Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. С. Пацко

(Свердловск)

Определяются оптимальные управления обратной связи в одной дифференциальной игре наведения второго порядка. Исследуемая задача не относится к классу дифференциальных игр, для которых в настоящее время известны методы построения оптимальных управлений.

§ 1. Рассмотрим управляемую систему

$$dx_1/dt = -\lambda_1 x_1 + u + p_1 + v \quad (\lambda_2 > \lambda_1 > 0) \tag{1.1}$$
$$dx_2/dt = -\lambda_2 x_2 + ku + p_2 + lv \quad (k > 0,\ l < 0)$$

Здесь x_1, x_2 — компоненты двумерного фазового вектора x; p_1, p_2 — произвольные числа; u и v — соответственно управления первого и второго игроков, стесненные ограничениями

$$|u(t)| \leqslant \mu, \quad \mu > 0, \qquad |v(t)| \leqslant \nu, \quad \nu > 0 \tag{1.2}$$

Цель работы — найти способ поведения первого (второго) игрока по принципу обратной связи, гарантирующий ему наименьшее (наибольшее) время перевода системы (1.1) из произвольной позиции x_0 на плоскости X в начало координат при любом поведении второго (первого) игрока.

Условимся под термином «реализация $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$» понимать измеримую функцию времени $u(t)$ $(v(t))$, $t_0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющую при любом t ограничению (1.2) и возбуждаемую первым (вторым) игроком в процессе игры каким-либо способом.

Под термином «программа $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$» будем понимать измеримую функцию времени $u(t)$ $(v(t))$, удовлетворяющую при любом t ограничению (1.2) и заданную априори на интервале $t_0 \leqslant t < \infty$.

Сформулируем задачу с позиции первого игрока. Будем считать, что первый игрок при $t \geqslant t_0$ может столкнуться с любой реализацией $v(\cdot)$. Свое управление первый игрок обязан строить по принципу обратной связи в дискретной форме с помощью функций $u[x]$, $\delta[x]$. Дискрет времени $\delta[x] > 0$ определяет величину полуинтервала $t^* \leqslant t < t^* + \delta[x[t^*]]$, в течение которого управление u держится постоянным. Оно зависит от позиции $x[t^*]$, где выбирается по функции $u[x]$.

Функции $u[x]$, $\delta[x]$ назовем допустимыми, если всегда при возникновении ситуации, когда моменты переключения управления u стремятся слева к пределу t_*, не совпадающему с моментом попадания фазовой точки в начало координат, решение системы (1.1) можно продолжить при $t \geqslant t_*$ и если число таких моментов t_* не может быть бесконечным на любом конечном отрезке времени. Пару, состоящую из функции $u[x]$ и последовательности $(\delta_n[x])$, назовем тактикой первого игрока и обозначим $\{u, \delta\}$.

Скажем, что тактика $\{u, \delta\}$ допустима, если при любом n допустимы функции $u[x]$, $\delta_n[x]$.

Задача 1. Найти оптимальную допустимую тактику $\{u^\circ, \delta^\circ\}$, для которой при любой начальной позиции x_0 и любых допустимых функциях $u[x]$, $\delta[x]$ выполняется неравенство

$$T_u[x_0] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{v(\cdot)} T[x_0; u^\circ, \delta_n^\circ, v(\cdot)] \leqslant \sup_{v(\cdot)} T[x_0; u, \delta, v(\cdot)]$$

Здесь $T[x_0; u, \delta, v(\cdot)]$ — время перевода системы (1.1) из точки x_0 в начало координат при функциях $u[x]$, $\delta[x]$ и реализации $v(\cdot)$. Точная верхняя грань берется по всем возможным реализациям $v(\cdot)$. Черта над знаком предела означает точный верхний предел.

Сформулируем задачу с позиции второго игрока. Будем считать, что второй игрок при $t \geqslant t_0$ может столкнуться с любой реализацией $u(\cdot)$. Свое управление второй игрок обязан строить по принципу обратной связи в дискретной форме с помощью функции $v[x]$ и дискрета времени $\Delta > 0$. Дискрет Δ не зависит от x и определяет величину полуинтервала $t^* \leqslant t < t^* + \Delta$, в течение которого управление v держится постоянным. Оно зависит от позиции $x[t^*]$, где выбирается по функции $v[x]$.

Фиксируем произвольную убывающую последовательность (Δ_n), сходящуюся к нулю.

Задача 2. Найти оптимальную функцию $v^\circ[x]$, для которой при любой начальной позиции x_0 и любых $v[x]$, Δ выполняется неравенство

$$T_v[x_0] = \underline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{u(\cdot)} T[x_0; v^\circ, \Delta_n, u(\cdot)] \geqslant \inf_{u(\cdot)} T[x_0; v, \Delta, u(\cdot)]$$

Здесь $T[x_0; v, \Delta, u(\cdot)]$ — время перевода системы (1.1) из точки x_0 в начало координат при функции $v[x]$, дискрете Δ и реализации $u(\cdot)$. Точная нижняя грань берется по всем возможным реализациям $u(\cdot)$. Черта под знаком предела означает точный нижний предел.

Отметим очевидное неравенство

$$T_v[x_0] \leqslant T_u[x_0], \qquad x_0 \in X \tag{1.3}$$

§ 2. Оговорим некоторые обозначения и определения, сформулируем условия (леммы 2.1 и 2.2, доказательства опущены), при которых время $T_u[x_0] = \infty$.

Обозначим буквой V отрезок, состоящий из точек x с координатами $x_1 = p_1 + v$, $x_2 = p_2 + lv$, $|v| \leqslant \nu$. Начало координат обозначим через m.

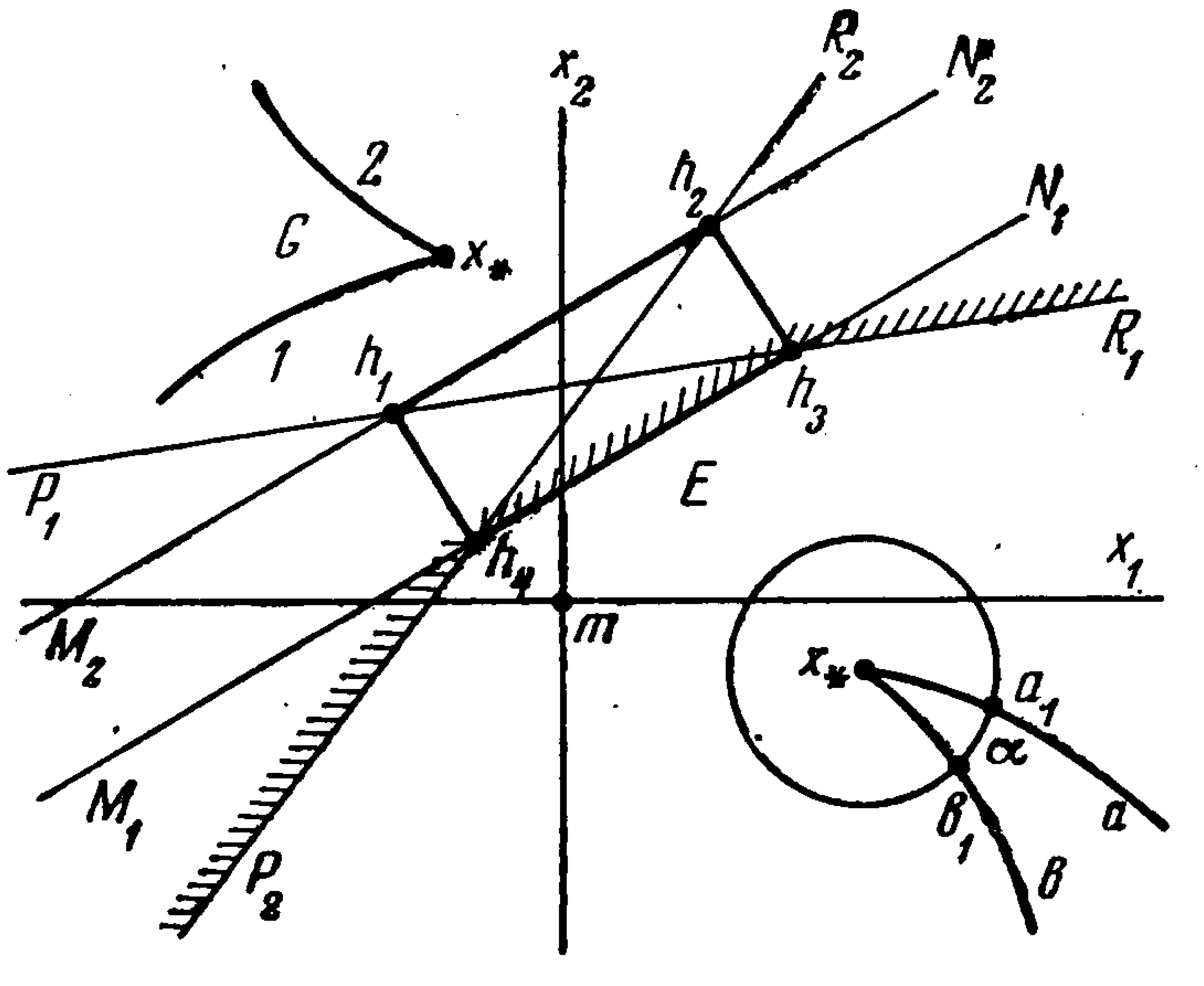
Лемма 2.1. Если отрезок V пересекается прямой $x_2 = kx_1$, то для любой начальной позиции $x_0 \neq m$ время $T_v[x_0] = T_u[x_0] = \infty$.

