Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОПТИМАЛЬНОЕ СОЧЕТАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Оптимальное управление при неполной информации, т. е. при неполных и неточных измерениях положения управляемого объекта, представляет существенный интерес для практических задач управления. В случае, когда наряду с управлением программа измерений также может варьироваться наблюдателем, возникают различные задачи оптимального выбора управления и процесса наблюдения, одна из которых и рассмотрена в данной статье. Показано, что при сделанных предположениях о характеристиках систем управления для решения исследуемой задачи может быть применен метод Беллмана и принцип максимума, позволяющие в ряде ситуаций найти явный вид оптимального способа управления и наблюдения. Отметим, что для детерминированных систем задача об оптимальном сочетании управления и наблюдения в постановке, отличной от принятой ниже, рассматривалась в монографиях [1,2].

1. Обозначим управляемое движение исследуемого объекта через $x(t)$, а доступную измерению величину символом $y(t)$. Пусть вектор $x(t)$, принимающий значения из евклидова пространства E_n, есть решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)]\,dt + \sigma_1(t)\,d\xi_1(t)$$
$$x(0) = x_0 \qquad (0 < t \leqslant T) \tag{1.1}$$

а вектор $y(t) \in E_m$ задается соотношениями

$$dy(t) = H(t)x(t)\,dt + \sigma(t)\,d\xi_2(t) \qquad (t > 0), \quad y(0) = 0 \tag{1.2}$$

При этом уравнения (1.1), (1.2) понимаются в смысле Ито [3], а встречающиеся в них векторы рассматриваются как вектор-столбцы.

Относительно коэффициентов уравнений (1.1), (1.2) постоянно предполагаются выполненными следующие ограничения. Независимые винеровские процессы $\xi_1(t) \in E_n$ и $\xi_2(t) \in E_m$ нормированы условиями

$$\xi_i(0) = 0, \quad M\xi_i(t) = 0, \quad M\xi_1(t)\xi_1'(t) = I_n t, \quad M\xi_2(t)\xi_2'(t) = I_m t$$

где M — знак математического ожидания, штрих — знак транспонирования, I_n — единичная матрица размерности n. Вектор управлений $u(t) \in E_{n_1}$. Детерминированные матрицы $A(t)$, $B(t)$, $\sigma_1(t)$, $H(t)$, $\sigma(t)$ имеют кусочно-непрерывные ограниченные элементы, причем размерность матриц $A(t)$, $\sigma_1(t)$ равна $n \times n$, а размерность матриц $B(t)$, $H(t)$, $\sigma(t)$ равна соответственно $n \times n_1$, $m \times n$, $m \times m$. Наконец считается, что матрица $\sigma(t)$ — невырожденна и случайная величина x_0, не зависимая от $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, имеет гауссовское распределение с параметрами

$$m_0 = Mx_0, \qquad D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)'$$

причем матрица D_0 — положительно определена.

Поскольку текущие координаты фазового вектора $x(t)$ недоступны непосредственному измерению, управление $u(t)$ в момент t должно быть выбрано в виде функционала, зависящего от измеренной на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t$ реализации $y(s)$.

Опишем процесс наблюдения. В процессе наблюдения матрица $H(t)$, задающая состав измерений, и матрица $\sigma(t)$, определяющая их точность, могут изменяться (в пределах отмеченных выше ограничений) таким образом, что при этих изменениях неотрицательно-определенная матрица

$$V(t) = H'(t)\,(\sigma(t)\,\sigma'(t))^{-1}\,H(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.3}$$

описывает множество W неотрицательно-определенных детерминированных матриц с ограниченными, кусочно-непрерывными справа элементами, замкнутое и ограниченное относительно евклидовой нормы. В формуле (1.3) и всюду в дальнейшем символ X^{-1} означает матрицу, обратную к матрице X. Сверх требования (1.3) считается также, что для любого элемента

$$V(t) \in W \tag{1.4}$$

имеет место равенство

$$\int_0^T f(V(s))\,ds = T_0 \quad (T_0 < T), \quad f(V) = \begin{cases} 0, & V = 0 \\ 1, & V \neq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Иными словами, на основании определения матричной функции $f(V)$ условие (1.5) означает, что задана суммарная длительность процесса наблюдения.

