \int_a^{a+} \{ \mu_1 y^{-v} dv - \mu_2 d(\rho u) \} = 0 \\ By_{\bar{a}}^{-v} &\equiv \{ (nu_+ + C_2)(\rho v)_+ - (u_- + C_1)(\rho v)_- \}_a - \\ &- \int_a^{a+} \{ \mu_1 y^{-v} du + \mu_2 d(\rho v) \} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если найденные в результате решения «обратной» задачи  $n$ ,  $p^+$ ,  $p^{+0}$ ,  $p_{b-}$  и  $p_{d-}$  удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq n \leq 1, \quad 0 \leq p^+ \leq p_{b-}, \quad 0 \leq p^{+0} \leq p_{d-}$$

то полученные значения  $X$ ,  $n$ ,  $p^+$  и  $p^{+0}$  можно считать заданными для некоторой исходной вариационной задачи. Отметим, что построение сплошных оптимальных сопел также основано на решении обратной задачи.

В приведенных выше рассуждениях игнорировалось то обстоятельство, что в формулы (2.14) для  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на  $dg$  входит  $n$ , которое становится известным лишь после построения характеристики  $ld$ . Указанное несоответствие при  $n > 0$  устраняется введением

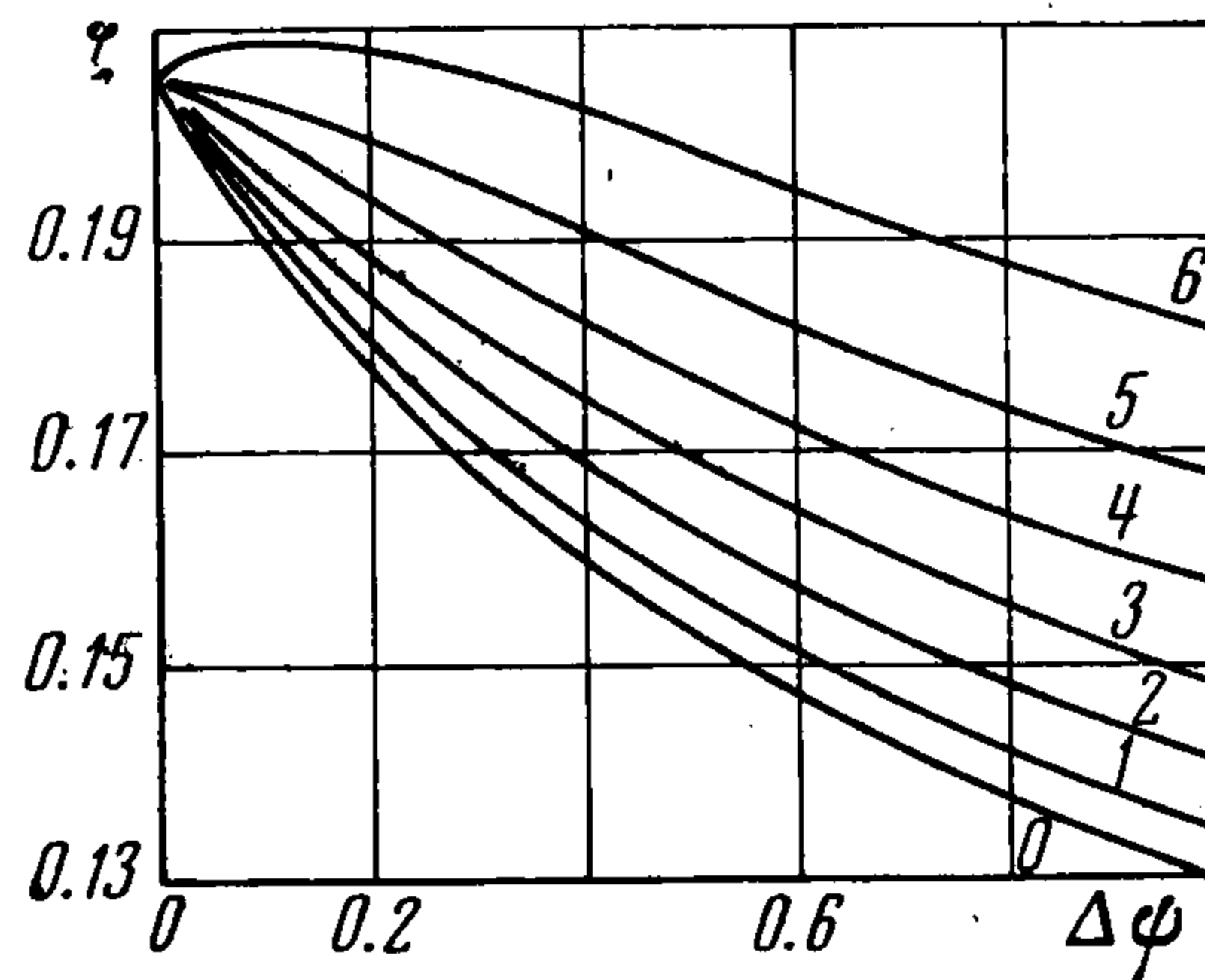
$$\mu_i^{\circ} = \mu_i / n, \quad C^{\circ} = C / n, \quad C_2^{\circ} = C_2 / n$$