Учитывая этот результат, будем считать в дальнейшем, что отрезок V лежит строго по одну сторону от прямой $x_2 = kx_1$. Допустим для определенности, что он находится от нее строго слева.

Фазовая картина системы (1.1) при $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ является устойчивым узлом с положением равновесия в точке

$$h(u, v) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1}(u + p_1 + v) \\ \lambda_2^{-1}(ku + p_2 + lv) \end{pmatrix}$$

Обозначим через h_1, h_2, h_3, h_4 соответственно точки $h(-\mu, \nu)$, $h(\mu, \nu)$, $h(\mu, -\nu)$, $h(-\mu, -\nu)$ (фиг. 1). Скажем, что система (1.1) притягивается в момент t к точке $h(u^*, v^*)$, если в этот момент вектор скорости $x^\cdot(t)$ совпадает с вектором скорости системы (1.1) при движении ее из точки $x(t)$ в силу $u = u^*$, $v = v^*$.



Фиг. 1

Стало быть, если в момент t реализуются значения $u(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющие ограничению (1.2), то в этот момент система (1.1) притягивается к точке $h(u(t), v(t))$, принадлежащей параллелограмму $h_1h_2h_3h_4$.

Назовем полосой V объединение по v, $|v| \leqslant \nu$, параллельных прямых (2.1)

$$k\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + p_2 + lv - kp_1 - kv = 0$$

каждая из которых проходит через точки $h(-\mu, v)$ и $h(\mu, v)$. Нижнюю (верхнюю) граничную прямую полосы обозначим через M_1N_1 (M_2N_2). Часть плоскости X, лежащую строго ниже прямой M_1N_1, обозначим X_1. Утверждение: точка m принадлежит множеству X_1, эквивалентно утверждению: отрезок V лежит строго слева от прямой $x_2 = kx_1$.

Через точки h_1, h_3 и h_2, h_4 проведем соответственно прямые P_1R_1 и P_2R_2. С помощью этих прямых выделим в X_1 множество E (фиг. 1). В E включим пересечение прямой P_1R_1 (P_2R_2) с X_1, если угловой коэффициент этой прямой конечен и отрицателен (положителен); в противном случае это пересечение не будем включать в E.

Лемма 2.2. Пусть $m \in X_1 \setminus E$. Тогда для любой начальной позиции $x_0 \neq m$ время $T_u[x_0] = \infty$. Время $T_v[x_0] = \infty$ для любого $x_0 \neq m$, за исключением начальных позиций на положительной части оси x_1 и отрицательной части оси x_2. Для начальных позиций на положительной (отрицательной) части оси x_1 (x_2) время $T_v[x_0] < \infty$, если прямая P_1R_1 (P_2R_2) совпадает с осью x_1 (x_2); в противном случае $T_v[x_0] = \infty$.

Пусть x_*a и x_*b — две гладкие без самопересечений кривые, исходящие из одной точки x_* и не совпадающие в пределах некоторой окрестности этой точки (фиг. 1). Предположим также, что угол между векторами, касательными к кривым x_*a и x_*b в точке x_* отличен от π; считается, что каждый касательный вектор направлен в сторону движения по своей кривой от точки x_*. При перечисленных условиях существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого положительного $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ окружность радиуса ε с центром в точке x_* пересекается с каждой из кривых x_*a, x_*b только в одной точке и угол α с вершиной в точке x_*, опирающийся на дугу окружности между точками пересечения, отличен от 0 и π.

Обозначим точку пересечения окружности с кривой x_*a (x_*b) через a_1 (b_1). Будем считать, что угол α отсчитывается по часовой стрелке от точки a_1. Скажем, что между кривыми x_*a и x_*b осуществляется соотношение $x_*a < x_*b$ ($x_*a > x_*b$), если хотя бы при одном $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ угол α меньше (больше) π. Кривую x_*a назовем в этом случае левой (правой) относительно кривой x_*b.

Введем понятие крайних кривых. Рассмотрим прямоугольник H_1 (H_2), диагональю которого является отрезок $[h_2, h_3]$ ($[h_1, h_4]$), а стороны параллельны осям координат. Пересечение множества H_1 (H_2) с внутренностью полосы V обозначим через F_1 (F_2). Пусть x_* — любая точка плоскости, не принадлежащая F_1 (F_2). Построим множество $G_1(x_*)$ ($G_2(x_*)$), состоящее из всех точек плоскости, в которые можно перевести из x_* систему

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau &= \lambda_1 x_1 - u - p_1 - v \qquad (|u(\tau)| \leqslant \mu, \quad |v(\tau)| \leqslant \nu) \\ dx_2/d\tau &= \lambda_2 x_2 - ku - p_2 - lv \end{aligned} \tag{2.2}$$

при помощи программ $v(\tau)$, $\tau_0 \leqslant \tau < \infty$, при $u = \mu$ ($u = -\mu$). Система (2.2) соответствует системе (1.1) в обратном времени $\tau = -t$.

Замыкание $\bar{G}_1(x_*)$ ($\bar{G}_2(x_*)$) множества $G_1(x_*)$ ($G_2(x_*)$) будет представлять собою криволинейный конус с вершиной в точке x_* (т. е. множество, ограниченное двумя кривыми, исходящими из одной точки x_* и не пересекающимися вне этой точки) с гладкими границами и углом при вершине, не равном π.

Крайней кривой $r^{(1)}(x_*, \mu)$ ($r^{(1)}(x_*, -\mu)$) назовем ту из границ конуса $\bar{G}_1(x_*)$ ($\bar{G}_2(x_*)$), которая является левой кривой относительно второй границы, вторую границу конуса назовем крайней кривой $r^{(2)}(x_*, \mu)$ ($r^{(2)}(x_*, -\mu)$). На фиг. 1 для некоторой точки x_* построен конус $\bar{G}_1(x_*)$. Он обозначен через G, цифрой *1* обозначена кривая $r^{(1)}(x_*, \mu)$, цифрой *2* — кривая $r^{(2)}(x_*, \mu)$.

Через $[ab)$ обозначим множество всех точек дуги ab, включая точку a и не включая b. Подобным же образом введем множества (ab), $[ab]$, $(ab]$.

§ 3. На протяжении §§ 3, 4 будем считать, что множество E содержит в себе точку m. При таком условии справедливо соотношение $r^{(1)}(m, \mu) > r^{(2)}(m, -\mu)$.

Опишем содержательно некоторое множество A. Из дальнейшего будет ясно, что оно является максимальным множеством, для любой точки x_0 которого время $T_u[x_0] < \infty$.

Все возможные варианты расположения отрезков $[h_1, h_4]$ и $[h_2, h_3]$ (при условии $m \in E$), разобьем на три группы (в скобках даются эквивалентные определения).