Целесообразность определять процесс наблюдения матрицей (1.3), впервые отмеченная в работе [4], для неуправляемых движений $x(t)$, явствует из того, что после выбора оптимального управления рассматриваемые критерии качества становятся функцией лишь дисперсии оценки вектора $x(t)$, определяемой именно матрицей $V(t)$. Заметим, что для любой наперед заданной неотрицательно-определенной матрицы $V(t)$ существует матрица $H(t)$ и невырожденная матрица $\sigma(t)$, удовлетворяющие равенству (1.3).

Задача 1. Выбрать управление $u(t)$ в виде функционала от $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ и функцию $V(t)$, удовлетворяющую условиям (1.4), (1.5) так, чтобы минимизировать критерий качества

$$J(u, V) = M\left[x'(T)\,L_1 x(T) + \int_0^T (x'(s)\,L_2(s)\,x(s) + u'(s)\,L_3(s)\,u(s))\,ds\right] \tag{1.6}$$

Здесь L_1, L_2, L_3 — заданные детерминированные матрицы размерностей соответственно $n \times n$, $n \times n$, $n_1 \times n_1$ с кусочно-непрерывными элементами, причем матрица L_2 — неотрицательно определена, а матрица $L_3(s)$ при всех $0 \leqslant s \leqslant T$ и L_1 — положительно определены. Таким образом, для решения задачи 1 необходимо найти оптимальные в смысле критерия качества (1.6) управление $u(t)$ в виде синтезирующей функции и детерминированную программу измерений.

Если $B(t) \equiv 0$ (т. е. система (1.1) неуправляема), то задача 1 сводится к вопросу о выборе оптимальной программы измерений, рассмотренному ранее в работе [4].

Для любого же фиксированного способа наблюдения задача о синтезе оптимального в смысле критерия качества (1.6) управления $u(t)$ может быть решена при помощи метода Беллмана и фильтра Калмана — Бюси (см., например, [5]). Приведем необходимые для дальнейшего результаты ([5], стр. 96—102). С этой целью обозначим через $x_1(t)$ и $D(t)$ соответственно условные математическое ожидание и матрицу дисперсии процесса $x(t)$ при условии, что измерена реализация процесса $y(s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t$. Тогда [5], функция $x_1(t)$ есть решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dx_1(t) = [A(t)x_1(t) + B(t)u(t)]\,dt + D(t)H'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1} \times \\ \times [dy(t) - H(t)x_1(t)\,dt], \qquad x_1(0) = m_0$$

а матрица $D(t)$ определяется равенствами

$$D^{\cdot}(t) = A(t)D(t) + D(t)A'(t) - D(t)V(t)D(t) + \sigma_1(t)\;\sigma_1'(t) \quad (t>0) \\ D(0) = D_0 \tag{1.7}$$

Оптимальное управление $u_0(t)$ равняется

$$u_0(t) = -L_3^{-1}(t)B'(t)g(t)x_1(t) \tag{1.8}$$

где положительно-определенная матрица $g(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$g^{\cdot}(t) = -A'(t)g(t) - g(t)A(t) + g(t)B(t)L_3^{-1}(t)B'(t)g(t) - L_2(t) \\ g(T) = L_1 \tag{1.9}$$

Наконец

$$J_1(V) = \min_u J(u, V) = J(u_0, V) = m_0'g(0)m_0 + \\ + \operatorname{Tr} L_1D(T) + \int_0^T \operatorname{Tr}[D(s)V(s)D(s)g(s) + L_2(s)D(s)]\,ds \tag{1.10}$$

Здесь и в дальнейшем символ $\operatorname{Tr} L_1$ означает след матрицы L_1.

Таким образом, для решения задачи 1 осталось минимизировать $J_1(V)$ по функциям $V(t)$, удовлетворяющим требованиям (1.4), (1.5).