Уравнения и граничные условия для  $\mu_i^{\circ}$  в четырехугольнике  $ldgh$  получаются из (2.2), (2.3), (2.7) и (2.14) заменой  $\mu_i$ ,  $C$  и  $C_2$  на  $\mu_i^{\circ}$ ,  $C^{\circ}$  и  $C_2^{\circ}$ , а  $n$  — на единицу. Одновременно вместо  $\mu_i$  и  $C_2$  в (2.12) и (3.2) следует поставить  $n\mu_i^{\circ}$  и  $nC_2^{\circ}$ . Это позволяет исключить  $n$  из уравнений и граничных условий сопряженной задачи. При этом  $n$  и  $C_1$  в каждой итерации находятся из линейных относительно  $n$  и  $C_1$  второго уравнения (3.2) и равенства  $E_l = 0$ .

Скорость сходимости итерационного процесса (3.1) зависит от выбора начального распределения  $\zeta$  на  $ld$ . При малом концевом участке  $db$  за начальное естественно брать распределение, соответствующее оптимальному сплошному соплу [3,4]. Затем каждое вновь построенное оптимальное распределение  $\zeta$  на  $ld$  берется как исходное при построении сопла с более длинным концевым участком, большим углом излома стенки и т. д. Итерации  $\zeta$  на  $ld$  ведутся до тех пор, пока  $|E_n / \zeta_n|$  всюду на  $ld$  не станет меньше некоторой достаточно малой величины. Пользуясь выражением для  $\delta\chi_{\Sigma}$ , можно показать, что отклонение  $\Delta\chi_{\Sigma}$  тяги построенного таким путем сопла от оптимального есть величина порядка  $E_{n\max}^2$ , где  $E_{n\max}$  — максимальная невязка на  $ld$ .

4. Описанный выше алгоритм был применен для построения большого числа оптимальных контуров. Рассматривались осесимметричные сопла с плоской переходной поверхностью, отход от которой осуществлялся в соответствии с [16]. Газ считался совершенным с показателем адиабаты  $\kappa = 1.4$ . Итерации велись до момента выполнения во всех точках  $ld$  условия  $|E_n/\zeta_n| < 0.01$ , что во всех рассмотренных случаях требовало от двух до семи итераций.

Оптимальные распределения  $\zeta$  на  $ld$  для нескольких сопел, которые получаются при  $\zeta_a = 0.221$ ,  $\Delta\zeta_d \equiv \zeta_{d+} - \zeta_{d-} = 0.15$  и фиксированной точке  $l$ , изображены на фиг. 2. Кривые 1—6 соответствуют соплам, оптимальным при следующих значениях  $X$ ,  $n$ ,  $p^+$  и  $p^{+0}$  и имеющим такие геометрические характеристики:

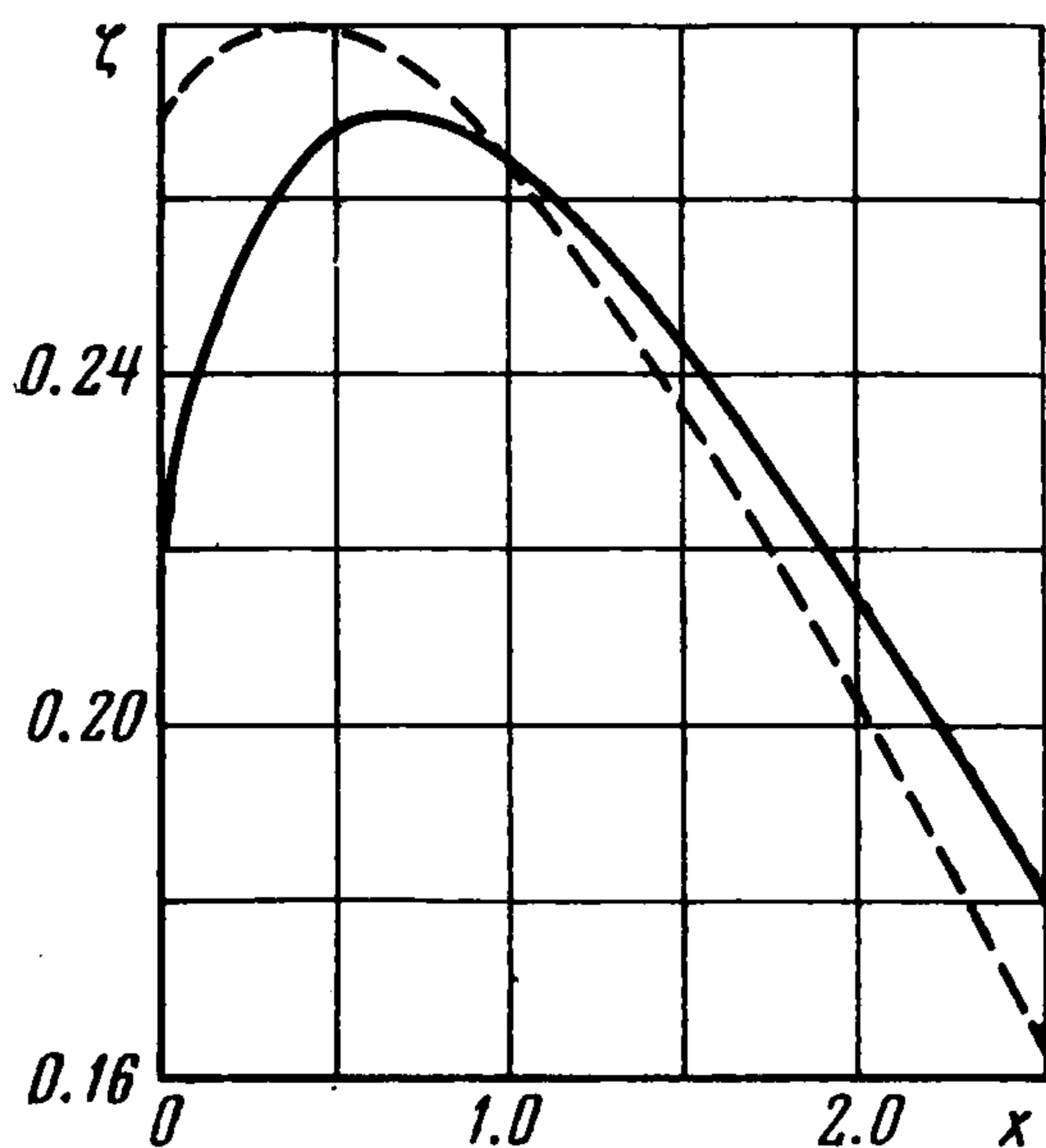


Фиг. 2

	1	2	3	4	5	6
$X$	= 2.91	3.57	4.34	5.25	6.29	7.51
$n$	= 0.35	0.37	0.39	0.42	0.45	0.49
$p^+ \cdot 10^2$	= 0.48	0.67	0.72	0.69	0.59	0.44
$p^{+0} \cdot 10$	= 1.16	1.10	1.03	0.95	0.86	0.75
$y_b$	= 1.62	1.79	1.99	2.20	2.45	2.74
$x_d$	= 2.42	2.44	2.46	2.48	2.51	2.55
$y_d$	= 1.49	1.51	1.52	1.55	1.57	1.61
$\zeta_{d-} \cdot 10$	= 1.34	1.41	1.48	1.57	1.67	1.81
$\zeta_b \cdot 10$	= 2.52	2.24	1.99	1.78	1.62	1.52