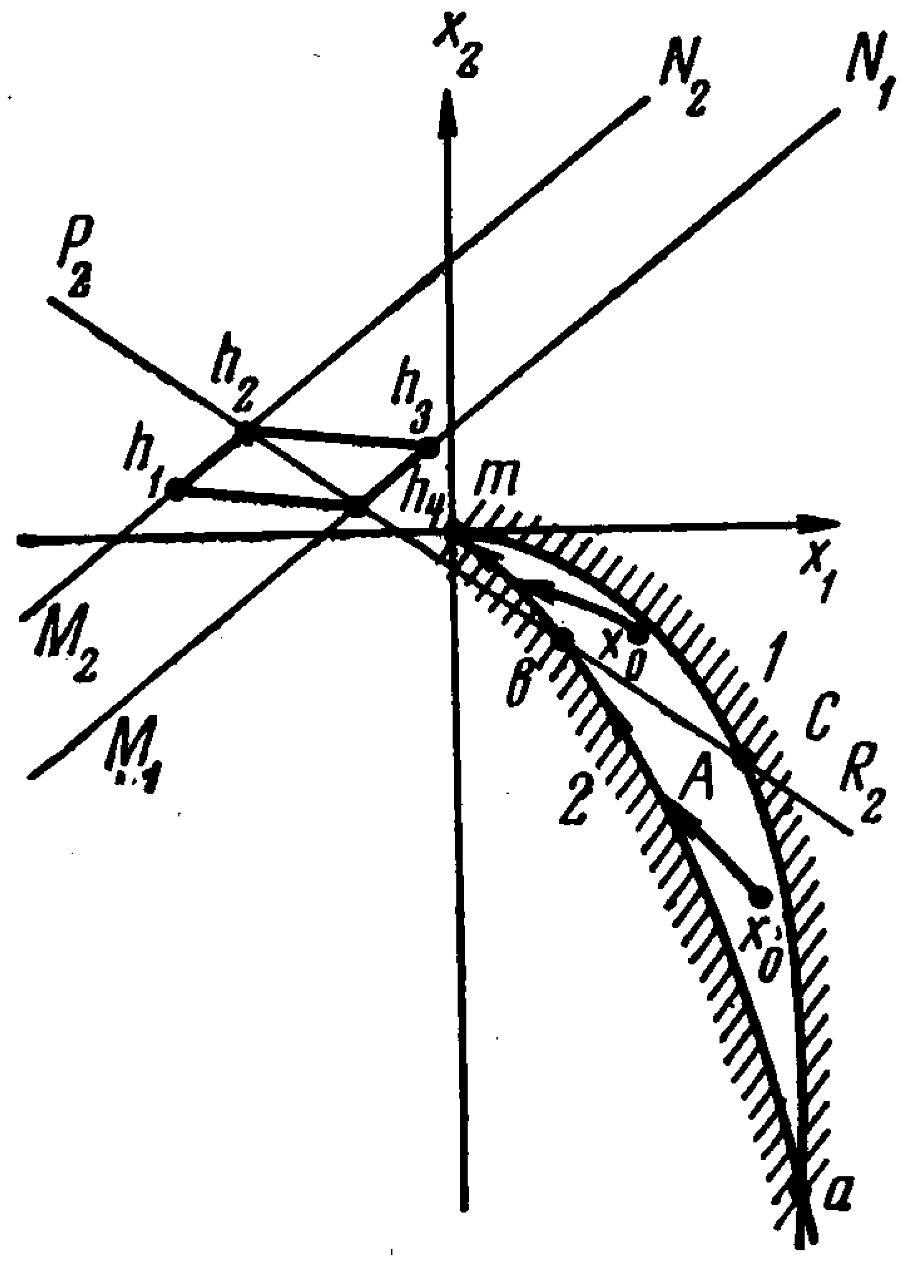
1. Отрезок $[h_1, h_4]$ лежит выше, но не обязательно строго, оси x_1 (кривые $r^{(1)}(m, \mu)$, $r^{(2)}(m, -\mu)$ не пересекаются полосой V).

2. Отрезок $[h_1, h_4]$ лежит строго ниже, а точка h_3 — не ниже оси x_1 (кривая $r^{(1)}(m, \mu)$ не пересекается, а кривая $r^{(2)}(m, -\mu)$ пересекается полосой V).

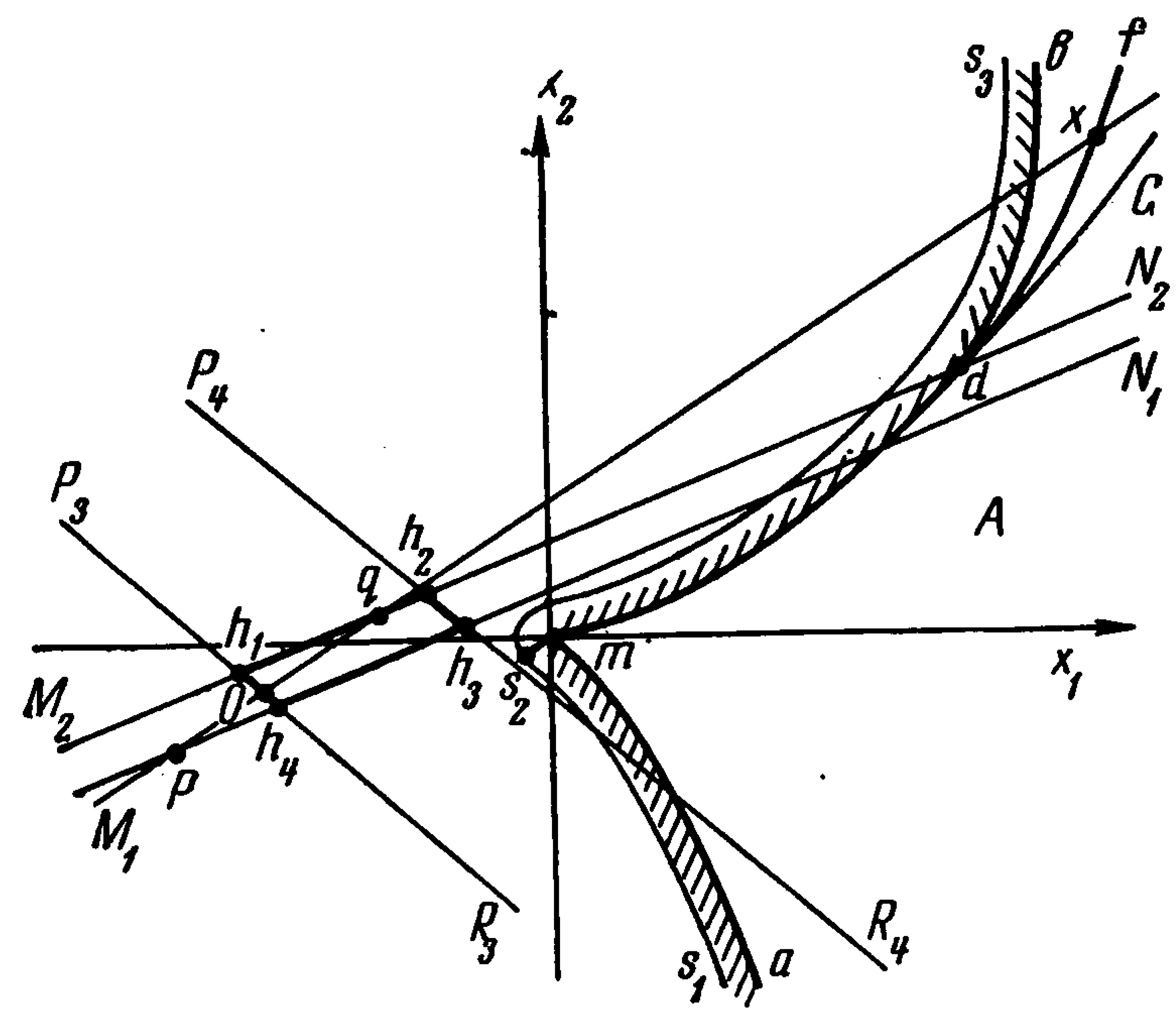
3. Отрезок $[h_1, h_4]$ и точка h_3 лежат строго ниже оси x_1 (кривая $r^{(1)}(m, \mu)$ пересекается полосой V).

Первую группу разделим на два случая: 1.1. Кривые $r^{(1)}$ (m, μ) и $r^{(2)}$ $(m, -\mu)$ пересекаются вне точки m; 1.2. Кривые $r^{(1)}(m, \mu)$ и $r^{(2)}(m, -\mu)$ вне точки m не пересекаются.

Случай 1.1 возможен лишь тогда, когда обе кривые $r^{(1)}$ (m, μ) и $r^{(2)}$ $(m, -\mu)$ проходят в четвертом квадранте и пересекаются вне точки m прямой P_2R_2; точки пересечения обозначим соответственно через b и c. Отличная от m точка пересечения кривых $r^{(1)}$ (m, μ), $r^{(2)}$ $(m, -\mu)$ — единственна и лежит ниже прямой P_2R_2; обозначим ее через a. Множество A — замкнутое множество, ограниченное кривой $mcabm$. Типичное строение его показано на фиг. 2. Цифрами *1*, *2* обозначены соответственно кривые $r^{(2)}(m, -\mu)$, $r^{(1)}$ (m, μ).



Фиг. 2



Фиг. 3

Случай 1.2. За A примем замкнутый криволинейный конус, ограниченный кривыми $r^{(1)}$ (m, μ) и $r^{(2)}$ $(m, - \mu)$.

Обратимся ко второй группе. Прежде всего заметим, что кривая $r^{(2)}$ $m, -\mu)$ пересекает прямую M_2N_2; пусть d — точка пересечения. Разделим вторую группу на три случая: 2.1. Точка d лежит на прямой M_2N_2 справа от точки h_2; 2.2. Точки d и h_2 совпадают; 2.3. Точка d лежит на прямой M_2N_2 слева от точки h_2.

В случаях 2.1 (фиг. 3), 2.2 построим кривую $r^{(2)}$ (d, μ) и обозначим ее db. Через ma (dc) обозначим кривую $r^{(1)}$ (m, μ) $(r^{(2)}$ $(d, -\mu))$. Пусть A_1 (A_2) — замкнутый криволинейный конус, ограниченный кривыми mdc и ma $(db$ и $dc)$. Положим $A = A_1 \cup A_2$.

Особенность *случая* 2.3 состоит в том, что отрезки $[h_1, h_4]$, $[h_2, h_3]$ лежат строго по разные стороны относительно объединения кривых $r^{(1)}$ (m, μ) и $r^{(2)}(m, -\mu)$. В этом случае $A = X$.

