Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ГРАНИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В. П. Хацкевич

(Москва)

Метод расширения дифференциального оператора переносится на стационарные системы линейных дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка. Задача аналитического конструирования регуляторов с управлениями граничными функциями посредством метода расширения дифференциального оператора сводится к задаче с распределенными управлениями и решается при помощи метода динамического программирования.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных известно [1], что линейные однородные уравнения с неоднородными граничными условиями по существу эквивалентны неоднородным уравнениям с однородными граничными условиями. Это можно показать при помощи метода расширения дифференциального оператора [2–4].

Линейное однородное уравнение с неоднородными граничными условиями при помощи дельта-функций и их производных можно записать как неоднородное уравнение с однородными граничными условиями при условии, что выполнены некоторые условия непрерывности и дифференцируемости. В случае, если граничные функции будут управляющими воздействиями, полученное неоднородное уравнение можно трактовать как оптимальную задачу с распределенными управлениями.

В [3–4] этим методом получено аналитическое решение для задачи приведения температуры стержня к заданному распределению температуры за фиксированный отрезок времени с минимальной энергией, а также рассмотрен пример с ограниченным по модулю управлением, ранее разобранный в [5].

Задача аналитического конструирования регуляторов для систем в частных производных с распределенными управлениями рассматривалась в [6, 7]. Задачи с граничными управляющими воздействиями изучались в [7–9].

1. Пусть Ω — ограниченное открытое связное подмножество m-мерного евклидова пространства с вектором координат $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$. Через $\overline{\Omega}$ обозначим замыкание множества Ω, а через ω — границу Ω. Посредством символа $\mathbf{x} = \operatorname{col} \|x_1, \ldots, x_n\|$ будем обозначать матрицу-столбец.

Рассмотрим управляемый объект, описываемый следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = L\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \qquad (\mathbf{s} \in \Omega, t > 0) \tag{1.1}$$

Начальные условия для системы (1.1) имеют вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{s}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{s}) \qquad (\mathbf{s} \in \overline{\Omega}, t = 0) \tag{1.2}$$

Граничные условия могут быть двоякого рода:

1° первая краевая задача

$$\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{s}, t) \qquad (\mathbf{s} \in \omega, t > 0) \tag{1.3}$$

2° вторая краевая задача

$$B\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{s}, t) \qquad (\mathbf{s} \in \omega, t > 0) \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{s}, t)$ — вектор состояния системы, $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{s}, t)$ $(\alpha = 1, 2)$ — граничные управляющие функции, L и B — линейные дифференциальные операторы, определенные следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
\mathbf{u} = \mathrm{col}\,\|u_1, \ldots, u_n\|, \qquad \mathbf{f}_\alpha = \mathrm{col}\,\|f_{\alpha 1}, \ldots, f_{\alpha n}\| \qquad (\alpha = 1, 2) \\
L\mathbf{u} = \mathrm{col}\,\|L_1\mathbf{u}, \ldots, L_n\mathbf{u}\|, B\mathbf{u} = \mathrm{col}\,\|B_1\mathbf{u}, \ldots, B_n\mathbf{u}\| \\
u_{it} = L_i\mathbf{u} = a_{ij}^{pq} u_{jpq} + a_{ij}{}^p u_{jp} + a_{ij} u_j \qquad (a_{ij}^{pq} = a_{ij}^{qp}) \\
B_i\mathbf{u} = \{a_{ij}^{pq} u_{jq} + \mu_{ij}(a_{ij}{}^p - (a_{ij}^{pq})_q u_j\}\, n_p \qquad (i = 1, \ldots, n) \\
u_{it} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{jp} = \frac{\partial u_j}{\partial s_p}, \quad u_{jpq} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_p \partial s_q}, \quad (a_{ij}^{pq})_q = \frac{\partial a_{ij}^{pq}}{\partial s_q}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

В этих соотношениях n_p — направляющие косинусы внешней нормали к границе ω области Ω; a_{ij}^{pq} — дважды непрерывно дифференцируемые функции, a_{ij}^{p} — непрерывно дифференцируемые/ функции, a_{ij} и μ_{ij} — непрерывные функции аргумента $\mathbf{s}$.

В соотношениях (1.5), как и в дальнейшем, по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование. Суммирование по индексам i, j, k, ν и μ производится от единицы до n, а по индексам p, q, l и ϑ от единицы до m. Не производится суммирования по индексам, указывающим на количество соотношений в записи формулы (в данном случае i).

Те начальные распределения $\mathbf{u}_0(\mathbf{s})$, при которых система (1.1) с управлениями $\mathbf{f}_\alpha \equiv 0$ $(\alpha = 1, 2)$ имеет единственное дважды непрерывно-дифференцируемое по $\mathbf{s}$ решение, назовем допустимыми.