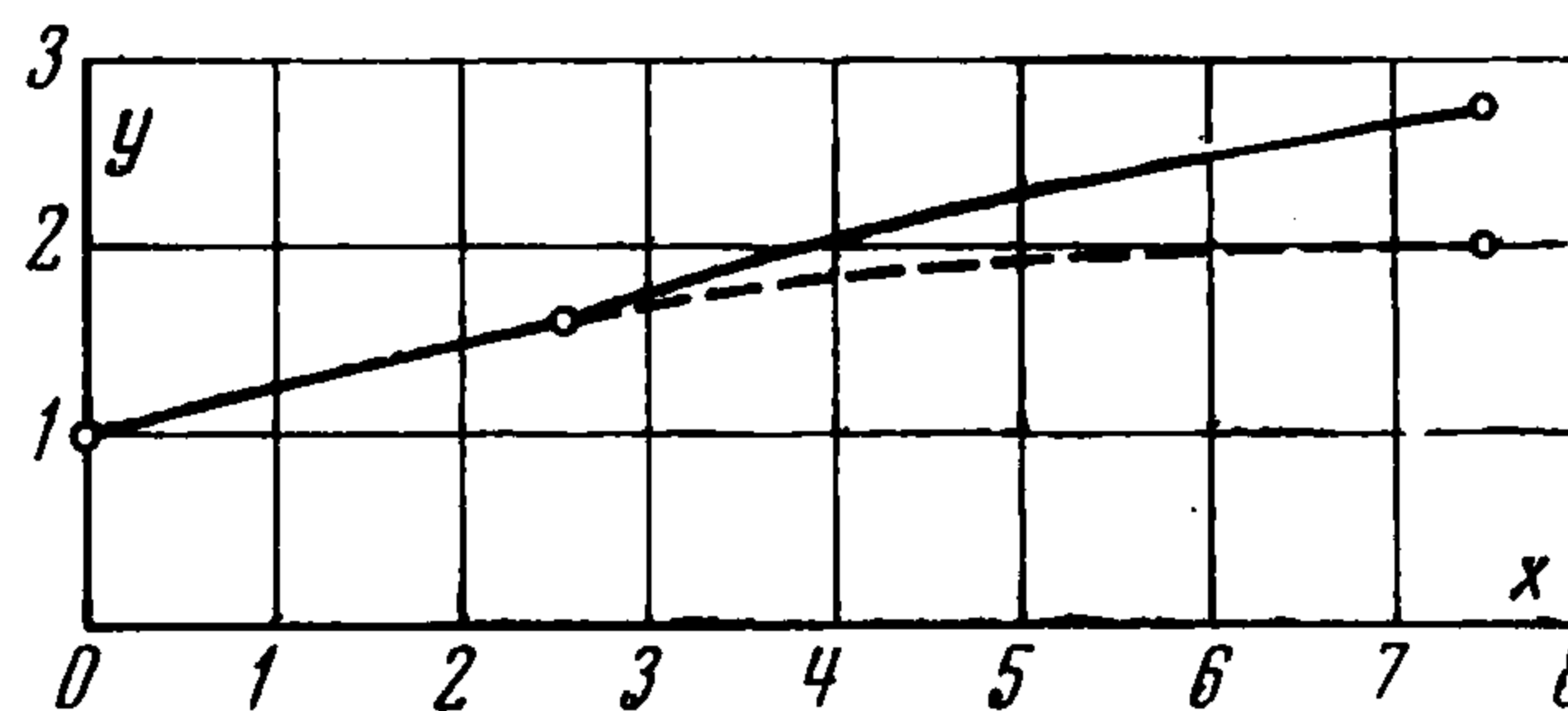
Нулевая кривая на фиг. 2 дает распределение  $\zeta$  на замыкающей характеристике оптимального сплошного сопла ( $X \approx 2.4$ ), которая выходит из той же точки  $l$ ; по оси абсцисс отложено  $\Delta\psi = (\psi - \psi_l) / (1 - \psi_l)$ .

Отличие в распределении  $\zeta$  на  $ld$  сказывается на форме начального участка оптимального сопла. На фиг. 3 распределение  $\zeta$  на участке  $ad$  составного сопла, отвечающего кривой 6 (фиг. 2), дано сплошной линией, а распределение  $\zeta$  на стенке оптимального сплошного сопла, имеющего ту же конечную точку, показано штрихами.



