Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ИНФОРМАЦИИ

В. С. Шишмаков

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача уклонения от встречи с заданным множеством при условии, что второй игрок получает информацию о состоянии игры с постоянным запаздыванием. Статья примыкает к работам [1-4].

На базе экстремальной конструкции [5] строится оптимальное управление второго игрока. Рассматриваются достаточные условия, при которых возможно уклонение в течение конечного интервала времени.

1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$dx/dt = A(t)\,x + B(t)u - C(t)\,v, \qquad t \geqslant t^\circ - \eta, \quad x\;[t^\circ - \eta] = x^\circ \quad (1.1)$$

Здесь η — положительная постоянная величина, x — n-мерный фазовый вектор системы, u и v — векторные управляющие воздействия размерности k и l соответственно, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные по t матрицы соответствующих размерностей. Реализации управлений $u[t]$ и $v[t]$ в каждый момент времени $t \geqslant t^\circ - \eta$ стеснены ограничениями

$$u[t] \in U_t, \qquad v[t] \in V_t \qquad (1.2)$$

где U_t и V_t — ограниченные, замкнутые и выпуклые множества, изменяющиеся непрерывно при изменении t.

Пусть также задано выпуклое, замкнутое, ограниченное множество $M \subset E_n$. Рассматривается следующая игра. Первый игрок (u) стремится привести движение (1.1) на множество M. Второй игрок стремится избежать встречи с M как можно дольше. При этом в каждый момент времени $t \geqslant t^\circ$ второй игрок может строить свое управление на основании информации о положении системы (1.1) в момент времени $t - \eta$. Управление $v[\tau]$ при $\tau \in [t^\circ - \eta, t^\circ)$ будем считать заданным. В данной работе ситуация рассматривается с позиции второго игрока. Поэтому не будем оговаривать информированность первого игрока, полагая ее как угодно полной.

Определение 1.1. Допустимым программным управлением $u(t)$ ($v(t)$) будем называть всякую суммируемую функцию, удовлетворяющую условию $u(t) \in U_t$ ($v(t) \in V_t$).

Определение 1.2. Позицией игры в момент $t \geqslant t^\circ$ будем называть совокупность $\{t, x[t-\eta], v(\cdot\,|\,t)\}$. Здесь через $v(\cdot\,|\,t)$ обозначена реализация управления второго игрока на полуинтервале $[t - \eta, t)$. Значение управления $v(\cdot\,|\,t)$ в момент времени $\tau \in [t - \eta, t)$ будем обозначать через $v(\tau|t)$.

Определение 1.3. Допустимой стратегией V второго игрока назовем правило, которое каждой позиции $\{t, x, v(\cdot|t)\}$ сопоставляет множество $V(t, x, v(\cdot|t))$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Множество $V(t, x, v(\cdot|t))$ принадлежит V_t и является выпуклым и замкнутым.

2. Множества $V(t, x, v(\cdot|t))$ полунепрерывны сверху относительно включения по t, x и ω-полунепрерывны сверху относительно включения по $v(\cdot|t)$.

Условие 2 означает следующее. Если выполняются условия

$$v^k \to v^*, \quad t_k \to t_*, \quad x_k \to x_*, \quad v_k(\cdot|t_k) \underset{\omega}{\to} v_*(\cdot|t_*)$$

$$v^k \in V(t_k, x_k, v_k(\cdot|t_k))$$

то имеет место включение

$$v^* \in V(t_*, x_*, v_*(\cdot|t_*))$$

где символом $\underset{\omega}{\to}$ обозначена слабая сходимость последовательности функций $v_k(\tau|t_k) = v_k(\xi)$ (здесь для удобства сделана замена $\xi = \tau + \eta - t_k$, $\tau \in [t_k - \eta, t_k)$), рассматриваемых как элементы пространства $L_{2[0,\eta]}$.

Относительно первого игрока будем считать, что его стратегия в каждый момент времени $t \geqslant t^\circ - \eta$ характеризуется множеством U_t. Такое определение стратегии позволяет охватить любой способ формирования управления первого игрока, порождающий суммируемую реализацию $u(t)$.

Определение 1.4. Движением системы (1.1) на отрезке времени $[t^\circ - \eta, \vartheta]$ будем называть всякую абсолютно-непрерывную функцию $x[t]$ ($t \in [t^\circ - \eta, \vartheta]$), удовлетворяющую при почти всех t следующему включению

$$dx[t]/dt \in A(t)x[t] + B(t)U_t - C(t)V_*(t, x[t-\eta], v(\cdot|t)) \tag{1.3}$$

где

$$V_*(t, x, v(\cdot|t)) = \begin{cases} v^\circ(t/t^\circ) & \text{при } t \in [t^\circ - \eta, t^\circ) \\ V(t, x, v(\cdot|t)) & \text{при } t \in [t^\circ, \vartheta] \end{cases}$$

Выражение в правой части (1.3) следует понимать как алгебраическую сумму множеств. Существование решения дифференциального уравнения в контингенциях (1.3) можно показать путем предельного перехода от соответствующих ломаных Эйлера [6].