Симметрическую по $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$ квадратную матрицу $Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \|Q_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\|_1^n$ назовем определенно-положительной, если для любой непрерывной вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{s}) = \mathrm{col}\,\|v_1(\mathbf{s}), \ldots, v_n(\mathbf{s})\|$ с интегрируемым квадратом

$$\int_\Omega \int_\Omega v_i(\mathbf{s})\, Q_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\, v_j(\mathbf{s}')\, d\Omega d\Omega' > 0 \qquad (\mathbf{v}(\mathbf{s}) \not\equiv 0)$$

Предположим, что границу ω области Ω можно разбить на конечное число $(m - 1)$-мерных гиперповерхностей таких, что касательная гиперплоскость к каждой из них меняется непрерывно от точки к точке и пусть известно уравнение границы ω так, что

$$\varphi(\mathbf{s}) = 0 \qquad (\mathbf{s} \in \omega) \tag{1.6}$$

В случае задачи на бесконечном интервале времени зададимся функционалом

$$J_\alpha = \int_0^\infty W_\alpha dt, \qquad W_\alpha = W^{(1)} + W_\alpha{}^{(2)} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{1.7}$$

В случае задачи на конечном интервале времени примем функционал J_α^τ в следующем виде

$$J_\alpha^\tau = \int_0^\tau W_\alpha dt + W^{(3)} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{1.8}$$

Здесь

$$W^{(1)} = \int_\Omega \int_\Omega u_i(\mathbf{s}, t)\, Q_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\, u_j(\mathbf{s}', t)\, d\Omega\, d\Omega' \tag{1.9}$$

$$W_\alpha^{(2)} = \int_\omega Q_j^{(\alpha)}(\mathbf{s})\, f_{\alpha j}^2(\mathbf{s}, t) d\omega \qquad (Q_j^{(\alpha)}(\mathbf{s}) > 0;\ \mathbf{s} \in \omega;\ j = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2)$$

$$W^{(3)} = \int_\Omega \int_\Omega u_i(\mathbf{s}, \tau)\, Q_{ij}^\tau(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\, u_j(\mathbf{s}', \tau)\, d\Omega\, d\Omega'$$

Квадратные матрицы

$$Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \| Q_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \|_1^n, \qquad Q^\tau(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \| Q_{ij}^\tau(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \|_1^n$$

предполагаются определенно-положительными непрерывными и симметрическими по $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$.

Назовем допустимыми управлениями непрерывные по $\mathbf{s}$ и t функции $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{s}, t)$ ($\alpha = 1,2$) такие, что в случае задачи на конечном интервале времени $J_\alpha^\tau < \infty$, а в случае задачи на бесконечном интервале времени $J_\alpha < \infty$ и решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по мере [6]

$$\rho = \left(\int_\Omega \mathbf{u}' \mathbf{u} d\Omega \right)^{1/2}$$

Здесь $\mathbf{u}'$ — вектор, транспонированный по отношению к вектору $\mathbf{u}$.

Предположим, что система (1.1) имеет единственное решение при любом допустимом начальном распределении и любом допустимом управлении. Задача аналитического конструирования регуляторов для системы (1.1) с функционалом J_α (J_α^τ) состоит в отыскании среди допустимых управлений функций $\mathbf{f}_\alpha^\circ = \mathbf{f}_\alpha^\circ[\mathbf{u}]$ ($\alpha = 1,2$), доставляющих минимум функционалу J_α (J_α^τ) при любых допустимых начальных распределениях [6,7]. Управления $\mathbf{f}_\alpha^\circ$ ($\alpha = 1,2$), дающие решение поставленной задачи, называются оптимальными.

2. Метод расширения дифференциального оператора применительно к рассматриваемой системе (1.1) — (1.4) состоит в следующем [3].

Вводится оператор A и сопряженный ему оператор A^*

$$A(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - L \right)(\cdot), \qquad A^*(\cdot) = \left(-\frac{\partial}{\partial t} - L^* \right)(\cdot) \tag{2.1}$$

где L^* — оператор, сопряженный оператору L.

Область определения $D(A)$ оператора A представляет собой множество всех функций $\mathbf{u}(\mathbf{s}, t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\mathbf{u} \in H, \qquad A\mathbf{u} \in H, \qquad \mathbf{u}(\mathbf{s}, 0) = 0, \qquad \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = 0 \quad (B\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = 0), \qquad \mathbf{s} \in \omega, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

где H — гильбертово пространство

Оператор A^* имеет область определения $D(A^*)$, представляющую собой множество всех функций $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{gathered}\mathbf{v} \in H, \quad A^*\mathbf{v} \in H, \quad \mathbf{v}(\mathbf{s}, t) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty, \ \mathbf{s} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = 0 \quad (C\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = 0), \quad \mathbf{s} \in \omega, \quad t > 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь C — граничный дифференциальный оператор, который при заданном B часто можно определить таким образом, что операторы A и A^* сопряжены один к другому. Явный вид оператора C при B, заданный формулой (1.5), будет определен ниже.

В гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^\infty \int_\Omega \bar{\mathbf{x}}' \mathbf{y} \, d\Omega \, dt \tag{2.4}$$

где $\bar{\mathbf{x}}$ означает комплексно-сопряженную величину по отношению к $\mathbf{x}$. Для всех $\mathbf{u} \in D(A)$ и всех $\mathbf{v} \in D(A^*)$ справедливо соотношение

$$(A^*\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, A\mathbf{u}) \tag{2.5}$$

Метод расширения дифференциального оператора состоит во введении другого оператора A_e с областью определения $D(A_e)$ более широкой, чем $D(A)$. А именно, в качестве $D(A_e)$ возьмем множество всех функций $\mathbf{w}(\mathbf{s}, t)$, удовлетворяющих всем условиям, наложенным на $D(A)$, за исключением того, что $\mathbf{w}(\mathbf{s}, t)$ $(B\mathbf{w}(\mathbf{s}, t))$ не обязаны обращаться в нуль при $\mathbf{s} \in \omega$. Скалярное произведение $(A^*\mathbf{v}, \mathbf{w})$ можно использовать для определения оператора A_e. Потребуем, чтобы

$$(A^*\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, A_e\mathbf{w}) \tag{2.6}$$

Преобразуя с помощью формулы Грина и интегрирования по частям левую часть соотношения (2.6), можно получить выражение для оператора A_e, которое будет содержать дельта-функции и их производные.