Фиг. 3

Оптимальные составные сопла сравнивались со сплошными соплами, имеющими дли-



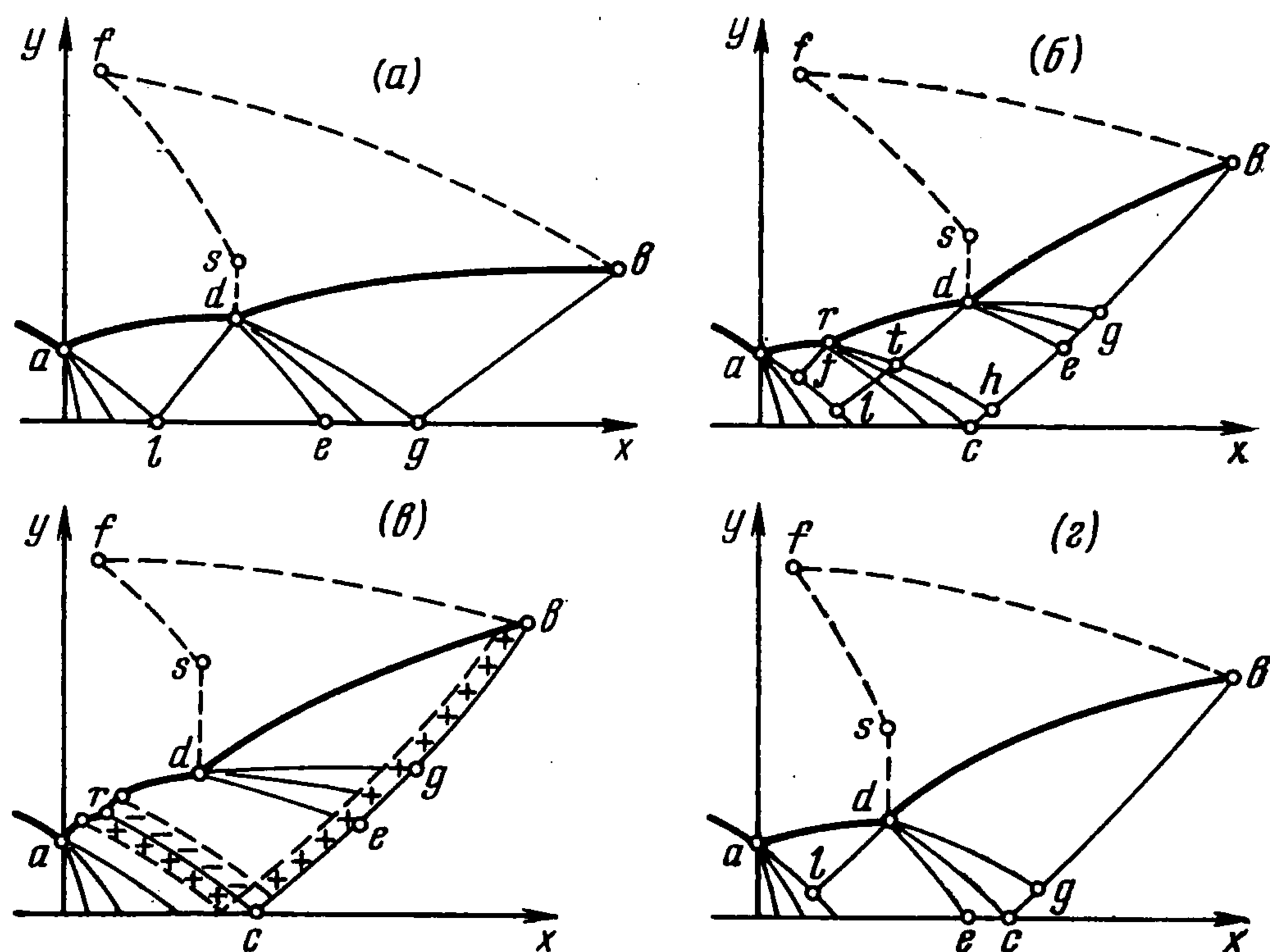
Фиг. 4

ну  $X$ , и оптимальными при противодавлении  $p_{\Sigma^+} = np^+ + n^0 p^{+0}$ . Напомним, что в классе сплошных сопел такие сопла оптимальны и для рассматриваемой задачи. На фиг. 4 изображен один из оптимальных составных контуров и контур соответствующего сплошного сопла (штриховая линия). Интересно отметить, что во всех рассчитанных примерах участки  $ad$  составных сопел оказались (как и в случае фиг. 4) близкими к начальным участкам сплошных сопел, оптимальных при противодавлении  $p_{\Sigma^+}$ .

Для оценки выигрыша, который в случае нарушения условия (2.10) дает составное сопло, вычислялись относительные приращения интеграла сил давления  $\Delta\chi/\chi_{ab^\circ}$ . Здесь  $b^\circ$  — концевая точка сплошного сопла;  $\chi_{ab^\circ}$  — интеграл по участку  $ab^\circ$  контура сплошного сопла, аналогичный интегралам в (1.3);  $\Delta\chi$  — разность  $\chi_\Sigma$  и соответствующей величины для сплошного сопла. Полученные в ряде примеров  $\Delta\chi/\chi_{ab^\circ}$  вместе с параметрами  $X$ ,  $n$ ,  $p^+$  и  $p^{+\circ}$ , а также с некоторыми геометрическими характеристиками сопел имели следующие значения:

$X$	= 1.72	3.20	3.26	3.30	4.34	7.51
$n$	= 0.47	0.56	0.53	0.51	0.39	0.49
$p^+ \cdot 10^2$	= 2.12	0.84	0.30	0.05	0.72	0.44
$p^{+\circ} \cdot 10$	= 2.66	1.76	1.72	1.70	1.03	0.75
$y_b$	= 1.45	1.89	1.96	2.00	1.99	2.80
$x_d$	= 0.58	0.95	0.95	0.95	2.50	2.55
$y_d$	= 1.11	1.22	1.22	1.22	1.52	1.61
$y_{b^\circ}$	= 1.27	1.55	1.55	1.55	1.69	1.99
$\Delta\chi/\chi_{ab^\circ}$	= 0.05	0.07	0.08	0.07	0.03	0.06