Задача 1.1. Требуется построить допустимую стратегию второго игрока $V^\circ(t, x, v(\cdot|t))$ ($t \geqslant t^\circ$) такую, что для любого движения системы (1.3) дифференциальных уравнений в контингенциях будет выполняться условие $x[t] \notin M$ при всех $t \in [t^\circ, \vartheta)$, где ϑ — некоторый заданный момент времени.

2. Рассмотрим вспомогательную программную задачу, которая будет использована для построения оптимальной стратегии второго игрока $V^\bullet(t, x, v(\cdot|t))$.

В пространстве фазовых координат $\{x\}$ для выбранного момента ϑ каждому моменту $t \leqslant \vartheta$ и допустимому управлению $v(\tau|t)$ $(\tau \in [t-\eta, t))$ сопоставим множество $W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$, определяемое следующим образом.

Определение 2.1. Множество $W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$ — множество всех точек w, обладающих следующим свойством: для любого допустимого управления $v(\tau)$ $(\tau \in [t, \vartheta])$ можно подобрать допустимое управление $u(\tau)$ $(\tau \in [t-\eta, \vartheta])$ такое, что пара управлений $v^*(\tau)$ и $u(\tau)$, где

$$v^*(\tau) = \begin{cases} v(\tau|t) & \text{при } \tau \in [t-\eta, t) \\ v(\tau) & \text{при } \tau \in [t, \vartheta] \end{cases}$$

переводит систему (1.1) из точки $x[t-\eta] = w$ в некоторое положение $x[\vartheta] \in M$.

В соответствии с определением 2.1 множество $W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$ можно задать как совокупность векторов w, для которых справедливо включение

$$G^{(2)}(t, \vartheta) \subset G^{(1)}(t-\eta, \vartheta) + X(\vartheta, t)\,[X(t, t-\eta)\,w - g] - M \qquad (2.1)$$

Здесь $G^{(1)}(t, \vartheta)$ и $G^{(2)}(t, \vartheta)$ — области достижимости первого и второго игроков из состояния $x[t] = 0$ к моменту $\vartheta \geqslant t$, определяемые, соответственно, как множества всех точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, удовлетворяющих соотношениям

$$x^{(1)} = \int_t^{\vartheta} X(\vartheta, \tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \qquad u(\tau) \in U_\tau$$

$$x^{(2)} = \int_t^{\vartheta} X(\vartheta, \tau)\,C(\tau)\,v(\tau)\,d\tau, \qquad v(\tau) \in V_\tau$$

где $X(\vartheta, t)$ — фундаментальная матрица системы (1.1), а $g = g(t)$ — вектор, определяемый выражением

$$g(t) = \int_{t-\eta}^{t} X(\vartheta, \tau)\,C(\tau)\,v(\tau|t)\,d\tau \qquad (2.2)$$

Перечислим некоторые, используемые в дальнейшем, свойства множеств $W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$, вытекающие непосредственно из определения 2.1 и соотношения (2.1).

Утверждение 2.1. Множества $W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$ выпуклы, замкнуты и ограничены.

Утверждение 2.2. Если позиция $\{\vartheta, x, v(\cdot|\vartheta)\}$ такова, что

$$x \notin W(v(\cdot|\vartheta), \vartheta, \vartheta)$$

то любое движение, исходящее из точки $x = x[\vartheta-\eta]$ не попадает на M в момент $t = \vartheta$.

Из соотношения (2.1) вытекает, что точка w тогда и только тогда принадлежит множеству $W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$, когда выполняется условие

$$\max\,[\rho_2(s, t, \vartheta) - \rho_1(s, t-\eta, \vartheta) - \rho_{-M}(s) + s'\,X(\vartheta, t)\,g - s'\,X(\vartheta, t-\eta)\,w] \leqslant 0, \quad \|s\| = 1 \qquad (2.3)$$

Здесь s — единичный вектор, $\rho_1(s, t, \vartheta)$, $\rho_2(s, t, \vartheta)$, $\rho_{-M}(s)$ — опорные функции [5] множеств $G^{(1)}(t, \vartheta)$, $G^{(2)}(t, \vartheta)$, $-M$.