Все изложенное выше справедливо и в случае конечного интервала времени $[0, \tau]$, за исключением очевидных изменений в определении скалярного произведения (2.4) и в третьем условии (2.3).

Задача аналитического конструирования регуляторов с граничными управлениями при помощи метода расширения дифференциального оператора сводится к задаче с распределенными управлениями. При этом однородная система (1.1) с ненулевыми (неоднородными) граничными условиями перейдет к неоднородной системе с нулевыми (однородными) граничными условиями.

3. Используя соотношение (2.5) для определения $A^*\mathbf{v}$, имеем

$$\begin{gathered}A\mathbf{u} = \operatorname{col} \| A_1\mathbf{u}, \ldots, A_n\mathbf{u} \| \\ A_i\mathbf{u} = u_{it} - a_{ij}^{pq} u_{jpq} - a_{ij}^{p} u_{jp} - a_{ij} u_j \qquad (s \in \Omega, \ t > 0, \ i = 1, \ldots, n)\end{gathered}$$

Предположим временно, что $\mathbf{u}_0(\mathbf{s}) \equiv 0$. Подставив $A\mathbf{u}$ в правую часть соотношения (2.5) и используя формулу Грина, интегрирование по частям и нулевые (однородные) граничные условия, получим

$$(\mathbf{v}, A\mathbf{u}) = \int_0^\infty \int_\Omega v_i \cdot A_i \mathbf{u} d\Omega dt = \int_0^\infty \int_\Omega v_i (u_{it} - a_{ij}^{pq} u_{ipq} - a_{ij}^p u_{jp} - a_{ij} u_j) d\Omega dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_\omega (u_j C_j \mathbf{v} + v_i B_i \mathbf{u}) d\omega dt + \int_0^\infty \int_\Omega A_j^* \mathbf{v} \cdot u_j d\Omega dt = \int_0^\infty \int_\Omega A_j^* \mathbf{v} \cdot u_j d\Omega dt = (A^* \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$C\mathbf{v} = \operatorname{col} \| C_1 \mathbf{v}, \ldots, C_n \mathbf{v} \|, \qquad A^* \mathbf{v} = \operatorname{col} \| A_1^* \mathbf{v}, \ldots, A_n^* \mathbf{v} \|$$

$$C_j \mathbf{v} = \{a_{ij}^{pq} v_{iq} + (\mu_{ij} - 1)(a_{ij}^p - (a_{ij}^{pq})_q) v_i\} n_p \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$A_j^* \mathbf{v} = -v_{jt} - (a_{ij}^{pq} v_i)_{pq} + (a_{ij}^p v_i)_p - a_{ij} v_i \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Таким образом, получены явные выражения для операторов A^* и C.

Пусть h (s) и g (s) — непрерывно дифференцируемые скалярные функции. Справедлива следующая формула:

$$\int_\omega h_q (\mathbf{s}) g (\mathbf{s}) d\omega = - \int_\Omega h (\mathbf{s}) (\delta_q (\varphi (\mathbf{s})) g (\mathbf{s}) + \delta (\varphi (\mathbf{s})) g_q (\mathbf{s})) d\Omega =$$

$$= - \int_\Omega h (\mathbf{s}) (\delta (\varphi (\mathbf{s})) g (\mathbf{s}))_q d\Omega \tag{3.2}$$

Здесь нижний индекс q означает дифференцирование по аргументу s_q, по индексу q подразумевается суммирование, φ (s) — левая часть уравнения (1.6), определяющего границу ω, δ (φ (s)) и δ_q (φ (s)) — дельта-функции, определенные соотношениями

$$\int_\Omega \delta (\varphi (\mathbf{s})) g (\mathbf{s}) d\Omega = \int_\omega g (\mathbf{s}) d\omega, \qquad \int_\Omega \delta_q (\varphi (\mathbf{s})) g (\mathbf{s}) d\Omega = - \int_\omega g_q (\mathbf{s}) d\omega \tag{3.3}$$

Для определения явного выражения для оператора A_e используем соотношение (2.6). Подставив A^* v (3.1) в левую часть соотношения (2.6) и используя формулу Грина и интегрирование по частям, после преобразований получим

$$(A^* \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_0^\infty \int_\Omega (-v_{jt} - (a_{ij}^{pq} v_i)_{pq} + (a_{ij}^p v_i)_p - a_{ij} v_i) w_j d\Omega dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_\omega (v_i B_i \mathbf{w} - w_j C_j \mathbf{v}) d\omega dt + \int_0^\infty \int_\Omega v_i \cdot A_i \mathbf{w} d\Omega dt$$

Здесь предполагалось, что $\mathbf{w} (\mathbf{s}, 0) \equiv 0$ $(\mathbf{s} \in \overline{\Omega})$.