Из определения третьей группы следует, что обе кривые $r^{(1)}$ (m, μ) и $r^{(2)}$ $(m, -\mu)$ пересекают полосу V. Обозначим через e (d) точку пересечения кривой $r^{(1)}$ (m, μ) $(r^{(2)}$ $(m, -\mu))$ с прямой M_1N_1 (M_2N_2). Построим кривые $r^{(1)}$ $(e, -\mu)$ и $r^{(2)}$ (d, μ). Разделим третью группу на четыре случая.

3.1. Кривые $r^{(1)}(m, \mu)$ и $r^{(2)}(m, -\mu)$ пересекаются в множестве $\overline{X}_1$ вне точки m.

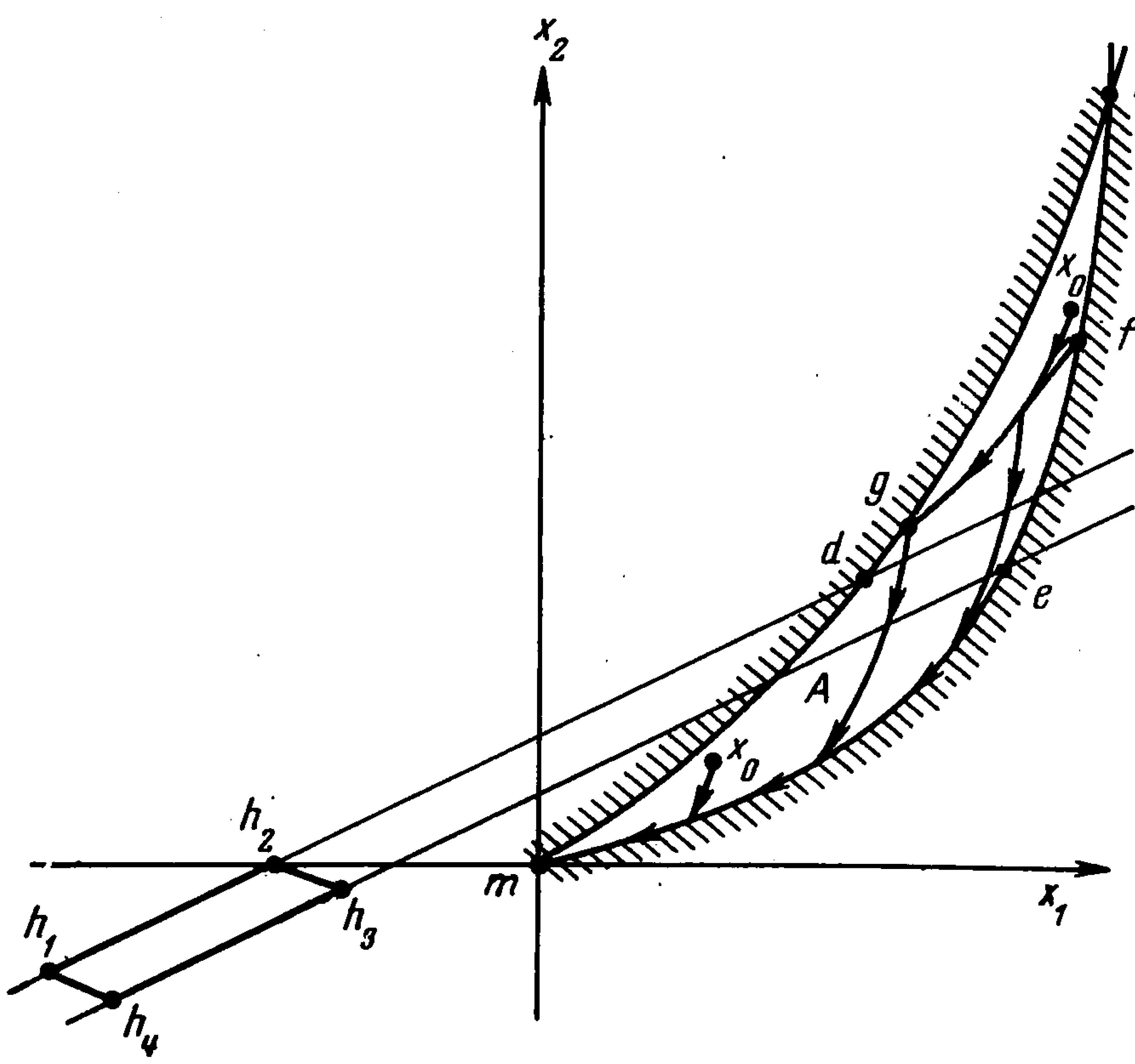
3.2. Кривые $r^{(2)}(m, -\mu)$ и $r^{(1)}(e, \mu)$ пересекаются в пределах полосы V вне точки e.

3.3. Кривые $r^{(2)}(d, \mu)$ и $r^{(1)}(e, -\mu)$ пересекаются вне точки d.

3.4. Кривые $r^{(1)}(m, \mu)$ и $r^{(2)}(m, -\mu)$ не пересекаются в множестве $\overline{X}_1$ вне точки m, кривые $r^{(2)}(m, -\mu)$ и $r^{(1)}(e, \mu)$ не пересекаются в пределах полосы V, кривые $r^{(2)}(d, \mu)$ и $r^{(1)}(e, -\mu)$ не пересекаются.

Случай 3.1 возможен лишь тогда, когда кривые $r^{(1)}(m, \mu)$ и $r^{(2)}(m, -\mu)$ пересекаются вне точки m прямой P_1R_1; точки пересечения обозначим соответственно через b и c. Отличная от m точка пересечения кривых $r^{(1)}(m, \mu), r^{(2)}(m, -\mu)$ — единственна и лежит выше прямой P_1R_1, обозначим ее через a. Множество A — замкнутое множество, ограниченное кривой $mcabm$.

В случае (3.2, 3.3) через a обозначим точку пересечения кривых $r^{(2)}(m, -\mu)$ и $r^{(1)}(e, \mu)$ ($r^{(2)}(d, \mu)$ и $r^{(1)}(e, -\mu)$). Множество A представляет собой замкнутое множество, ограниченное кривой $maem$ ($mdaem$). Множество A для случая 3.3 показано на фиг. 4.



Фиг. 4

Случай 3.4. Обозначим через A_1, A_2, A_3 соответственно замкнутые криволинейные конусы, границами которых служат кривые $r^{(2)}(m, -\mu)$ и $r^{(1)}(m, \mu)$, $r^{(2)}(d, \mu)$ и $r^{(2)}(d, -\mu)$, $r^{(1)}(e, \mu)$ и $r^{(1)}(e, -\mu)$. Множество $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3$.

Для любого из описанных случаев справедливо утверждение.

Лемма 3.1. Для любой начальной позиции $x_0 \in B = X \setminus A$ время $T_v[x_0] = T_u[x_0] = \infty$.

Доказывается лемма путем построения оптимальной функции $v^\circ[x]$, $x \in B$, гарантирующей второму игроку время $T_v[x_0] = \infty$ для любой начальной позиции $x_0 \in B$. Бесконечность времени $T_u[x_0]$, $x_0 \in B$, следует при этом из неравенства (1.3).

Построение функции $v^\circ[x]$, $x \in B$, различно для различных случаев. В качестве примера приведем построение для случая 2.1.

В случае 2.1 граница множества A состоит из двух гладких кривых ma и mdb (фиг. 3). Проведем через точки h_2, h_3 прямую P_4R_4. Часть кривой ma (mdb), расположенная выше прямой P_4R_4 (M_2N_2), является траекторией системы (1.1) при $u = \mu$, $v = -\nu$ ($v = \nu$), а часть, расположенная ниже этой прямой — траекторией системы (1.1) при $u = \mu$ ($u = -\mu$), $v = \nu$.

Рассмотрим окрестность O множества A достаточно малого радиуса такую, чтобы отрезки $[h_1, h_4]$ и $[h_1, h_2]$ лежали вне этой окрестности. Пересечение границы окрестности O с траекторией движения системы (1.1) из точки m при $u = -\mu$, $v = -\nu$ обозначим через s_2. Границу окрестности O обозначим через $s_1 s_2 s_3$ (фиг. 3). Кривая $(ms_2]$ — часть указанной выше траектории, проходит в третьем квадранте вне множества A и вне полосы V. Множество $O \setminus A$ делится этой кривой на две части. Пусть F_1 — та из них, что прилегает к кривой ma, и $F_2 = (O \setminus A) \setminus F_1$. Кривую ms_2 включим в F_2. Если прямая $P_4 R_4$ пересекает множество F_1, обозначим через $F_1^{(1)}$ его подмножество, лежащее ниже этой прямой, и через $F_1^{(2)}$ — дополнение $F_1^{(1)}$ до F_1. Если пересечения нет, положим $F_1^{(1)} = F_1$.

Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения. 1) Если $x_0 = x(t_0) \in$ $\in (ms_2]$ и $v = \nu$ $(v = -\nu)$, то существует число $\Delta t > 0$, не зависящее от x_0, такое, что при любой реализации $u(\cdot)$ система (1.1) на интервале $[t_0, t_0 + \Delta t)$ будет двигаться вне множества $F_1 \cup A$.