5. Сплошной контур и конфигурация, изображенная на фиг. 1 и исследованная в предыдущих разделах, не исчерпывают всего многообразия возможных форм оптимального составного сопла. Последнее следует из соображений непрерывности и сравнения фиг. 1 с фиг. 5, *a*, на которой изображена оптимальная конфигурация при отсутствии ограничений на длину



Фиг. 5

сопла, т. е. при  $X = \infty$ . В этом случае оптимальное составное сопло есть комбинация двух сопел, каждое из которых обеспечивает равномерный поток на выходе. При этом характеристики  $ld$ ,  $de$  и  $bg$  прямолинейны, в треугольнике  $lde$  параметры газа постоянны, причем  $\zeta \equiv 0$  и  $p \equiv p^{+\circ}$ , а на  $bg$  поток также параллелен оси  $x$  и  $p \equiv p^+$ .

Обозначим через  $X_m$  минимальное значение  $X$ , при котором возможна оптимальная конфигурация, изображенная на фиг. 5, *a*. Введенная вели-

чина есть функция только  $p^+$  и  $p^{+0}$  и получается, если в качестве  $ad$  и  $db$  взять контуры минимальной длины, обеспечивающие постоянство параметров газа на характеристиках  $ld$  и  $bg$ . Последние, как и показано на фиг. 5, *a*, имеют изломы в точках  $a$  и  $d$ . Построим картину эволюции формы оптимального составного сопла при увеличении  $X$  от нуля до  $X_m$ .

Фиксируем форму сопла слева от точки  $a$  и величины  $p^+$ ,  $p^{+0}$  и  $n$ . В соответствии с условием (2.10) можно ожидать, что сплошной контур реализует максимум  $\chi_2$  при  $X \leq X_1$ . Здесь  $X_1$  — предельное для этого случая значение  $X$ , отвечающее знаку равенства в условии (2.10), и есть функция  $p^+$ ,  $p^{+0}$  и  $n$ . Как только  $X$  становится больше  $X_1$ , в оптимальной конфигурации появляется концевой участок  $db$ , т. е. реализуется составное сопло уже исследованного типа. Можно показать, что если в (2.10) имеет место равенство, то это обеспечивает выполнение условий  $A = 0$  и  $B = 0$  из (2.9) при  $x_d = x_b$ . Следовательно, длина концевого участка при  $X \rightarrow X_1 + 0$  стремится к нулю, хотя излом в точке  $d$  при этом остается конечным. С ростом  $X > X_1$  увеличиваются (если  $p^+$ ,  $p^{+0}$  и  $n$  фиксированы) длины как начального, так и концевого участков.

Тип составного сопла, изображенный на фиг. 1, реализует максимум  $\chi_2$  при  $X_1 \leq X \leq X_2$ , где  $X_2$  — второе предельное значение  $X$ , которое, как и  $X_1$ , есть функция  $p^+$ ,  $p^{+0}$  и  $n$ . Значениям  $X_2 < X < X_3$ , где  $X_3 = X_3(p^+, p^{+0}, n)$  — третье предельное значение, соответствует ситуация, при которой точка  $c$  (точка пересечения замыкающей характеристики  $bc$  с осью симметрии) лежит между последней характеристикой пучка волн разрежения, выходящего из точки  $a$ , и первой характеристикой аналогичного пучка, образующегося при обтекании точки  $d$ . Данная конфигурация не рассматривалась выше и поэтому требует более подробного анализа.

Так как теперь граница области влияния включает участок оси симметрии, где  $v \equiv 0$ , то требуется граничное условие и для  $\mu_1$ . Это условие получается так же, как другие граничные условия сопряженной задачи и имеет вид

$$\mu_1 = 0 \text{ при } y = 0 \quad (5.1)$$

Далее, как и в [17,18], можно показать, что характеристика второго семейства  $gc$ , соединяющая точку  $c$  с точкой  $g$  контура  $ad$ , и характеристика первого семейства, приходящая в  $g$ , являются, как и  $ld$ , линиями разрыва множителей Лагранжа. На каждом из указанных разрывов выполняется одно из равенств (2.4), причем интенсивность скачка  $\mu_1$  на  $gc$  определяется соотношением

$$[\mu_1] = C (y^{\nu} \rho \beta)^{1/2} \text{ на } gc \quad (5.2)$$

Здесь константа  $C$  та же, что в формулах (2.7), а  $[\mu_1]$ , как и выше, — разность значений  $\mu_1$  справа и слева от  $gc$ .

Можно показать, что оптимальный контур  $adb$  в рассматриваемом случае имеет в точке  $g$  дополнительный излом, обтекаемый с образованием пучка разрежения, и, следовательно, оптимальная конфигурация имеет вид, изображенный на фиг. 5, *б*.