В случае первой краевой задачи используются граничные условия

$$\mathbf{v} (\mathbf{s}, t) = 0, \quad \mathbf{w} (\mathbf{s}, t) = \mathbf{f}_1 (\mathbf{s}, t) \quad (\mathbf{s} \in \omega, \ t > 0)$$

Формула (3.2) получается в следующем виде:

$$(A^* \mathbf{v}, \mathbf{w}) = - \int_0^\infty \int_\omega a_{ij}^{pq} f_{1j} v_{iq} n_p d\omega dt + \int_0^\infty \int_\Omega v_i \cdot A_i \mathbf{w} d\Omega dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_\Omega v_i (A_i \mathbf{w} + h_i) d\Omega dt = (\mathbf{v}, A_e \mathbf{w})$$

$$\mathbf{h} = \operatorname{col}\|h_1, \ldots, h_n\|, \qquad h_i = (\delta(\varphi)\, a_{ij}^{pq} f_{1j} n_p)_q \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

$$A_e \mathbf{w} = \operatorname{col}\|A_{e1}\mathbf{w}, \ldots, A_{en}\mathbf{w}\|, \qquad A_{ei}\mathbf{w} = A_i\mathbf{w} + h_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

В случае второй краевой задачи, используя граничные условия

$$C\mathbf{v} = 0, \qquad B\mathbf{w} = \mathbf{f}_2 \qquad (\mathbf{s} \in \omega,\ t > 0)$$

получим

$$(A^*\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_0^\infty \int_\omega v_i f_{2i}\, d\omega dt + \int_0^\infty \int_\Omega v_i A_i \mathbf{w}\, d\Omega dt = \int_0^\infty \int_\Omega v_i (A_i \mathbf{w} + \delta(\varphi) f_{2i})\, d\Omega dt =$$
$$= (\mathbf{v}, A_e \mathbf{w})$$
$$A_{ei}\mathbf{w} = A_i \mathbf{w} + \delta(\varphi) f_{2i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

В случае первой краевой задачи очевидно, что система (1.1) — (1.3) эквивалентна системе

$$\partial \mathbf{u}/\partial t = L\mathbf{u} - \mathbf{h} \qquad (\mathbf{s} \in \Omega,\ t > 0) \tag{3.6}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{s}, 0) = u_0(\mathbf{s}) \quad (\mathbf{s} \in \bar{\Omega},\ t = 0), \qquad \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = 0 \quad (\mathbf{s} \in \omega,\ t > 0)$$

В случае второй краевой задачи система (1.1), (1.2), (1.4) эквивалентна системе

$$\partial \mathbf{u}/\partial t = L\mathbf{u} - \delta(\varphi)\, \mathbf{f}_2 \qquad (\mathbf{s} \in \Omega,\ t > 0) \tag{3.7}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{s}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{s}) \quad (\mathbf{s} \in \bar{\Omega},\ t = 0), \qquad B\mathbf{u}(\mathbf{s}, t) = 0 \quad (\mathbf{s} \in \omega,\ t > 0)$$

Перепишем $W_\alpha^{(2)}\,(\alpha = 1, 2)$ в следующем виде:

$$W_\alpha^{(2)} = \int_\Omega \delta(\varphi)\, Q_j^{(\alpha)} f_{\alpha j}^2\, d\Omega \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{3.8}$$

Полученная видоизмененная форма записи исходной задачи позволяет использовать метод динамического программирования для решения задачи аналитического конструирования регуляторов с граничными управлениями так же, как и в случае задачи с распределенными управлениями [6,7].

Замечание 3.1. В случае, если граничные управления действуют лишь на некоторой части границы ω, функция $\varphi(\mathbf{s})$ должна быть равной нулю на этой части границы и не должна обращаться в нуль вне ее. В том случае, если к разным частям границы приложены различные управляющие функции, уравнения (3.6) и (3.7) будут содержать в правой части несколько слагаемых вида (3.4).

4. Рассмотрим задачу аналитического конструирования регуляторов на бесконечном интервале времени в видоизмененной форме записи, полученной в предыдущем параграфе.

Предполагая, что справедлив принцип оптимальности [10], согласно методу динамического программирования, введем следующий функционал:

$$\Pi_\alpha[\mathbf{u}(\mathbf{s}, t)] = \min_{\mathbf{f}_\alpha} \int_t^\infty W_\alpha d\eta \qquad (\alpha = 1, 2)$$

Применяя формализм метода динамического программирования, получим для определения $\Pi_\alpha\,[\mathbf{u}\ (\mathbf{s},\ t)]$ следующее функциональное уравнение:

$$\min_{f_\alpha}\left\{W_\alpha+\delta_u\Pi_\alpha[\mathbf{u}(\mathbf{s},t)]\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right\}=0\qquad(\alpha=1,2)\tag{4.1}$$

Здесь второе слагаемое в скобках есть вариационная производная функционала Π_α по $\mathbf{u}$ в направлении $\partial\mathbf{u}\,/\,\partial t$ (см. например, [10]).