Определим в множестве B функцию $v^\circ[x]$ следующим образом. В множестве $F_1 \cup F_2 \subset B$ положим

$$v^\circ[x] = \begin{cases} \nu, & \text{если } x \in F_2 \cup F_1^{(1)} \\ -\nu, & \text{если } x \in F_1^{(2)} \end{cases}$$

В множестве $B \setminus (F_1 \cup F_2)$ функцию $v^\circ[x]$ зададим произвольно.

Допустим, что в некоторый момент t система (1.1) находится в множестве $F_2 \cup F_1^{(1)}$ $(F_1^{(2)})$ и $v(t) = v^\circ[x(t)]$. Тогда при любом значении $u(t)$ она в этот момент будет притягиваться к одной из точек отрезка $[h_1, h_2]$ $([h_3, h_4])$. Опираясь на это свойство и учитывая описанный выше характер граничных кривых множества A, можно доказать следующее утверждение. 2) Пусть второй игрок применяет дискретную схему на основе функции $v^\circ[x]$ и пусть $x_0 \in F_1$ $(x_0 \in F_2)$. Тогда при шаге дискретной схемы $\Delta_n \leqslant$ $\leqslant \Delta(x_0)$, где $\Delta(x_0) > 0$ — достаточно малое число, система (1.1) при любой реализации $u(\cdot)$ выйдет за конечное время на кривую $(s_1 s_2 m)$ $([s_2 s_3))$, не попадая на границу множества A до момента выхода на указанную кривую.

Из утверждений 1), 2) следует, что если второй игрок применяет дискретную схему на основе функции $v^\circ[x]$, то система (1.1) из любой начальной позиции $x_0 \in F_1 \cup$ $\cup F_2$ при достаточно малом шаге дискретной схемы будет выноситься на кривую $s_1 s_2 s_3$, не попадая на границу множества A до момента выхода на кривую. На основе этого вывода можно показать, что при любом $x_0 \in B$ при достаточно малом шаге дискретной схемы попадание системы (1.1) на границу множества A (а значит и в множество A) при $t \geqslant t_0$ невозможно. Последнее и доказывает оптимальность функции $v^\circ[x]$, $x \in B$.

§ 4. Решим задачи 1, 2 для начальных позиций x_0 из множества A.

Разберем случай 2.1. Рассмотрим семейство L всевозможных траекторий системы (2.2) при $v = \nu$, начинающихся в точке d. Любая траектория этого семейства проходит в множестве A_2. Выберем произвольную траекторию из L и обозначим ее df (фиг. 3). Пусть C — максимальное замкнутое подмножество множества A, расположенное справа от кривой mdf, и $D = A \setminus C$.

Сформулируем вспомогательное правило формирования реализаций $u(\cdot)$ в множестве $A \setminus \{m\}$ по принципу обратной связи.

Правило 1. Значение $u(t)$ в момент t равно $-\mu$ (μ), если $x(t) \in C \setminus$ $\setminus ([ma) \cup (df))$ $(x(t) \in D)$. Если $x(t) \in (df)$, значение $u(t)$ выбирается по значению $v(t)$ из условия движения по этой кривой в направлении точки

d, если же такой выбор невозможен, полагается $u(t) = -\mu$. Если $x(t) \in (ma)$, $u(t)$ выбирается по $v(t)$ из условия движения по этой кривой в направлении точки m.

Поясним выбор значения $u(t)$ на кривых (df) и (ma). Из определения кривой df следует, что система (1.1), двигаясь по этой кривой к точке d при $v = \nu$, в каждый момент t притягивается к некоторой точке $q(t)$ отрезка $[h_1, h_2]$.

Проведем через точки $x(t)$ и $q(t)$ прямую. Отрезок $[p(t), q(t)]$ — пересечение этой прямой с полосой V не обязан целиком принадлежать параллелограмму $h_1h_2h_3h_4$. А именно, часть этого отрезка — интервал $[p(t), o(t))$ ($o(t)$ — точка пересечения отрезков $[h_1, h_4]$ и $[p(t), q(t)]$) может лежать слева от отрезка $[h_1, h_4]$ (фиг. 3). Интервал $[p(t), o(t))$ и выделяет те значения $v(t)$ (см. (2.1)), по каждому из которых нельзя подобрать значение $u(t)$, удовлетворяющее ограничению (1.2) и направляющее вектор $x^\cdot(t)$ по касательной к кривой df в сторону точки d.

Для таких значений $v(t)$ в правиле 1 положено $u(t) = -\mu$, тем самым вектор $x^\cdot(t)$ направляется во внутренность множества C. При значениях $v(t)$, соответствующих точкам отрезка $[o(t), q(t)]$, вектор $x^\cdot(t)$ может быть направлен по касательной к кривой df в сторону точки d. Наименьшая длина вектора $x^\cdot(t)$ будет при $v(t) = \nu$.

В любой точке $x(t) \in (ma)$ по любому $v(t)$ можно подобрать $u(t)$, направляющее вектор $x^\cdot(t)$ по касательной к ma в сторону точки m. Наименьшая длина касательного вектора $x^\cdot(t)$ будет при $v(t) = -\nu$.

Правило 1 позволяет при любой реализации $v(\cdot)$ перевести систему (1.1) из любой точки $x_0 \in A$ за конечное время в точку m, не выводя ее из множества A. (Напомним, что под реализацией $v(\cdot)$ понимается функция времени $v(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, возбуждаемая вторым игроком в процессе игры и не обязательно заданная априори). Время перевода обозначим через $T^{(1)}[x_0, v(\cdot)]$. Через $T^{(1)}[x_0]$ обозначим его точную верхнюю грань по всем возможным реализациям $v(\cdot)$.

Введем множество $U[x_0, v(\cdot) \mid A]$ ($U[x_0, v(\cdot) \mid D]$) программ $u(\cdot)$: программа $u(\cdot)$ принадлежит множеству $U[x_0, v(\cdot)|A]$ ($U[x_0, v(\cdot)|D]$), если, двигаясь из точки $x_0 \in C$ ($x_0 \in D$) в силу программ $v(\cdot)$ и $u(\cdot)$, система (1.1) попадает за конечное время $T_1[x_0; u(\cdot), v(\cdot)]$ ($T_2[x_0; u(\cdot), v(\cdot)]$) в точку m (на кривую df), не выходя до момента попадания из множества A (D).

Из множества всех возможных программ $v(\cdot)$ выделим множество $V[x_0 |C]$: программа $v(\cdot)$ принадлежит множеству $V[x_0|C]$, если, двигаясь из точки $x_0 \in C$ в силу этой программы при $u = -\mu$, система (1.1) не выходит из множества C до момента попадания на кривую ma.

Поставим вспомогательную задачу.

Задача 4.1. Найти кусочно-непрерывные справа программы $v^*(\cdot) \in V[x_0|C]$, $u^*(\cdot) \in U[x_0, v(\cdot)|A]$, удовлетворяющие соотношению

$$T_1[x_0] = \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} T_1[x_0; u(\cdot), v(\cdot)] = T_1[x_0; u^*(\cdot), v^*(\cdot)], \qquad x_0 \in C$$

где максимум берется по всем программам $v(\cdot) \in V[x_0|C]$, а минимум — по всем программам $u(\cdot) \in U[x_0, v(\cdot) \mid A]$.

Лемма 4.1. При любой начальной позиции $x_0 \in C$ решение задачи 4.1 единственно. При любом $x_0 \in C$ имеем $v^*(t) \equiv -\nu$, программа $u^*(\cdot)$ совпадает с реализацией $u(\cdot)$, формируемой по правилу 1 при $v(t) \equiv -\nu$. Программа $v^*(\cdot)$ удовлетворяет соотношению

$$T^{(1)}[x_0, v^*(\cdot)] = \max_{v(\cdot)} T^{(1)}[x_0, v(\cdot)], \quad x_0 \in C \tag{4.1}$$

где максимум берется по всем программам $v(\cdot) \in V[x_0|C]$.

Доказательство. Движение системы (1.1) в силу программ $v^*(\cdot)$ и $u^*(\cdot)$, указанных в формулировке леммы, обозначим через $x^\circ(t)$ и назовем эталонным.

1. Докажем соотношение (4.1). Допустим, что первый игрок использует правило 1. Пусть $x_0 = x(t_0) \in C \setminus [ma)$. Обозначим через $t[x_0, v(\cdot)]$ первый момент попадания системы (1.1) на кривую ma. Фиксируем произвольную программу $v(\cdot) \in V[x_0|C]$. Движение $x(t)$ системы (1.1) в силу этой программы и правила 1 назовем фазовым (чтобы отличить от эталонного).

Положим $t[x_0] = \max\{t[x_0, v(\cdot)], t[x_0, v^*(\cdot)]\}$. Покажем, что в момент $t[x_0]$ точка $x(t[x_0])$ расположена на кривой ma по отношению к точке m не дальше точки $x^\circ(t[x_0])$ (обозначение: $x(t[x_0]) \leqslant x^\circ(t[x_0])$). Из этого утверждения вследствие очевидной справедливости соотношения (4.1) для $x_0 \in (ma)$ будет вытекать справедливость этого соотношения для любого $x_0 \in C$.