Наличие излома в точке  $r$  доказывается так же, как в [17]. Аналогичным путем получают условия

$$[y^v(p + \mu_2 \rho u)]_r + \int_{r-}^{r+} \{\mu_1 dv - \mu_2 y^v d(\rho u)\} = 0 \quad (5.3)$$

$$[\mu_2 y^v \rho v]_r - \int_{r-}^{r+} \{\mu_1 du + \mu_2 y^v d(\rho v)\} = 0$$

Эти условия определяют величину излома  $\Delta \zeta_r = (\zeta_+ - \zeta_-)_r$  и положение точки  $s$  на оси симметрии внутри пучка волн разрежения, образующегося при обтекании точки  $r$ . В (5.3) все величины находятся так же, как при вычислении  $A$  и  $B$  в (2.8).

Условия оптимальности участков  $ar$  и  $rd$ , которые в данном случае заменяют соответствующее равенство из (2.11), записываются в форме

$$\mu_1 = u + C_3 \quad \text{на } ar, \quad \mu_2 = u + C_4 \quad \text{на } rd \quad (5.4)$$

где  $C_3$  и  $C_4$  — константы.

Интегралы для  $\mu_i$ , аналогичные ранее имевшим место в треугольнике  $ald$ , теперь справедливы в треугольниках  $ajr$  и  $rtd$ . При этом в  $ajr$  вторым интегралом служит первое равенство из (5.4), а в треугольнике  $rtd$  — второе. Оптимальные распределения  $\zeta = \zeta(\psi)$  на характеристиках  $jr$  и  $td$  удовлетворяют равенству (2.12) с заменой константы  $C_1$  на  $C_3$  и  $C_4$  соответственно.

Необходимость излома в точке  $r$  можно показать также с помощью приема, который ранее использовался Г. Г. Черным [19] при исследовании обтекания тел, близких к клину. Действуя аналогичным образом, допустим, что оптимальна конфигурация, подобная изображенной на фиг. 5, б, но не имеющая излома в точке  $r$ . Проварьируем этот контур, оставив его неизменным вне интервала  $(y_r - \Delta y) < y < (y_r + \Delta y)$ , где  $\Delta y$  — малая положительная величина. Внутри данного интервала исходный контур заменим (как показано на фиг. 5, в) двумя прямолинейными отрезками, пересекающимися с исходным контуром на границах интервала, а между собой — в точке  $(x_r + \Delta \zeta \Delta y, y_r)$ , где  $\Delta \zeta$  — положительная величина того же порядка, что и  $\Delta y$ . Линеаризуя уравнения течения относительно исходного (неравномерного) потока, можно показать, что с точностью до величин более высокого порядка, чем  $\Delta \zeta \Delta y$ , возмущения  $p$ , вызванные проведенным варьированием контура, исчезают всюду вне полос высоты  $\Delta y$ , примыкающих к характеристикам  $rc$  и  $bc$ . Повышению (понижению) давления на фиг. 5, в отвечают значки «плюс» («минус»). Далее можно показать, что приращение  $\chi_\Sigma$  из-за изменения  $p$  на самом проварьированном участке контура также есть величина более высокого порядка малости, чем  $\Delta \zeta \Delta y$ . Итак, если  $\zeta_b > 0$ , что в общем случае имеет место, то остается только некомпенсированное приращение  $\chi_\Sigma$  порядка  $\Delta \zeta \Delta y$ , которое появляется за счет роста  $p$  в окрестности точки  $b$ . Следовательно, вопреки сделанному предположению, исходный гладкий контур неоптимален.

Интересен механизм перехода от оптимальной конфигурации фиг. 1 к оптимальной конфигурации фиг. 5, б, который в соответствии со сказанным выше происходит при  $X = X_2$ . В общем случае (при  $\zeta_b \neq 0$ ) этот переход осуществляется не путем «сползания» точки  $h$  на ось симметрии по замыкающей характеристике первого пучка, а в результате «рас-

щепления» указанного пучка на два. Момент «расщепления» определяется таким положением точки  $h$  на замыкающей характеристике первого пучка, при котором, вводя участок  $ag$  нулевой протяженности, т. е. разделив пучок на два, можно получить случай, изображенный на фиг. 5, б, и одновременно удовлетворить обоим условиям (5.3). Выполнение одного из этих условий в указанный момент происходит за счет перемещения точки  $h$  по замыкающей характеристике, а второго — благодаря выбору характеристики, разделяющей расщепляющиеся пучки. При  $\zeta_b \neq 0$  константа  $C$  в (5.2) также отлична от нуля. Это вместе с соотношениями (2.4) на линиях разрыва и условием для  $\mu_1$  из (2.5) делает невозможным одновременное выполнение двух условий (5.3) при любом другом способе перехода. Отметим, что описанный выше механизм «расщепления», по-видимому, играет аналогичную роль и в случае двухфазных и неравновесных течений, когда контуры оптимальных сопел также могут содержать внутренние точки излома [17,20].