2. Преобразуем правую часть формулы (1.10). Прежде всего с учетом (1.7) имеем

$$\int_0^T [A(s)D(s) + D(s)A'(s) - D^{\cdot}(s) + \sigma_1(s)\sigma_1'(s)]\,g(s)\,ds = \\ = \int_0^T D(s)V(s)D(s)g(s)\,ds \tag{2.1}$$

Далее, интегрируя по частям, получаем ввиду (1.9)

$$-\int_0^T D^{\cdot}(s)g(s)\,ds = -D(T)g(T) + D(0)g(0) + \int_0^T D(s)\dot{g}(s)\,ds = \\ = -D(T)L_1 + D_0g(0) + \int_0^T D(s)\dot{g}(s)\,ds \tag{2.2}$$

Для любых квадратных матриц A_1, A_2 одинаковой размерности

$$\mathrm{Tr} A_1 A_2 = \mathrm{Tr}\, A_2 A_1 \tag{2.3}$$

поэтому в силу (1.10), (2.1), (2.2)

$$J_1(V) = m_0' g(0) m_0 + \mathrm{Tr}\, D_0 g(0) + \int_0^T \mathrm{Tr}\, [D(s)\, \dot{g}(s) +$$
$$+ L_2(s) D(s) + (A(s) D(s) + D(s) A'(s) + \sigma_1(s) \sigma_1'(s))\, g(s)]\, ds$$

Наконец, подставляя сюда вместо производной $g^{\bullet}(t)$ ее выражение, даваемое правой частью формулы (1.9), убеждаемся, используя (2.3), что

$$J_1(V) = m_0' g(0) m_0 + \mathrm{Tr}\, D_0 g(0) +$$
$$+ \int_0^T \mathrm{Tr}\, [\sigma_1(s) \sigma_1'(s) + D(s) g(s) B(s) L_3^{-1}(s) B'(s)]\, g(s)\, ds$$

Но в последнем соотношении для $J_1(V)$ на основании (1.9) от выбора функции $V(t)$ зависит лишь величина

$$J_2(V) = \int_0^T \mathrm{Tr}\, D(s) g(s) B(s) L_3^{-1}(s) B'(s) g(s)\, ds \tag{2.4}$$

Следовательно, для решения задачи 1, которая сведена к нахождению матрицы $V(t)$, подчиненной условиям (1.4), (1.5) и доставляющей минимум функционалу $J_2(V)$, могут быть применены обычные методы оптимального управления. В следующем пункте для некоторых уравнений вида (1.1), (1.2) при помощи принципа максимума будет найден явный вид оптимального способа наблюдения. Напомним, что при любом способе наблюдения оптимальное управление определяется равенством (1.8).

3. Пусть одномерные уравнения (1.1), (1.2) для скалярных величин $x(t)$, $y(t)$ имеют вид

$$x^{\bullet}(t) = a(t) x(t) + b(t) u(t) \quad (0 < t \leqslant T) \tag{3.1}$$

$$dy(t) = h(t) x(t)\, dt + \sigma d\xi_2(t) \tag{3.2}$$

с постоянным коэффициентом $\sigma \neq 0$ и функцией $h(t)$, равной в любой момент t либо нулю, либо постоянной $h \neq 0$. Множество W состоит из чисел нуль и $h^2\sigma^{-2}$, а критерий качества (1.6) равен

$$M\left(l_1 x^2(T) + \int_0^T [x^2(s) l_2(s) + u^2(s) l_3(s)]\, ds\right)$$

При выполнении этих требований имеет место

Теорема 3.1. Если $P(t : b(t) = 0) = 0$ ($P(\delta)$ — лебегова мера на прямой множества δ) и функция $a(t) \leqslant 0$ при всех $t \in [0, T]$, то оптимальный закон наблюдения $V_0(t)$, разрешающий задачу 1 для системы (3.1), (3.2), определяется равенствами

$$V_0(t) = \begin{cases} h^2\sigma^{-2} & (0 \leqslant t < T_0) \\ 0 & (T_0 \leqslant t \leqslant T) \end{cases}$$

Доказательство. В силу (1.7), (3.1), (3.2) дисперсия оценки $D(t)$ удовлетворяет уравнению

$$D^{\bullet}(t) = 2a(t)\, D(t) - D^2(t)\, V(t) \qquad (0 < t \leqslant T) \tag{3.3}$$