Проведем через точки h_1, h_4 прямую P_3R_3 (фиг. 3). Пусть $C^{(1)}$ ($C^{(2)}$) — часть множества C, лежащая выше (ниже) этой прямой. Пересечение прямой P_3R_3 с множеством C включим в $C^{(1)}$.

Предположим, что $x_0 \in C^{(1)}$. Эталонное движение на интервале $[t_0, t[x_0, v^*(\cdot)])$ будет притягиваться к точке h_4, фазовое в любой момент $t \in [t_0, t[x_0, v(\cdot)])$ — к некоторой точке (зависящей от t) отрезка $[h_1, h_4]$.

Отсюда с учетом характера ориентации отрезка $[h_1, h_4]$ получаем, что при $t \geqslant t_0$ оба движения будут проходить в $C^{(1)}$ и точки попадания их на кривую ma связаны соотношением $x(t[x_0, v(\cdot)]) \leqslant x^\circ(t[x_0, v^*(\cdot)])$.

Следовательно, для доказательства сделанного утверждения нужно лишь рассмотреть случай $t[x_0, v^*(\cdot)] < t[x_0, v(\cdot)]$. Возможен он только тогда, когда кривая ma монотонно убывает по x_1.

В этом случае при любом $t \in [t[x_0, v^*(\cdot)], t[x_0])$ эталонное движение притягивается к некоторой точке из отрезка $[h_3, h_4]$, в то время как фазовое — к точке из отрезка $[h_1, h_4]$. Поэтому при любом $t \in [t_0, t[x_0])$ имеем $x_1^{\cdot}(t) \leqslant x_1^{\circ\cdot}(t)$, и значит $x_1(t[x_0]) \leqslant x_1^\circ(t[x_0])$. Так как оба движения находятся в момент $t[x_0]$ на кривой ma, отсюда (помня характер этой кривой) получаем: $x(t[x_0]) \leqslant x^\circ(t[x_0])$.

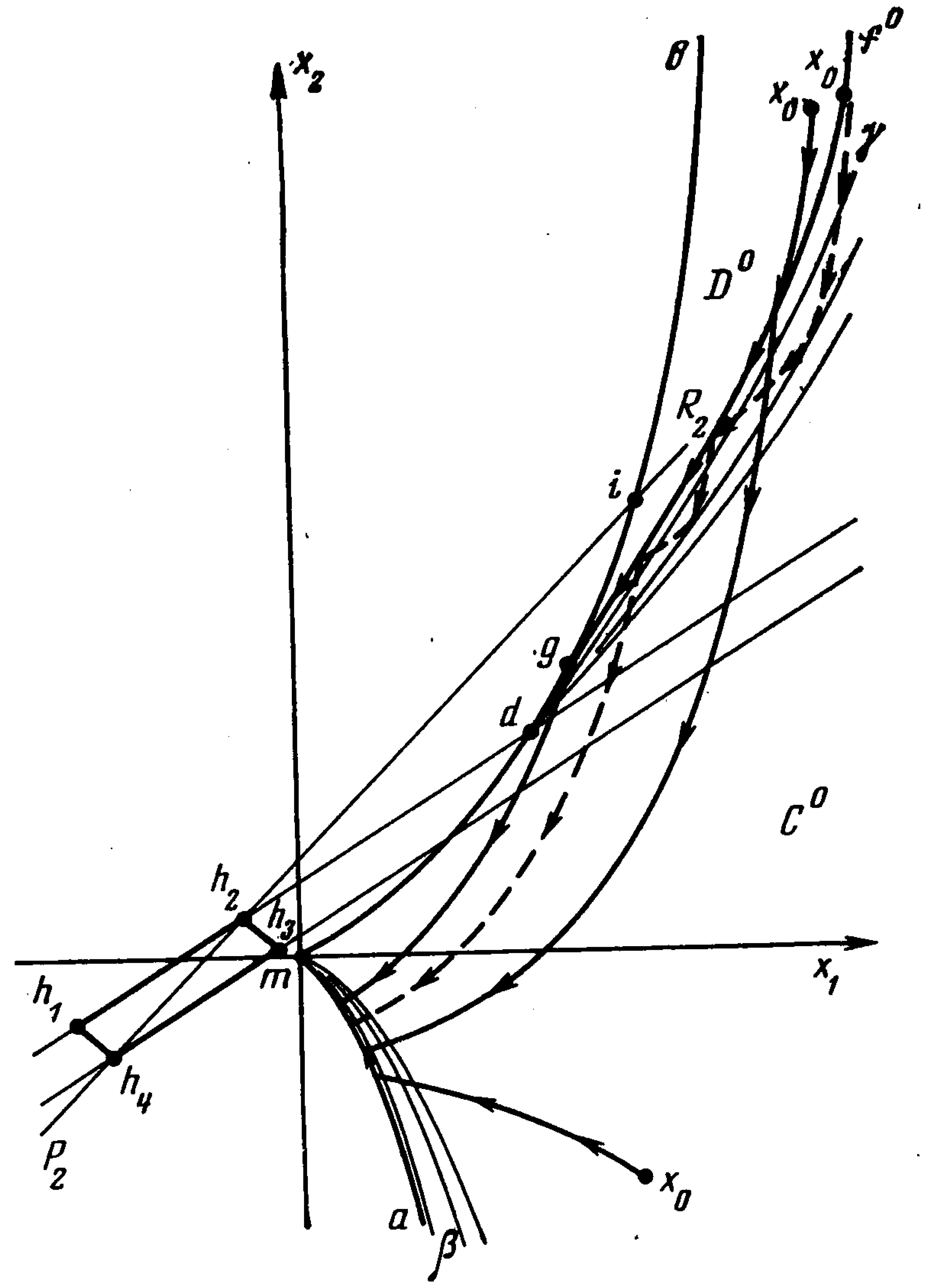
При помощи такого же рода рассуждений доказывается соотношение $x(t[x_0]) \leqslant x^\circ(t[x_0])$ и при $x_0 \in C^{(2)}$.

2. Пусть $x_0 \in C$ и $v = -\nu$. Программа $u_*(\cdot) \in U[x_0, v^*(\cdot)|A]$, решающая задачу о переводе системы (1.1) за наименьшее время из точки x_0 в точку m без вывода ее из множества A, имеет следующую структуру: она равна $-\mu$ до момента попадания системы (1.1) на кривую ma, в дальнейшем она осуществляет движение системы (1.1) по кривой ma до момента попадания в точку m.

Этот факт следует из качественного анализа области достижимости [1] системы (2.2) из точки $x(\tau_0) = m$ при $v = -\nu$ и при фазовом ограничении $x(\tau) \in C$, $\tau \geqslant \tau_0$. Очевидно, что $u_*(\cdot) = u^*(\cdot)$. Отсюда и из соотношения (4.1) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

При любом $x_0 \in A_1 \subset C$ множество $V[x_0|C]$, как нетрудно проверить, совпадает с множеством всех возможных программ $v(\cdot)$. Поэтому в множестве A_1 время $T_1[x_0] = T^{(1)}[x_0]$. Попытаемся найти среди кривых с е- м ейства L кривую df°, отделяющую от множества A максимальное замкнутое подмножество C° (содержащее A_1), для каждой точки x_0 которого выполняется равенство $T_1[x_0] = T^{(1)}[x_0]$. Такая кривая существует. Можно указать способ построения последовательности кривых, пределом которой она является. Ограничимся перечислением некоторых свойств этой кривой.

Обозначим через i точку пересечения прямой P_2R_2 с кривой db (фиг. 5). Если пересечения нет, будем считать, что точка i лежит (на кривой db) в бесконечности.



Фиг. 5

1. Кривая df° является гладкой траекторией движения системы (2.2) из точки d при $v = \nu$.

2. Для любой точки x_* на кривой df° справедливы соотношения $r^{(1)}(x_*, -\mu) < x_*f^\circ < r^{(2)}(x_*, -\mu)$.

Пусть $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ — произвольные точки на кривой df° и $x^{(1)}$ расположена ближе к d по сравнению с $x^{(2)}$.

3. Максимум $T^{(3)}[x^{(2)}, x^{(1)}]$ времени $T^{(3)}[x^{(2)}, x^{(1)}; v(\cdot)]$ движения системы (1.1) из точки $x^{(2)}$ по кривой df° до точки $x^{(1)}$, берущийся по всем программам $v(\cdot)$, при которых такое движение возможно, достигается на программе $v(t) \equiv \nu$.

4. Для любой точки x_0 на кривой df° выполняется неравенство

$$T^{(3)}[x_0, d] + T_1[d] \leqslant T_1[x_0] \tag{4.2}$$

5. Пусть g — точка на кривой df°, для которой впервые, если идти от точки d, выполняется знак равенства в (4.2). Тогда знак равенства в (4.2) выполняется для любой точки x_0 на кривой gf°. Дуга dg кривой df° полностью лежит на дуге di кривой db.