Предположим, что функционал Π_α $[\mathbf{u}(\mathbf{s},t)]$ имеет следующий вид:

$$\Pi_\alpha[\mathbf{u}(\mathbf{s},t)]=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\mathbf{u}'(\mathbf{s},t)\,P_\alpha(\mathbf{s},\mathbf{s}')\,\mathbf{u}(\mathbf{s}',t)\,d\Omega\,d\Omega'\qquad(\alpha=1,2)$$

где P_α $(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ $(\alpha=1,2)$ — симметрическая по $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$ определенно-положи тельная $n\times n$-матрица. Так как в дальнейшем из текста всегда будет ясно, какая из краевых задач (первая или вторая) имеется в виду, индекс α в обозначениях Π_α и P_α для простоты опустим.

Используя формулу Грина и симметричность матрицы P $(\mathbf{s},\mathbf{s}')$, получим следующие результаты:

1°. *Первая краевая задача*

$$\begin{gathered}\delta_u\Pi[\mathbf{u}(\mathbf{s},t)]\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\left\{\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)'P\mathbf{u}+\mathbf{u}'P\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right\}d\Omega\,d\Omega'=\\
=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\{(L\mathbf{u}-\mathbf{h})'P\mathbf{u}+\mathbf{u}'P(L\mathbf{u}-\mathbf{h})\}\,d\Omega\,d\Omega'=\qquad(4.2)\\
=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\{\mathbf{u}'L_{ss'}^*P\mathbf{u}-2\mathbf{h}'P\mathbf{u}\}\,d\Omega\,d\Omega'+\int\limits_\omega\int\limits_\Omega\mathbf{g}_1'\mathbf{u}\,d\omega\,d\Omega'+\int\limits_\Omega\int\limits_\omega\mathbf{u}'\mathbf{g}_2\,d\Omega\,d\omega'\end{gathered}$$

$$L_{ss'}^*P(\mathbf{s},\mathbf{s}')=L_s{}^*P(\mathbf{s},\mathbf{s}')+L_{s'}{}^*P(\mathbf{s},\mathbf{s}')$$

$$L_s{}^*P(\mathbf{s},\mathbf{s}')=\|L_{si}{}^*\mathbf{p}_j\|_1{}^n,\qquad L_{s'}{}^*P(\mathbf{s},\mathbf{s}')=\|L_{s'j}^*\mathbf{p}^i\|_1{}^n$$

$$\mathbf{p}_j=\|P_{1j},\ldots,P_{nj}\|\quad(j=1,\ldots,n),\qquad\mathbf{p}^i=\|P_{i1},\ldots,P_{in}\|\quad(i=1,\ldots,n)$$

$$L_{si}^*\mathbf{p}_j=(a_{ki}^{pq}P_{kj})_{pq}-(a_{ki}^pP_{kj})_p+a_{kj}P_{kj}\qquad(i,j=1,\ldots,n)$$

$$L_{s'j}^*\mathbf{p}^i=(a_{kj}^{pq}P_{ik})_{p'q'}-(a_{kj}^pP_{ik})_{p'}+a_{ki}P_{ik}\qquad(i,j=1,\ldots,n)$$

$$\mathbf{g}_1=\mathrm{col}\,\|g_{11},\ldots,g_{1n}\|,\qquad\mathbf{g}_2=\mathrm{col}\,\|g_{21},\ldots,g_{2n}\|$$

$$g_{1j}=\mathbf{p}_jB\mathbf{u}-\mathbf{u}'C\mathbf{p}_j\quad(j=1,\ldots,n)\qquad g_{2i}=\mathbf{p}^iB\mathbf{u}-\mathbf{u}'C\mathbf{p}^i\quad(i=1,\ldots,n)$$

$$C\mathbf{p}_j=\mathrm{col}\,\|C_1\mathbf{p}_j,\ldots,C_n\mathbf{p}_j\|\quad(j=1,\ldots,n),\quad C\mathbf{p}^i=\mathrm{col}\,\|C_1\mathbf{p}^i,\ldots,C_n\mathbf{p}^i\|\quad(i=1,\ldots,n)$$

$$C_i\mathbf{p}_j=\{a_{ki}^{pq}(P_{kj})_q+(\mu_{ki}-1)(a_{ki}^p-(a_{ki}^{pq})_q)P_{kj}\}\,n_p\qquad(i,j=1,\ldots,n)$$

$$C_j\mathbf{p}^i=\{a_{kj}^{pq}(P_{ik})_{q'}+(\mu_{ki}-1)(a_{kj}^p-(a_{kj}^{pq})_{q'}P_{ik}\}\,n_{p'}\qquad(i,j=1,\ldots,n)$$

$$(a_{ki}^{pq})_q=\partial a_{ki}^{pq}(\mathbf{s})/\partial s_q,\qquad(a_{kj}^{pq})_{q'}=\partial a_{kj}^{pq}(\mathbf{s}')/\partial s_q',\ldots$$

Используя выражения (1.9) и (3.8) для $W_1^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$, из (4.2) получим

$$\begin{gathered}\min_{f_1}\left\{\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega(\mathbf{u}'(L_{ss'}^*P+Q)\,\mathbf{u}-2\mathbf{h}'P\mathbf{u})\,d\Omega\,d\Omega'+\int\limits_\Omega\delta(\varphi)\,Q_j{}^{(1)}f_{1j}{}^2d\Omega+\right.\\
\left.+\int\limits_\omega\int\limits_\Omega\mathbf{g}_1'\mathbf{u}\,d\omega\,d\Omega'+\int\limits_\Omega\int\limits_\omega\mathbf{u}'\mathbf{g}_2\,d\Omega\,d\omega'\right\}=0\qquad(4.3)\end{gathered}$$