Поскольку $D(0) = D_0 > 0$, то $D(t) > 0$ при любом конечном t и, значит, существует функция $z(t) = D^{-1}(t)$, определяемая с учетом (3.3) при $0 < t \leqslant T$ равенствами

$$z^{\bullet}(t) = -2a(t)\ z(t) + V(t), \qquad z\,(0) = D_0^{-1}$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить на основании (2.4), что $V_0(t)$ доставляет минимум функционалу

$$J_2(V) = \int\limits_0^T \frac{g^2(s)\, b^2(s)}{z(s)\, l_3(s)}\, ds$$

при дополнительных ограничениях (1.4), (1.5), (3.3). Применяя принцип максимума ([6], стр. 75—79], нетрудно показать, что

$$V_0(t) = \begin{cases} h^2\sigma^{-2}, & \text{если } \psi(t) + c > 0 \\ \ 0\ , & \text{если } \psi(t) + c \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

где постоянная c выбирается так, чтобы удовлетворить требованию (1.5), а сопряженная переменная $\psi(t)$, задаваемая формулами

$$\psi^{\bullet}(t) = 2a(t)\psi(t) - (z^{-1}(t)g(t)b(t))^2\ l_3^{-1}(t) \qquad (0 < t \leqslant T)$$
$$\psi(T) = 0 \tag{3.5}$$

равна

$$\psi(t) = \int\limits_t^T \frac{(g(s)\, b(s))^2}{z^2(s)\, l_3(s)} \exp\left(\int\limits_s^t 2a(s_1)\, ds_1\right) ds \tag{3.6}$$

Действительно, составим гамильтониан ([6], стр. 76)

$$\psi_0 z^{-1}(t) g^2(t) b^2(t) l_3^{-1}(t) + \psi(t)(-2a(t)z(t) + V(t)) + \psi_2(t)V(t)h^{-2}\sigma^2$$

где постоянная $\psi_0 \leqslant 0$ и в силу условия трансверсальности $\psi(T) = 0$. Далее функция $\psi_2(t)$, удовлетворяющая уравнению $\psi_2^{\bullet}(t) = 0$,— постоянна. Значит, следует принять $\psi_0 < 0$, ибо при $\psi_0 = 0$ справедливо тождество $\psi(t) \equiv 0$, а постоянная $\psi_2(t)$ отлична от нуля, поскольку на основании принципа максимума вектор $(\psi_0, \psi(t), \psi_2(t))$ — нетривиален. Однако равенство

$$(\psi_0, \psi(t)\ , \psi_2(t)) = (0,\, 0,\, \psi_2(t))$$

при любом выборе постоянной $\psi_2(t)$ противоречит требованию (1.5), так как в силу принципа максимума оптимальный закон наблюдения определяется формулами (3.4) при $c = \psi_2(t)h^{-2}\sigma^2$. Остается еще заметить, что гамильтониан определен с точностью до постоянного множителя. Поэтому можно положить $\psi_0 = -1$.

Из равенства (3.6) видно, что $\psi(t) \geqslant 0$. Следовательно, на основании (3.5) и условий теоремы 3.1 производная $\psi^{\bullet}(t) < 0$, т. е. функция $\psi(t)$ монотонно убывает. Отсюда и (3.4) вытекает справедливость утверждения теоремы 3.1.

Следствие 3.1. Предположим, что в уравнениях (1.1), (1.2) матрица $B(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ — невырожденна, матрица $A(t) = -\gamma I_n$ (постоянная $\gamma \geqslant 0$), $\sigma_1(t) = 0$, постоянный коэффициент $\sigma(t) = \sigma$. Функция $H(t)$ принимает два значения: она равно либо нулевой, либо постоянной матрице H. Множество W состоит из нулевой матрицы и матрицы $H_1 = H'(\sigma\sigma')^{-1}H$. Обозначим через $\varphi(t)$ функцию, равную единице, если в момент t производится наблюдение и нулю, если наблюдение не производится.