6. Если точка $x^{(1)}$ принадлежит кривой $[dg)$ ($[gf^\circ)$), то справедливо неравенство (равенство)

$$T^{(3)}[x^{(2)}, x^{(1)}] + T_1[x^{(1)}] < T_1[x^{(2)}] \qquad (T^{(3)}[x^{(2)}, x^{(1)}] + T_1[x^{(1)}] = T_1[x^{(2)}])$$

Кривую gf° — часть кривой df°, назовем эквивокальной кривой [2]. Сформулируем две вспомогательные задачи.

Задача 4.2 (4.3). Найти кусочно-непрерывные справа программы

$$v^*(\cdot),\ u^*(\cdot) \in U[x_0,\ v^*(\cdot)\,|\,A] (u^*(\cdot) \in U[x_0,\ v^*(\cdot)\,|\,D^\circ],\ D^\circ = A \setminus C^\circ)$$

удовлетворяющие соотношению

$$\max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} T_1[x_0; u(\cdot), v(\cdot)] = T_1[x_0; u^*(\cdot), v^*(\cdot)], \qquad x_0 \in C^\circ \tag{4.3}$$

$$(T_2[x_0] = \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \{T_2[x_0; u(\cdot), v(\cdot)] + T_1[x[x_0; u(\cdot), v(\cdot)]\} = = T_2[x_0; u^*(\cdot), v^*(\cdot)] + T_1[x[x_0; u^*(\cdot), v^*(\cdot)]], x_0 \in D^\circ)$$

где максимум берется по всем возможным программам $v(\cdot)$, минимум — по всем программам

$$u(\cdot) \in U[x_0, v(\cdot) \mid A] \qquad (u(\cdot) \in U[x_0, v(\cdot) \mid D^\circ])$$

а $x[x_0; u(\cdot), v(\cdot)]$ — обозначение точки первого выхода системы (1.1) на кривую df° из точки $x_0 \in D^\circ$ в силу программ $u(\cdot)$, $v(\cdot)$.

Решение задачи 4.2 вытекает из решения задачи 4.1, свойств кривой df° и равенства $T_1[x_0] = T^{(1)}[x_0]$, $x_0 \in C^\circ$. При $x_0 \in C^\circ \setminus (gf^\circ)$ программа $v^*(\cdot)$ единственна: $v^*(t) \equiv -\nu$. Для точек x_0 на кривой (gf°) максимум в (4.3) достигается на любой программе $v^*(\cdot)$ вида

$$v^*(t) = \begin{cases} \nu, \text{ если } & t_0 \leqslant t < t_0 + \Delta t \\ -\nu, \text{ если } & t \geqslant t_0 + \Delta t \end{cases} \qquad 0 \leqslant \Delta t \leqslant T^{(3)} \qquad [x_0, g]$$

Программа $u^*(\cdot)$ в любом случае совпадает с реализацией $u(\cdot)$, формируемой по правилу 1 при $v(t) = v^*(t)$.

Решение задачи 4.3 описывается в лемме 4.2, доказательство ее опускается.

Лемма 4.2. При любой начальной позиции $x_0 \in D^\circ$ решение задачи 4.3 единственно. При любом $x_0 \in D^\circ$ имеем $v^*(t) \equiv \nu$, программа $u^*(\cdot)$ совпадает с реализацией $u(\cdot)$, формируемой по правилу 1 при $v(t) \equiv \nu$. Программа $v^*(\cdot)$ удовлетворяет соотношению

$$T_2[x_0; u^*(\cdot), v^*(\cdot)] + T_1[x[x_0; u^*(\cdot), v^*(\cdot)]] = = \max_{v(\cdot)} \{T_2[x_0; u^*(\cdot), v(\cdot)] + T_1[x[x_0; u^*(\cdot), v(\cdot)]]\} \qquad (x_0 \in D^\circ)$$

где максимум берется по всем возможным программам $v(\cdot)$.

Типичные траектории движения системы (1.1) в множестве $C^\circ(D^\circ)$ в силу программ $v^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, решающих задачу 4.2 (4.3), показаны на фиг. 5.

Итак, правило 1 гарантирует первому игроку время

$$T^{(1)}[x_0] = \begin{cases} T_1[x_0], \text{ если } & x_0 \in C^\circ \\ T_2[x_0], \text{ если } & x_0 \in D^\circ \end{cases} \tag{4.4}$$

Нетрудно установить, что функция $T^{(1)}[x_0]$ непрерывна в множестве $A = C^\circ \cup D^\circ$.

На основе правила 1 построим в множестве $A \setminus \{m\}$ оптимальную тактику $\{u^\circ, \delta^\circ\}$. Положим

$$u^\circ[x] = \begin{cases} -\mu, \text{ если } & x \in C^\circ \setminus ([ma) \cup (df^\circ)) \\ \mu, \text{ если } & x \in D^\circ \cup (ma) \cup (df^\circ) \end{cases}$$

Второй элемент тактики — последовательность $(\delta_n^\circ[x])$ на кривой (ma) $((df^\circ))$ зададим с помощью веерообразной последовательности (β_n) $((\gamma_n))$

вспомогательных кривых, сходящейся при $n \to \infty$ к кривой ma (df°). Каждая кривая последовательности должна выходить из точки m (d) и проходить в множестве $C^\bullet \setminus (ma)$ ($C^\circ \setminus (df^\circ)$). (Несколько кривых из последовательности (β_n) ((γ_n)) показано на фиг. 5, они обозначены через β (γ).)

Положим $\delta_n{}^\circ [x_0]$ в точке x_0 на кривой (ma) ((df°)) равным наименьшему по $v(\cdot)$ времени движения системы (1.1) из точки x_0 до кривой β_n (γ_n) при $u = \mu$.

В остальных точках множества $A \setminus \{m\}$ примем $\delta_n{}^\circ [x] = \delta^\circ [x]$ при любом n. Функцию $\delta^\circ [x]$ выберем так, чтобы при произвольной начальной позиции

$$x_0 = x(t_0) \in C^\circ \setminus ([ma) \cup (df^\bullet)) \quad (x_0 = x(t_0) \in D^\circ), \qquad u = -\mu \quad (u = \mu)$$

система (1.1) при любой реализации $v(\cdot)$ не могла на отрезке $[t_0, t_0 + \delta^\bullet [x_0]]$ выйти из множества $C^\bullet$ ($D^\bullet$).

Описанная тактика $\{u^\circ, \delta^\bullet\}$ обеспечивает «скольжение» системы (1.1) по кривой ma в направлении точки m при любой реализации $v(\cdot)$. При этом движение не выходит за пределы множества A. Возникновение скользящего режима на кривой df° связано уже с конкретным видом реализации $v(\cdot)$. Возможная траектория движения системы (1.1) при использовании первым игроком функций $u^\circ [x]$, $\delta_n{}^\circ [x]$ показана пунктиром на фиг. 5.

Приведем схему доказательства оптимальности тактики $\{u^\bullet, \delta^\circ\}$. Пусть x_0 — произвольная начальная позиция в множестве A. Фиксируем произвольную программу $v(\cdot)$. При $n \to \infty$ последовательность траекторий движений системы (1.1) из точки x_0 в силу программы $v(\cdot)$ и функций $u^\circ[x]$, $\delta_n{}^\circ[x]$ сходится к траектории движения системы (1.1) из точки x_0 в силу программы $v(\cdot)$ и правила 1. При этом последовательность $(T[x_0; u^\circ, \delta_n{}^\circ, v(\cdot)])$ сходится к величине $T^{(1)}[x_0, v(\cdot)]$. Следовательно

$$\sup_{v(\cdot)} T^{(1)} [x_0, v(\cdot)] = \sup_{v(\cdot)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, T [x_0; u^\circ, \delta_n{}^\circ, v(\cdot)], \qquad x_0 \in A \tag{4.5}$$

Здесь точная верхняя грань берется по всем возможным программам $v(\cdot)$. Далее, для данной конкретной тактики $\{u^\circ, \delta^\circ\}$ можно доказать равенство

$$\sup_{v(\cdot)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, T [x_0; u^\circ, \delta_n{}^\circ, v(\cdot)] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{v(\cdot)} T [x_0; u^\circ, \delta_n{}^\circ, v(\cdot)], \qquad x_0 \in A \tag{4.6}$$

где точная верхняя грань также берется по всем возможным программам $v(\cdot)$. Очевидно, что точная верхняя грань величины

$$T [x_0; u^\circ, \delta_n{}^\circ, v(\cdot)] \quad (T^{(1)} [x_0, v(\cdot)]), \qquad x_0 \in A$$

по всем возможным программам $v(\cdot)$ совпадет с точной верхней гранью этой величины по всем возможным реализациям $v(\cdot)$.

С учетом этого факта из равенств (4.5), (4.6) и смысла времени $T^{(1)} [x_0]$ (см. определение этого времени и формулу (4.4)) и вытекает оптимальность тактики $\{u^\circ, \delta^\circ\}$.