Увеличение  $X$  от  $X_2$  до  $X_3$  ведет к росту длин участков  $ar$  и  $db$  и одновременному перемещению точки  $r$  к точке  $d$ . При  $X = X_3$  происходит «слияние» точек  $r$  и  $d$  и соответствующих пучков. В общем случае из-за тех же причин, что при «расщеплении» первого пучка, излом в точке  $r$  в момент «слияния» конечен, а точка  $c$  лежит внутри пучка.

При  $X_3 < X < X_m$  максимум  $\chi_\Sigma$  реализует конфигурация, изображенная на фиг. 5, г. В этом случае на оси симметрии выполняется условие (5.1), а интенсивность разрыва  $\mu_1$  на характеристике  $dc$  дается формулой (5.2). В остальном построение оптимального контура здесь ведется так же, как для конфигурации, изображенной на фиг. 1. При  $X \rightarrow X_m - 0$  имеет место естественный переход к случаю двух сопел с параллельным выходом (фиг. 5, а). Если  $0 < n < 1$ , то «выравнивание» потоков на выходе из обоих сопел происходит, по-видимому, так, что  $y_l > 0$  и  $y_g > 0$  при  $X < X_m$  и  $y_l = y_g = 0$  только при  $X = X_m$ . В последнем случае (при  $X = X_m$ ) решение сопряженной задачи дается равенствами

$$\begin{aligned} \mu_1 &= y^{\nu} \rho v, \quad \mu_2 = u - (1 - n) u_l - n u_g \quad \text{в } alda \\ \mu_1 &= y^{\nu} \rho v n, \quad \mu_2 = n(u - u_g) \quad \text{в } bgl db \end{aligned} \tag{5.5}$$

В случае комбинации двух сопел с параллельным выходом данные непрерывные распределения  $\mu_i$  обеспечивают (при любом  $n$ ) выполнение всех уравнений и условий вариационной задачи (в том числе,  $A = B = 0$ ). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой (5.5) в указанные уравнения и условия.

Авторы признательны Ю. К. Гудкову, привлечшему их внимание к рассмотренной задаче, и М. Я. Иванову, любезно предоставившему программы расчета разгонного участка и решения задачи Гурса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н о с а с к G. A., S t r о м с т а R. R. Performance of the aerobell extendible nozzle rocket engine. AIAA Paper, No. 69—4 (Рус. пер. Вопросы ракетной техники, 1969, № 10, стр. 30—46).
2. Н о с а с к G. A., S t r о м с т а R. R. Performance of the aerobell extendible rocket nozzle. J. Spacecraft and Rockets, 1969, vol. 6, No. 12, p. 1416—1423.
3. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, М., 1963.
4. К р а й к о А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, М., 1963.
5. Г о н о р А. Л., К р а й к о А. Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм и при сверх- и гиперзвуковых скоростях. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм, М., «Мир», 1969, стр. 455—492.
6. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e J. V. A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles. Paper presented at the Symposium on extremal problems in aerodynamics. Boeing Sci. Res. Laboratories, Flight Sci. Laboratory, Seattle, Washington, 1962. (Рус. пер. «Механика», Период. сб. переводов иностр. стат, 1963, № 6 (82), стр. 85—101).
7. Г у д е р л е й К. Г., А р м и т е й д ж Д. В. Общий метод построения оптимальных ракетных сопел. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм, М., «Мир», 1969, стр. 172—194.
8. С и р а з е т д и н о в Т. К. Оптимальные задачи газодинамики. Изв. ВУЗ'ов, Авиационная техника, 1963, № 2, стр. 11—21.
9. К р а й к о А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
10. К р а й к о А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
11. Б о р и с о в В. М., Ш и п и л и н А. В. О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
12. К р а й к о А. Н., Н а у м о в а И. Н., Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
13. И в а н о в М. Я. Об одной вариационной задаче сверхзвуковой газовой динамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
14. Б о р и с о в В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением, Инж. ж. 1965, т. 5, вып. 6.
15. Ш и п и л и н А. В. Оптимальные формы тел с присоединенным ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
16. К а ц к о в а О. Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. Тр. ВЦ АН СССР, М., 1964.
17. К р а й к о А. Н., О с и п о в А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
18. К р а й к о А. Н., О с и п о в А. А. О построении контура сверхзвукового сопла с учетом изменения условий полета летательного аппарата. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
19. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
20. О с и п о в А. А. К решению вариационных задач газовой динамики сверхзвуковых неравновесных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.