Покажем, что оптимальный закон наблюдения

$$V_0(t) = H_1 \varphi_0(t)$$

где

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < T_0 \\ 0, & T_0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \qquad (3.7)$$

Для этого достаточно доказать, что среди всех функций $V(t) = H_1 \varphi(t)$ матрица $V_0(t)$ доставляет минимум функционалу (2.4) при дополнительных ограничениях (1.5), (2.1), которые при сделанных предположениях относительно коэффициентов записываются в виде

$$D^{\cdot}(t) = -2\gamma I_n D(t) - D(t) V(t) D(t), \qquad D(0) = D_0$$

$$\int_0^T \varphi(s)\, ds = T_0, \qquad T_0 < T \qquad (3.8)$$

Отметим, что в силу тождества Якоби ([7], стр. 420) определитель $\det D(t)$ матрицы $D(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\det D(t) = \det D_0 \exp\left\{\int_0^t \operatorname{Tr}(-2\gamma I_n - V(s) D(s))\, ds\right\}$$

из которого с учетом невырожденности D_0 вытекает невырожденность матрицы $D(t)$. Следовательно, существует обратная матрица $z(t) = D^{-1}(t)$, определяемая в силу (3.8) условиями

$$z^{\cdot}(t) = 2\gamma I_n z(t) + V(t), \qquad z(0) = z_0 = D_0^{-1} \qquad (3.9)$$

В соответствии с ([7], стр. 283) найдется невырожденная матрица Q, которая одновременно приводит z_0 к единичной матрице, а H_1 к диагональной матрице H_2. Диагональные элементы матрицы H_2 обозначим символом h_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, принимая еще во внимание (2.3), (3.9), получаем для функционала (2.4) выражение

$$J_2(V) = \int_0^T \operatorname{Tr}\left[z_0 e^{2\gamma I_n t} + \int_0^t e^{2\gamma I_n (t-s)} V(s)\, ds\right]^{-1} \alpha(t)\, dt =$$

$$= \int_0^T \operatorname{Tr}\left[Q^{-1} Q z_0 Q' (Q')^{-1} e^{2\gamma I_n t} + \int_0^t e^{2\gamma I_n (t-s)} Q^{-1} Q V(s) Q' (Q')^{-1} ds\right]^{-1} \alpha(t)\, dt =$$

$$= \int_0^T \operatorname{Tr}\left[e^{2\gamma I_n t} + \int_0^t e^{2\gamma I_n (t-s)} H_2 \varphi(s)\, ds\right]^{-0} Q\alpha(t) Q' dt \qquad (3.10)$$

где положительно-определенная матрица

$$\alpha(t) = g(t) B(t) L_3^{-1}(t) B'(t) g(t)$$

Отсюда вытекает, что при $0 \leqslant t \leqslant T$ все функции $\beta_i(t)$, представляющие собою диагональные элементы положительно-определенной матрицы $Q\,\alpha(t)\,Q'$, положительны. Кроме того, на основании (3.10), используя диагональность матрицы

$$e^{2\gamma I_n t} + \int_0^t e^{2\gamma I_n (t-s)} H_2 \varphi(s)\, ds$$

имеем

$$\min_V J_2(V) = \min_\varphi \int_0^T \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \left[e^{2\gamma t} + \int_0^t e^{2\gamma(t-s)} h_i \varphi(s)\,ds\right]^{-1} dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^n \min_\varphi \int_0^T \beta_i(t) \left[e^{2\gamma t} + \int_0^t e^{2\gamma(t-s)} h_i \varphi(s)\,ds\right]^{-1} dt \qquad (3.11)$$

причем знак равенства здесь имеет место лишь в том случае, когда все слагаемые в правой части (3.11) достигают минимума при одном и том же выборе функции $\varphi(t)$. Однако любое из указанных слагаемых может быть представлено в виде

$$\int_0^T \beta_i(s) f_i^{-1}(s)\,ds \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.12)$$

где

$$f_i^{\cdot}(t) = 2\gamma f_i(t) + h_i \varphi(t) \qquad (0 < t \leqslant T)$$
$$f_i(0) = 1$$

Таким образом, на основании теоремы 3.1 и отмеченного выше неравенства $\beta_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ функция $\varphi_0(t)$ доставляет минимум всем выражениям (3.12), а следовательно, и функционалу (2.4).

Замечание 3.1. Дословно повторяя рассуждения, примененные при доказательстве следствия 3.1, убеждаемся, что его утверждение остается в силе, если выполнены все требования следствия 3.1, но матрица $A(t) = -\gamma(t) I_n$ с неотрицательной функцией $\gamma(t)$.