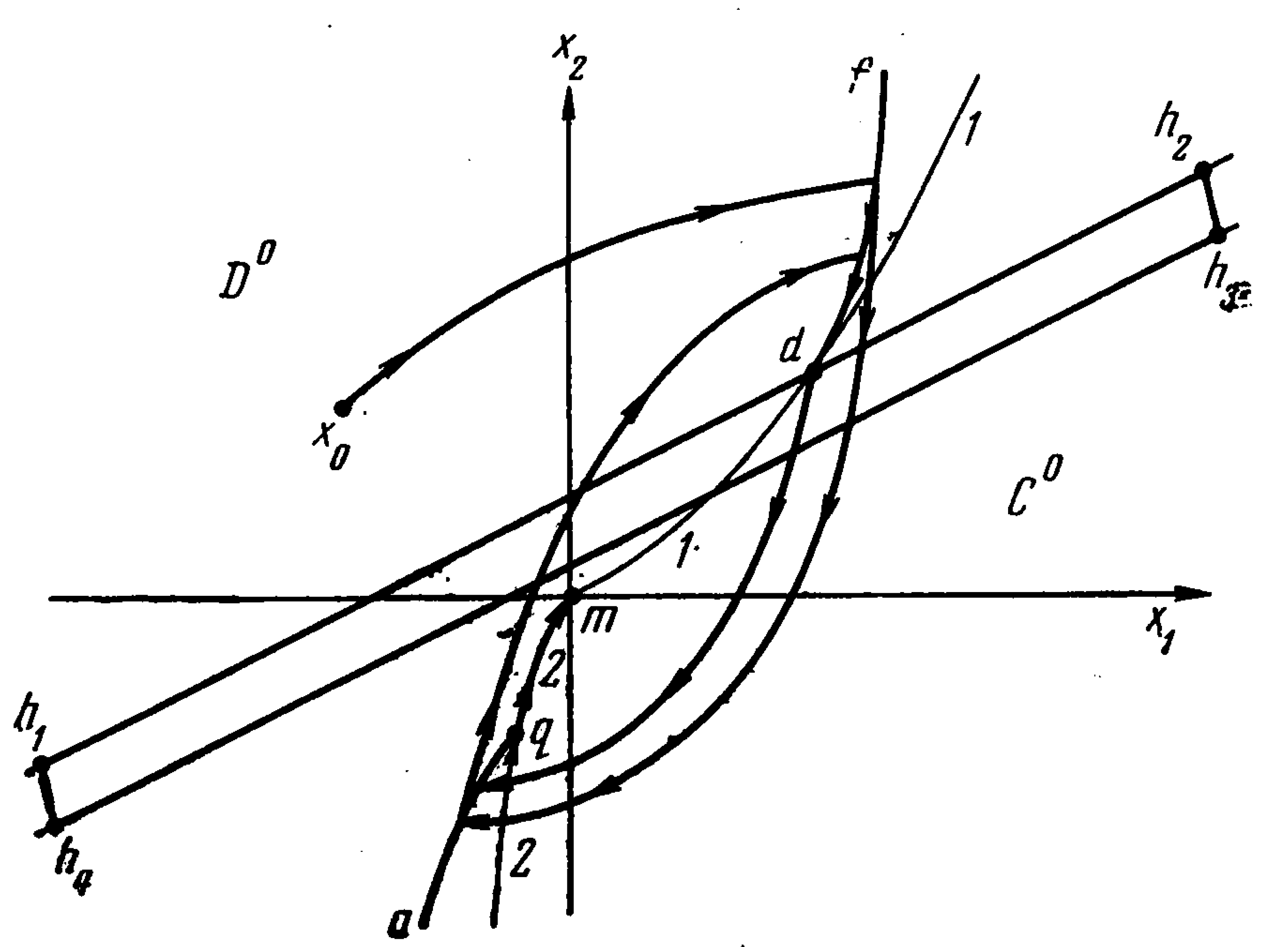
Известный вид максиминных программ $v^*(\cdot)$, решающих задачи 4.2, 4.3, позволяет сразу же, помня неравенство (1.3), определить оптимальную функцию $v^\circ [x]$

$$v^\circ [x] = \begin{cases} -\nu, & \text{если } x \in C^\circ \setminus (gf^\circ) \\ \nu, & \text{если } x \in D^\circ \\ \text{либо } \nu, \text{ либо } -\nu, & \text{если } x \in (gf^\circ) \end{cases}$$

Таким образом, для любой начальной позиции $x_0 \in A$ тактика $\{u^\circ, \delta^\circ\}$ гарантирует первому игроку, а функция $v^\circ[x]$ — второму игроку, время

$$T_u[x_0] = T_v[x_0] = T^{(1)}[x_0] < \infty$$

Назовем эталонным предельное при $n \to \infty$ движение системы (1.1) из точки $x_0 \in A$ в силу функций $u^\circ[x]$, $\delta_n^\circ[x]$ и функции $v^\circ[x]$ с дискретом Δ_n. Перебирая все возможные способы задания функции $v^\circ[x]$ на эквивокальной кривой gf°, получим полную совокупность эталонных движений, выходящих из одной точки x_0 и достигающих по разным траекториям за одно и то же время точку m. При $x_0 \in C^\circ$ эта совокупность содержится в множестве всех движений системы (1.1) из точки x_0 в силу программ $v^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, решающих задачу 4.2. При $x_0 \in D^\circ$ эталонное движение совпадает до момента попадания на кривую gf° с движением системы (1.1) в силу программ $v^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, решающих задачу 4.3.



Фиг. 6

Разбор случая 2.1 закончен. Кратко остановимся на остальных случаях.

Единственное отличие случая 2.2 от разобранного состоит в том, что на кривой (db) (она представляет собой в этом случае полупрямую) время $T_u[x_0] = T_v[x_0] = \infty$. Точка g в случае 2.2 совпадает с точкой d.

В случаях 3.3, 3.4 эталонные движения перед попаданием в точку m идут по кривой me. Решение подобно решению в случае 2.1: так же множество A делится на два множества C° и D°, так же определяются в них тактика $\{u^\circ, \delta^\circ\}$ и функция $v^\circ[x]$. В множестве A время $T_u[x_0] = T_v[x_0] < \infty$ и имеет прежний смысл.

Случаи 1.1, 1.2 (3.1, 3.2) можно рассматривать как вырождение случая 2.1 (3.3), когда $A = A_1$. Эквивокальные кривые в этих случаях не возникают.

Наиболее сложный характер имеет решение в случае 2.3 (фиг. 6). Пусть A_1 — замкнутый криволинейный конус, содержащий положительную полуось x_1 и ограниченный кривыми $r^{(1)}(m, \mu)$ и $r^{(2)}(m, -\mu)$. Множество $A = X$ делится некоторой кривой $aqmdf$ на два множества $C^\circ \supset A_1$ и $D^\circ = A \setminus C^\circ$, кривая $aqmdf$ включается в C°. Дуги md и qm кривой $aqmdf$, примыкающие к точке m, являются соответственно дугами кривых $r^{(2)}(m, -\mu)$ и $r^{(1)}(m, \mu)$. Кривые df и aq являются эквивокальными, они проходят в множестве $A \setminus A_1$. Положение точки q на кривой $r^{(1)}(m, \mu)$ зависит от расстояния между точками d и h_2. Функции $u^\circ[x]$ и $v^\circ[x]$ определяются следующим образом:

$$u^\circ[x] = \begin{cases} -\mu, \text{ если } x \in C^\circ \setminus ([mqa) \cup (df)) \\ \mu, \text{ если } x \in D^\circ \cup (mqa) \cup (df) \end{cases}$$

$$v^\circ[x] = \begin{cases} -\nu, \text{ если } x \in C^\circ \setminus ((qa) \cup (df)) \\ \nu, \text{ если } x \in D^\circ \\ \text{либо } \nu, \text{ либо } -\nu, \text{ если } x \in (qa) \cup (df) \end{cases}$$

Последовательность $(\delta_n{}^\circ[x])$ задается с помощью вспомогательных кривых. На всей плоскости время $T_u[x_0] = T_v[x_0] < \infty$. Функция $T_u[x_0]$ терпит разрыв на кривой $[qmd]$. В остальной части плоскости она непрерывна.

На фиг. 2, 4, 6 показаны типичные эталонные траектории соответственно для случаев 1.1, 3.3, 2.3.

Итак, решение задач 1 и 2 для случаев, не укладывающихся в условия лемм 2.1, 2.2, найдено полностью. А именно, указано разбиение плоскости на два множества A и B. При $x_0 \in A$ время $T_u[x_0] = T_v[x_0] < \infty$ (исключение составляет лишь случай 2.2, при котором на полупрямой (db), лежащей на границе A, время $T_u[x_0] = T_v[x_0] = \infty$). При $x_0 \in B$ время $T_u[x_0] = T_v[x_0] = \infty$. В множестве A определены оптимальная тактика $\{u^\circ, \delta^\circ\}$ первого игрока и оптимальная функция $v^\circ[x]$ второго игрока. В множестве B найдена оптимальная функция $v^\bullet[x]$.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила I III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.