Пусть дан отрезок времени $[t^\circ, \vartheta^*]$. Возьмем позицию $\{t, x, v(\cdot \mid t)\}$ такую, что $x \notin W(v(\cdot \mid t), t, \vartheta)$ и сопоставим ей и моменту $\vartheta \in [t, \vartheta^*]$ величину $\varepsilon(t, x, g, \vartheta)$, определяемую выражением

$$\varepsilon(t, x, g, \vartheta) = \max_s [\rho_2(s, t, \vartheta) - \rho_1(s, t-\eta, \vartheta) - \rho_{-M}(s) + \\ + s' X(\vartheta, t) g - s' X(\vartheta, t-\eta) x], \quad \|s\| = 1 \tag{2.4}$$

Очевидно, что величина $\varepsilon(t, x, g, \vartheta)$ положительна при $x \notin W(v(\cdot \mid t), t, \vartheta)$. Доопределим функцию $\varepsilon(t, x, g, \vartheta)$, полагая ее равной нулю при $x \in W(v(\cdot \mid t), t, \vartheta)$. Нетрудно показать, что имеет место следующее свойство.

Утверждение 2.3. В области $\varepsilon(t, x, g, \vartheta) > 0$ функция $\varepsilon(t, x, g, \vartheta)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу ϑ, т. е. справедливо неравенство

$$\varepsilon(t, x, g, \vartheta'') - \varepsilon(t, x, g, \vartheta') < \lambda |\vartheta'' - \vartheta'| \tag{2.5}$$

где ϑ', ϑ'' — произвольные моменты времени из промежутка $[t, \vartheta^*]$, а λ — некоторая положительная постоянная величина.

В дальнейшем будем считать, что выполняется следующее условие.

Условие 2.1. Если позиция $\{t, x, v(\cdot \mid t)\}$ и момент $\vartheta \in [t, \vartheta^*]$ таковы, что $x \notin W(v(\cdot \mid t), t, \vartheta)$, то максимум в правой части выражения (2.4) достигается на единственном векторе $s = s^\circ(t, x, g, \vartheta)$.

Можно показать (так же, как это сделано в [2]), что при выполнении условия 2.1 справедливы следующие утверждения.

Утверждение 2.4. В области $\varepsilon(t, x, g, \vartheta) > 0$ функции $s^\circ(t, x, g, \vartheta)$ и $\varepsilon(t, x, g, \vartheta)$ являются непрерывными функциями своих аргументов.

Утверждение 2.5. В области $\varepsilon(t, x, g, \vartheta) > 0$ имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{grad}_x \varepsilon(t, x, g, \vartheta) = -X'(\vartheta, t-\eta) \cdot s^\circ(t, x, g, \vartheta) \tag{2.6}$$

$$\operatorname{grad}_g \varepsilon(t, x, g, \vartheta) = X'(\vartheta, t) \cdot s^\circ(t, x, g, \vartheta) \tag{2.7}$$

$$\partial\varepsilon(t, x, g, \vartheta)/\partial t = \mu_1(s^\circ(t, x, g, \vartheta), t-\eta, \vartheta) - \mu_2(s^\circ(t, x, g, \vartheta), t, \vartheta) + \\ + s^{\circ\prime}(t, x, g, \vartheta) \cdot X(\vartheta, t-\eta) \cdot A(t-\eta) x - s^{\circ\prime}(t, x, g, \vartheta) X(\vartheta, t) \cdot A(t) g \tag{2.8}$$

где функции $\mu_i(s, \tau, \vartheta)$ $(i = 1, 2)$ определяются соотношениями

$$\mu_1(s, \tau, \vartheta) = \max_u s' X(\vartheta, \tau) B(\tau) u, \qquad u \in U_\tau \tag{2.9}$$

$$\mu_2(s, \tau, \vartheta) = \max_v s' X(\vartheta, \tau) C(\tau) v, \qquad v \in V_\tau$$

3. Пусть на промежутке времени $[t^\circ, \vartheta^*]$ второй игрок рассчитывае избежать встречи точки $x[t]$ с множеством M.

Рассмотрим открытую область D переменных t, x, g, определяемую неравенством

$$\min_\vartheta \varepsilon(t, x, g, \vartheta) > 0 \quad (\vartheta \in [t, \vartheta^*])$$

В области D построим функцию Ляпунова

$$L(t,x,g)=\int\limits_{t}^{\vartheta^*}\varepsilon^{-1}(t,x,g,\vartheta)\,d\vartheta \tag{3.1}$$

Определим теперь для каждой позиции $\{t, x, v(\cdot\,|\,t)\}$ некоторую стратегию второго игрока $V^*(t, x, v(\cdot\,|\,t))$ следующим образом:

$$V^*(t,x,v(\cdot\,|\,t))=\begin{cases} V^{(e)} & \text{при } \min_\vartheta \varepsilon(t,x,g,\vartheta)>0,\ \vartheta\in[t,\vartheta^*] \\ V_t & \text{при } \min_\vartheta \varepsilon(t,x,g,\vartheta)=0,\ \vartheta\in[t,\vartheta^*] \end{cases} \tag{3.2}$$