Следствие 3.2. Предположим, что в уравнениях (1.1), (1.2) матрица $A(t) = A$ — постоянна и неположительно определена, $\sigma_1(t) = 0$ функция $H(t)$ равна либо нулевой, либо постоянной матрице $\gamma_1 H$, постоянный коэффициент $\sigma(t) = \gamma_2\sigma$, причем матрицы H и σ — ортогональны (т. е. $H'H = \sigma\sigma' = I_m$), $\det B(t) \neq 0$ и числа $\gamma_i \neq 0$. Пусть далее априорная дисперсия $D_0 = \gamma I_n$, $\gamma > 0$. Тогда оптимальный закон наблюдения $V_0(t) = \gamma_1^2 \gamma_2^{-2} \varphi_0(t)$, где функция $\varphi_0(t)$ определяется равенством (3.7).

Доказательство этого следствия подобно доказательству следствия 3.1. Именно обозначим через Q ортогональную матрицу, приводящую A к диагональному виду с элементами на диагонали у приведенной матрицы $a_i \leqslant 0$. Тогда матрица $Q \exp(At)\, Q'$ также диагональна с диагональными элементами, равными $\exp(a_i t)$. Аналогично (3.10), (3.11) имеем

$$J_2(V) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \left[\gamma e^{2a_i t} + \int_0^t e^{2a_i(t-s)} \gamma_1^2 \gamma_2^{-2} \varphi(s)\,ds\right]^{-1} dt$$

Рассуждая далее так же, как и при доказательстве следствия 3.1, убеждаемся в справедливости следствия 3.2.

4. Изучим теперь вид оптимального способа наблюдения для систем (3.1), (3.2) без предположения об отрицательности $a(t)$ при критерии качества (1.6) вида

$$M\left[l_1x^2(T)+\int_0^T u^2(s)\,l_3(s)\,ds\right],\quad l_1>0,\quad l_3(t)>0 \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. Предположим, что функция $b(t)$ и коэффициенты уравнения (3.2) удовлетворяют требованиям теоремы 3.1, функции $a(t)$, $b(t)$, $l_3(t)$ дифференцируемы, причем $a^\bullet(t)\leqslant 0$, $l_3^\bullet(t)\leqslant 0$, $b(t)\,b^\bullet(t)\geqslant 0$. Тогда найдется такое число $t_1\leqslant T-T_0$, что оптимальный закон наблюдения $V_0(t)=h^2\sigma^{-2}\,\varphi(t,t_1)$, где

$$\varphi(t,t_1)=\begin{cases}0 & (t<t_1)\\ 1 & (t_1\leqslant t<t_1+T_0)\\ 0 & (t_1+T_0\leqslant t)\end{cases} \tag{4.2}$$

Доказательство. На основании принципа максимума оптимальный закон наблюдения определяется формулами (3.4) — (3.6).

Предположим теперь противное, т. е. предположим, что существует несколько не примыкающих один к другому интервалов на отрезке $[0,T]$, где функция $V_0(t)$, определяемая равенствами (3.4), отлична от нуля. Обозначим i-й из указанных интервалов (интервалов наблюдения) символом $[t_i,s_i)$. Ясно, что в силу сделанного предположения найдется такое i, для которого $s_i<t_{i+1}$. Исследуем поведение сопряженной переменной $\psi(t)$ (см. формулы (3.5), (3.6)) на отрезке $[s_i,t_{i+1}]$. Заметим прежде всего, что так как $V_0(t)>0$, при $t\in(t_i,s_i)$ и $V_0(t)=0$ на интервале $s_i\leqslant t<t_{i+1}$, то с учетом (3.4) производная

$$\psi^\bullet(s_i)\leqslant 0 \tag{4.3}$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет величина $r(t)=\psi^\bullet(t)$ на отрезке $s_i<t<t_{i+1}$. С этой целью продифференцируем по t обе части соотношения (3.5). Принимая во внимание формулы (3.4), (1.9), (4.1) и тот факт, что $V_0(t)=0$ при $s_i\leqslant t<t_{i+1}$, получаем

$$\begin{aligned}r^\bullet(t)-2a(t)\,r(t)=r_1(t)=2a^\bullet(t)\,\psi(t)+l_3^\bullet(t)\,l_3^{-2}(t)\,g^2(t)\,b^2(t)\,z^{-2}(t)-\\ -2b(t)\,b^\bullet(t)\,l_3^{-1}(t)\,g^2(t)\,z^{-2}(t)-2b^4(t)\,g^3(t)\,l_3^{-2}(t)\,z^{-2}(t)\end{aligned} \tag{4.4}$$