Подставив сюда $\mathbf{h}$ (3.4), найдем функцию $\mathbf{f}_1{}^\circ$, доставляющую минимум левой части равенства (4.3). Опустив члены, не содержащие функцию

$\mathbf{f}_1$, в координатной форме записи будем иметь

$$\min_{f_{1j}}\left\{\int_{\Omega}\delta(\varphi)\,Q_j^{(1)}f_{1j}^2 d\Omega - 2\int_{\Omega}\int_{\Omega}(\delta(\varphi)\,a_{ij}^{pq}f_{1j}n_p)_q\,P_{ik}u_k d\Omega\,d\Omega'\right\} \qquad (j=1,\ldots,n)$$

Расписав производную по s_q подробнее, а затем используя формулу (3.2) и свойства (3.3) дельта-функции $\delta(\varphi)$, получим

$$\min_{f_{1j}}\left\{\int_{\omega}Q_j^{(1)}f_{1j}^2 d\omega + 2\int_{\omega}a_{ij}^{pq}f_{1j}n_p\int_{\Omega}(P_{ik})_q\,u_k d\Omega' d\omega\right\} \qquad (j=1,\ldots,n)$$

Приравнивая нулю вариационную производную по f_1, найдем оптимальное управление

$$f_{1j}^{\circ}(\mathbf{s},t) = -\frac{1}{Q_j^{(1)}(\mathbf{s})}\,a_{ij}^{pq}(\mathbf{s})\,n_p\int_{\Omega}(P_{ik}(\mathbf{s},\mathbf{s}'))_q\,u_k(\mathbf{s}',t)\,d\Omega'$$
$$(\mathbf{s}\in\omega,\ t\geqslant 0,\ j=1,\ldots,n) \tag{4.4}$$

Подставив (4.4) в (4.3) и назначив граничные условия для матрицы $P(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ таким образом, чтобы два граничных интеграла в (4.3) обратились в нуль, получим для определения $P(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ следующее матричное уравнение:

$$L_{ss'}^{*}P + Q - P^{(1)} = 0 \quad (\mathbf{s}\in\Omega,\ \mathbf{s}'\in\Omega'), \qquad P^{(1)}(\mathbf{s},\mathbf{s}') = \|P_{ij}^{(1)}(\mathbf{s},\mathbf{s}')\|_1^n$$
$$P_{ij}^{(1)}(\mathbf{s},\mathbf{s}') = \int_{\omega}n_{p''}a_{k\mu}^{pq}(\mathbf{s}'')\,(P_{ik}(\mathbf{s},\mathbf{s}''))_{q''}\frac{1}{Q_{\mu}^{(1)}(\mathbf{s}'')}\,(P_{\nu j}(\mathbf{s}'',\mathbf{s}'))_{\theta''}\,a_{\nu\mu}^{l\theta}(\mathbf{s}'')\,n_{l''}d\omega''$$
$$P(\mathbf{s},\mathbf{s}') = 0 \quad (\mathbf{s}\in\omega,\ \mathbf{s}'\in\overline{\Omega}'), \qquad P(\mathbf{s},\mathbf{s}') = 0 \quad (\mathbf{s}\in\overline{\Omega},\ \mathbf{s}'\in\omega')$$

2°. *Вторая краевая задача.* Проведя аналогичные выкладки, получим для определения матрицы $P(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ следующее уравнение:

$$L_{ss'}^{*}P + Q - P^{(2)} = 0 \quad (\mathbf{s}\in\Omega,\ \mathbf{s}'\in\Omega'), \qquad P^{(2)}(\mathbf{s},\mathbf{s}') = \|P_{ij}^{(2)}(\mathbf{s},\mathbf{s}')\|_1^n$$
$$P_{ij}^{(2)}(\mathbf{s},\mathbf{s}') = \int_{\omega}P_{i\mu}(\mathbf{s},\mathbf{s}'')\frac{1}{Q_{\mu}^{(2)}(\mathbf{s}'')}P_{\mu j}(\mathbf{s}'',\mathbf{s}')\,d\omega''$$

$$Cp_j = 0 \quad (\mathbf{s}\in\omega;\ \mathbf{s}'\in\overline{\Omega}';\ j=1,\ldots,n) \qquad Cp^i = 0 \quad (\mathbf{s}\in\overline{\Omega};\ \mathbf{s}'\in\omega';\ i=1,\ldots,n)$$

Оптимальное управление имеет следующий вид:

$$f_{2j}^{\circ}(\mathbf{s},t) = \frac{1}{Q_j^{(2)}(\mathbf{s})}\int_{\Omega}P_{jk}(\mathbf{s},\mathbf{s}')\,u_k(\mathbf{s}',t)\,d\Omega' \quad (\mathbf{s}\in\omega;\ t\geqslant 0;\ j=1,\ldots,n) \tag{4.5}$$

5. Рассмотрим задачу на конечном интервале времени. Введем следующий функционал:

$$\Pi_{\alpha}[\mathbf{u}(\mathbf{s},t),t] = \min_{\mathbf{f}_{\alpha}}\left\{\int_t^{\tau}W_{\alpha}d\eta + W^{(3)}\right\} \quad (\alpha=1,2) \tag{5.1}$$