На основании уравнения (1.9), которое в условиях теоремы 4.1 имеет вид

$$g^\bullet(t)=-2a(t)g(t)+g^2(t)b^2(t)l_3^{-1}(t),\qquad t>0$$
$$g(T)=l_1>0$$

функция $g(t)$, равная

$$g(t)=\left[\frac{1}{l_1}\exp\left(2\int_T^t a(s)\,ds\right)+\int_t^T b^2(s)\,l_3^{-1}(s)\exp\left(2\int_s^t a(s_1)\,ds_1\right)ds\right]^{-1} \tag{4.5}$$

положительна. Отсюда из неотрицательности сопряженной переменной (3.6) и требований теоремы. 4.1 следует справедливость неравенства

$$r_1(t)<0,\qquad s_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$$

Поэтому в силу соотношений (4.3), (4.4) при $s_i<t\leqslant t_{i+1}$

$$r(t)=\psi^\bullet(s_i)\exp\left(2\int_{s_i}^t a(s)\,ds\right)+\int_{s_i}^t \exp\left(2\int_s^t a(s_1)\,ds_1\right)r_1(s)\,ds<0$$

Иными словами, функция $\psi(t)$ монотонно убывает на отрезке $[s_i,t_{i+1}]$. Последнее, однако, невозможно, так как на основании (3.4) противоречит сделанному выше предположению о том, что $V_0(t) > 0$ при $t_{i+j} \leqslant t < s_{i+j}$, $j = 0, 1$ и $V_0(t) = 0$ для $t \in [s_i, t_{i+1})$. Полученным противоречием теорема 4.1 доказана.

При помощи теоремы 4.1 задача о нахождении оптимального закона наблюдения, доставляющего минимум соответствующему (4.1) функционалу (2.4), имеющему вид

$$\int_0^T D(s)\, g^2(s)\, b^2(s)\, l_3^{-1}(s)\, ds = J_3 \tag{4.6}$$

может быть сведена к минимизации скалярной функции переменной t_1. Для этого следует решить уравнение (3.4), положив (см. формулу (4.2)) $V(t) = h^2\sigma^{-2}\varphi(t,\ t_1)$, а затем подставить это решение уравнения (3.4) и функцию (4.5) в интеграл (4.6), который после указанной подстановки будет функцией одной переменной t_1. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 4.1. Пусть коэффициенты уравнения (3.2) удовлетворяют требованиям теоремы 3.1, величины $a(t) = a$, $b(t) = b \neq 0$ постоянны, в функционале (4.1) функция $l_3(t) \equiv 1$, причем

$$b^2 l_1 = 2a > 0 \tag{4.7}$$

Изучим при этих ограничениях вид оптимального закона наблюдения. Из (4.5), (4.7) вытекает, что $g(t) \equiv l_1$. Поэтому, подставляя в (4.6) решение уравнения (3.3) при $V(t) = h^2\sigma^{-2}\varphi(t,\ t_1)$ нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} l_1^{-2}J_3 = \frac{1}{2a} D_0 (e^{2at_1} - 1) - \ln\frac{D_0}{2a} + \ln(e^{2at_1+2aT_0} + 2aD_0^{-1} - e^{2at_1}) + \\ + (e^{2aT} - e^{2a(t_1+T_0)}) [2aD_0^{-1} + e^{2a(t_1+T_0)} - e^{2at_1}]^{-1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Положим

$$\lambda = e^{2at_1}, \qquad 1 \leqslant \lambda \leqslant e^{2a(T-T_0)}$$

и найдем то значение λ_0, при котором правая часть соотношения (4.8) принимает минимальное значение. Приравняем нулю производную J_3 по λ. Выполняя простые преобразования, имеем

$$\lambda^2 (e^{2aT_0} - 1) + 2a\lambda D_0^{-1} (1 + e^{2aT_0}) - 2aD_0^{-1} e^{2aT} = 0$$