Для определения $\Pi_{\alpha}[\mathbf{u}(\mathbf{s},t),t]$ ($\alpha=1,2$) получим уравнение

$$-\frac{\partial\Pi_{\alpha}}{\partial t} = \min_{\mathbf{f}_{\alpha}}\left\{W_{\alpha} + \delta_u\,\Pi_{\alpha}[\mathbf{u}(\mathbf{s},t),t]\,\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \quad (\alpha=1,2)$$

Положив $t = \tau$, из (5.1) получим

$$\Pi_\alpha [\mathbf{u}(\mathbf{s}, \tau)\,\tau] = W^{(3)} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

Предположим, что решение функционального уравнения имеет вид

$$\Pi_\alpha [\mathbf{u}(\mathbf{s}, t), t] = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \mathbf{u}'(\mathbf{s}, t)\, P_\alpha(\mathbf{s}, \mathbf{s}', t)\, \mathbf{u}(\mathbf{s}', t)\, d\Omega\, d\Omega' \quad (\alpha = 1, 2)$$

где $P_\alpha(\mathbf{s}, \mathbf{s}', t)$ $(\alpha = 1,2)$ — симметрическая по $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$ квадратная $n \times n$-матрица.

Так же, как и в предыдущем параграфе, найдем, что оптимальные управления $\mathbf{f}_1{}^\circ$ и $\mathbf{f}_2{}^\circ$ будут иметь вид (4.4) и (4.5) соответственно на интервале времени $[0, \tau]$, а для определения матриц $P_\alpha(\mathbf{s}, \mathbf{s}', t)$ $(\alpha = 1,2)$ получим следующие уравнения:

1°. Первая краевая задача

$$-\partial P/\partial t = L_{ss'}^* P + Q - P^{(1)} \qquad (\mathbf{s} \in \Omega, \mathbf{s}' \in \Omega', t \in [0, \tau))$$

$$P(\mathbf{s}, \mathbf{s}', t) = 0 \quad (\mathbf{s} \in \omega, \mathbf{s}' \in \overline{\Omega}', t \in [0, \tau)), \quad P(\mathbf{s}, \mathbf{s}', t) = 0 \quad (\mathbf{s} \in \overline{\Omega}, \mathbf{s}' \in \omega', t \in [0, \tau))$$

$$P(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \tau) = Q^\tau(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \qquad (\mathbf{s} \in \overline{\Omega}, \mathbf{s}' \in \overline{\Omega}', t = \tau)$$

2°. Вторая краевая задача

$$-\partial P/\partial t = L_{ss'}^* P + Q - P^{(2)} \qquad (\mathbf{s} \in \Omega, \mathbf{s}' \in \Omega', t \in [0, \tau))$$

$$C\mathbf{p}_j = 0 \quad (\mathbf{s} \in \omega;\ \mathbf{s}' \in \overline{\Omega}';\ t \in [0, \tau);\ j = 1, \ldots, n)$$

$$C\mathbf{p}^i = 0 \quad (\mathbf{s} \in \overline{\Omega};\ \mathbf{s}' \in \omega';\ t \in [0, \tau);\ i = 1, \ldots, n)$$

$$P(\mathbf{s}, \mathbf{s}', \tau) = Q^\tau(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \qquad (\mathbf{s} \in \overline{\Omega},\ \mathbf{s}' \in \overline{\Omega},\ t = \tau)$$

6. Пример. Рассмотрим задачу регулирования температуры стержня на конечном интервале времени

$$\partial u/\partial t = a^2 \partial^2 u/\partial s^2 \qquad (0 < s < 1,\ 0 < t \leqslant \tau) \tag{6.1}$$

$$u(s, 0) = u_0(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant 1,\ t = 0), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = f(t) \quad (0 < t \leqslant \tau)$$

где $u(s, t)$ — рассогласование температуры, $f(t)$ — управление.

Минимизируемый функционал примем в виде (1.8), где

$$W^{(1)} = \int_0^1\!\!\int_0^1 u(s, t)\, Q(s, s')\, u(s', t)\, ds ds', \qquad W^{(2)} = f^2(t)$$

$$W^{(3)} = \int_0^1\!\!\int_0^1 u(s, \tau)\, Q^\tau(s, s')\, u(s', \tau)\, ds ds'$$

Определив явный вид оператора A_e, перепишем (6.1) следующим образом:

$$\partial u/\partial t = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - a^2 \delta'(s - 1)\, f(t)$$

$$u(s, 0) = u_0(s), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Здесь $\delta'(s - 1)$ — производная по s от дельта-функции $\delta(s - 1)$.