Отсюда, исследуя знак производной $dJ_3 \mid d\lambda$, убеждаемся, что

$$\lambda_0 (e^{2aT_0} - 1) = - aD_0^{-1} (1 + e^{2aT_0}) + [a^2 D_0^{-2} (1 + e^{2aT_0})^2 + 2 (e^{2aT_0} - 1)\, aD_0^{-1} e^{2aT}]^{1/2} \tag{4.9}$$

Эта формула определяет явную зависимость времени начала наблюдений от параметров системы. В частности, из (4.9) видно, что для значений $\lambda_0 \leqslant 1$ время начала наблюдений $t_1 = 0$ и, кроме того, $\lim_{a\to\infty} t_1 = T - T_0$.

Пример 4.2. Пусть коэффициенты уравнения (3.2) удовлетворяют требованиям теоремы 3.1, постоянные величины $a(t) = a > 0$, $l_3(t) \equiv 1$, $b(t) = b \neq 0$. Покажем, что тогда при всех $a > 0$, удовлетворяющих неравенствам

$$2a < b^2, \qquad 2ae^{-4aT} \geqslant b^2 (1 - e^{-2aT})^2 \tag{4.10}$$

которые выполнены для любых достаточно малых положительных значений a, время начала наблюдений $t_1 = 0$. Оценим производную $\psi^\bullet(t)$ сопряженной переменной (3.6). Ввиду (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \psi^\bullet(t) &= 2ab^2 e^{2at} \int_t^T e^{-2as} z^{-2}(s)\, g^2(s)\, ds - g^2(t)\, z^{-2}(t)\, b^2 = \\ &= 2ab^2 e^{2at} \int_t^T e^{2as} [z(s)\, e^{2as}]^{-2} g^2(s)\, ds - g^2(t)\, z^{-2}(t)\, b^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Заметим теперь, что на основании (3.3) функция $z(t)e^{2at}$, равная

$$z_0 + \int_0^t e^{2as} V(s)\, ds$$

монотонно не убывает при любом законе наблюдения. Отсюда и из (4.11) вытекает неравенство

$$\psi^{\bullet}(t) \leqslant b^2 z^{-2}(t) \left[2ae^{-2at} \int_t^T e^{-2as} g^2(s)\, ds - g^2(t)\right] \qquad (4.12)$$

Подставим в правую часть оценки (4.12) вместо функции $g(t)$ ее выражение (4.5). Интегрируя с учетом (4.10), получим

$$\psi^{\bullet}(t) < z^{-2}(t)\, b^2 \left(\frac{b^2}{2a} - 1\right)\left[-e^{-4aT} + \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2aT})^2\right] \leqslant 0$$

Иными словами, функция $\psi(t)$ монотонно убывает, т. е. ввиду (3.4) время начала наблюдений $t_1 = 0$.

Отметим, что, как показано в [4], для неуправляемых движений начало оптимального процесса наблюдения $t_1 = T - T_0$ при любом $a > 0$. Таким образом, введение управления приводит к смещению интервала наблюдения.

Замечание 4.1. Подобно следствию 3.1 можно сформулировать простые обобщения теоремы 4.1 на многомерный случай. Приведем в качестве примера одно из них. Пусть в соотношениях (1.1), (1.2) матрица $A(t) = \gamma_1 I_n$, $D_0 = \gamma_2 I_n$ (γ_1, γ_2 — положительные постоянные) — постоянная ортогональная матрица $B \equiv B(t)$, коэффициенты $H(t)$, $\sigma(t)$ удовлетворяют требованиям следствия 3.1, а в критерии качества (1.6) матрица $L_1 = I_n$, $L_2 \equiv 0$, $L_3 = I_{n_1}$. Тогда существует лишь один интервал наблюдения. Справедливость этого факта с использованием теоремы 4.1 устанавливается совершенно аналогично следствию 3.1.

Выражаю благодарность Ф. Л. Черноусько за постоянное внимание к работе.

Поступила I VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., «Наука», 1966.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
5. Bucy R. S., Joseph P. D. Filtering for stochastic processes with applications to guidance. N. Y., Interscience, 1968.
6. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Изд. 2, М., «Наука», 1969.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 2, М., «Наука», 1966.