Функционал J^τ, как и прежде, имеет вид (1.8), однако $W^{(2)}$ перепишем в виде

$$W^{(2)} = f^2(t) \int_0^1 \delta(s - 1)\, ds$$

Предположим, что $\Pi[u(s, t), t]$ имеет вид

$$\Pi\,[u\,(s, t), t] = \int_0^1\int_0^1 u\,(s, t)\,P\,(s, s', t)\,u\,(s', t)\,ds ds'$$

Уравнению (4.3), с учетом нулевых граничных условий для $P(s, s', t)$, соответствует следующее уравнение:

$$\min_f \left\{\int_0^1\int_0^1 u\left(\frac{\partial P}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + a^2\frac{\partial^2 P}{\partial s'^2} + Q\right) u ds ds' + f^2\int_0^1 \delta\,(s-1)\,ds + 2a^2 f \times \right.$$

$$\left.\times \int_0^1\int_0^1 \delta'\,(s-1)\,Pu ds ds'\right\} = 0 \tag{6.2}$$

Оптимальное управление имеет вид

$$f^\circ\,(t) = a^2\int_0^1 \frac{\partial P\,(s, s')}{\partial s}\bigg|_{s=1} u\,(s', t)\,ds' \tag{6.3}$$

Подставив (6.3) в (6.2), найдем уравнение для $P(s, s', t)$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial s'^2}\right) + Q - a^4\,\frac{\partial P\,(s, s'', t)}{\partial s''}\,\frac{\partial P\,(s'', s', t)}{\partial s''}\bigg|_{s''=1}$$

$$(0 < s < 1,\ 0 < s' < 1,\ 0 \leqslant t < \tau)$$

$$P(s, s', t) = 0 \qquad (s = 0,\ 1;\ 0 \leqslant s' \leqslant 1;\quad 0 \leqslant t < \tau)$$

$$P(s, s', t) = 0 \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1;\ s' = 0{,}1;\ 0 \leqslant t < \tau)$$

$$P(s, s', \tau) = Q^\tau\,(s, s') \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant s' \leqslant 1,\ t = \tau)$$

Оператор $L^*_{ss'}$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$L^*_{ss'}\,(\cdot) = a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial s'^2}\right)(\cdot)$$

Будем искать $P(s, s', t)$ в виде разложения по собственным функциям оператора $L^*_{ss'}$

$$P\,(s, s', t) = A_{\alpha\beta}\,(t)\sin\alpha\pi s\sin\beta\pi s' \tag{6.4}$$

Здесь, как и в дальнейшем, суммирование по индексам α, β, σ, и γ производится от единицы до ∞.

Пусть $Q\,(s, s')$ и $Q^\tau\,(s, s')$ имеют следующие разложения по собственным функциям:

$$Q\,(s, s') = q_{\alpha\beta}\sin\alpha\pi s\sin\beta\pi s', \qquad Q^\tau\,(s, s') = q^\tau_{\alpha\beta}\sin\alpha\pi s\sin\beta\pi s' \tag{6.5}$$

Для определения коэффициентов $A_{\alpha\beta}\,(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа Рикатти:

$$-dA_{\alpha\beta}/dt = q_{\alpha\beta} - a^2\pi^2\,(\alpha^2 + \beta^2)\,A_{\alpha\beta} - a^4\,(-1)^{\sigma+\gamma}\sigma\gamma\pi^2 A_{\alpha\sigma}A_{\gamma\beta}$$

$$(0 \leqslant t < \tau;\ \alpha,\ \beta = 1{,}2{,}\ldots)$$

$$A_{\alpha\beta}\,(\tau) = q^\tau_{\alpha\beta} \qquad (t = \tau;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$$

Для практических целей следует ограничиться конечным числом членов в разложениях (6.4), (6.5). В случае, если ограничимся одним членом в разложениях (6.4), (6.5), получим для определения $A_{11}(t)$ следующее уравнение:

$$-dA_{11}/dt = q_{11} - 2a^2\pi^2 A_{11} - a^4\pi^2 A_{11}^2, \qquad A_{11}(\tau) = q_{11}^\tau$$

Его решение имеет вид

$$A_{11}(t) = b + \frac{1}{b_1 + b_2 e^{\psi(t)}}, \qquad b = -\frac{1 - \sqrt{1 + q_{11}\pi^{-2}}}{a^2}$$

$$b_1 = -\frac{a^2}{2(1 + a^2 b)}, \qquad b_2 = \frac{1}{q_{11}{}^{\tau} - b} - b^1, \qquad \psi(t) = 2\pi^2 a^2 (1 + a^2 b)(\tau - t)$$

Автор благодарит А. М. Летова за полезные обсуждения.

Поступила 17 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1, изд. 3-е, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. Friedman B. Principles and Techniques of Appl. Math. N. Y., Wiley; L. Chapman. 1956.
3. Brogan W. L. Optimal Control Theory Applied to Systems Described by Partial Differential Equations. In: Adv. in Control Systems, vol. 6, N. Y., London, Acad. Press, 1968.
4. Brogan W. L. Dynamic Programming and a Distributed Parameter maximum Principle. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engr. 1968, vol. 90, No 2. (Рус. пер. Теорет. основы инж. расчетов, 1968, № 2).
5. Бутковский А. Г. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 10.
6. Сиразетдинов Т. К. К аналитическому конструированию регуляторов в процессах с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 9.
7. Сиразетдинов Т. К. Об аналитическом конструировании регуляторов в процессах с распределенными параметрами. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, 1968, т. 27.
8. Сиразетдинов Т. К. Об оптимальном управлении упругими летательными аппаратами. Автоматика и телемеханика, 1966, № 7.
9. Erzberger H., Kim M. Optimum Boundary Control of Distributed Parameter Systems. Information and Control, 1966, vol. 9, No 3.
10. Белман Р. Динамическое программирование, М., Изд-во иностр. лит, 1960.