где $V^{(e)}$ — множество векторов v_e, удовлетворяющих соотношению

$$(\operatorname{grad}_g L(t,x,g))'C(t)v_e=\min_v(\operatorname{grad}_g L(t,x,g))'C(t)v,\quad v\in V_t \tag{3.3}$$

Используя соотношения (3.1), (2.6) — (2.8), непрерывность функции $s^\circ(t, x, g, \vartheta)$, непрерывность матрицы $X(t, \tau)$, можно показать, что функция $L(t, x, g)$ в области D является непрерывно-дифференцируемой. Отсюда и из непрерывности матрицы $C(t)$ и множества V_t с учетом выражения (2.2) для $g = g(t)$ следует [6], что стратегия $V^*(t, x, v(\cdot\,|\,t))$ есть допустимая стратегия второго игрока. Запишем выражение для полной производной функции $L(t, x, g)$ по времени в силу системы (1.1) и соотношения (2.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} dL/dt=\Phi(t,x,g,u,v)&=(\operatorname{grad}_x L(t,x,g))'B(t-\eta)u+\\ &+(\operatorname{grad}_g L(t,x,g))'C(t)v+S(t,x,g) \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$u\in U_{t-\eta},\qquad v\in V_t$$

$$\begin{aligned} S(t,x,g)&=(\operatorname{grad}_x L(t,x,g))'\,[A(t-\eta)x-C(t-\eta)v(t-\eta\,|\,t)]+\\ &+(\operatorname{grad}_g L(t,x,g))'\,[A(t)g-X(t,t-\eta)C(t-\eta)v(t-\eta\,|\,t)]+\\ &+\partial L(t,x,g)/\partial t \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\Phi^\circ(t, x, g)$, определенную в области D

$$\begin{aligned} \Phi^\circ(t,x,g)&=\min_v\max_u\Phi(t,x,g,u,v)=\max_u\min_v\Phi(t,x,g,u,v)=\\ &=\max_u(\operatorname{grad}_x L(t,x,g))'B(t-\eta)u+\min_v(\operatorname{grad}_g L(t,x,g))'C(t)v+\\ &+S(t,x,g),\qquad u\in U_{t-\eta},\qquad v\in V_t \end{aligned} \tag{3.5}$$

Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть начальная позиция $\{t^\circ, x^\circ, v(\cdot|t^\circ)\}$ такова, что $x^\circ \notin W(v(\cdot|t^\circ), t^\circ, \vartheta)$ при всех $\vartheta \in [t^\circ, \vartheta^*]$. Пусть также система (1.1) и ограничения на управления (1.2) таковы, что в области D выполняется неравенство

$$\Phi^\circ(t,x,g)\leqslant \varkappa L(t,x,g)\quad(\varkappa\text{-const}) \tag{3.6}$$

Тогда стратегия $V^*(t, x, v(\cdot\,|\,t))$ обеспечивает уклонение любого движения системы (1.1), порожденного стратегиями $V^*(t, x, v(\cdot\,|\,t))$ и U_t, от встречи с множеством M на промежутке времени $[t^\circ, \vartheta^*]$.

Доказательство. Пусть $x_e[t]$ — произвольное движение системы (1.1), порожденное стратегиями U_t и $V^*(t, x, v(\cdot|t))$. Обозначим через $\{t, x_e[t-\eta], v_e(\cdot\mid t)\}$ позицию, состоящую из реализуемых движения $x_e[t-\eta]$ и управления второго игрока $v_e(\tau|t)$ $(\tau\in[t-\eta, t])$.

Покажем, что точка $x_e = x_e[t-\eta]$ при $t\in[t^\circ, \vartheta^*]$ не попадает ни в одно из множеств $W(v_e(\cdot\mid t), t, \vartheta)$ $(\vartheta\in[t, \vartheta^*])$. Отсюда в силу утверждения 2.2 будет следовать, что $x_e[t]\notin M$ при $t\in[t^\circ, \vartheta^*]$.

Предположим противное. Пусть в некоторый момент $t^*\in[t^\circ, \vartheta^*]$ реализовалась позиция $\{t^*, x_e[t^*-\eta], v_e(\cdot\mid t^*)\}$ такая, что впервые $x_e[t^*-\eta]\in W(v_e(\cdot\mid t^*), t^*, \vartheta')$ где ϑ' — некоторый момент времени из промежутка $[t^*, \vartheta^*]$.

Это означает, что

$$\varepsilon(t^*, x_e[t^*-\eta], g_e(t^*), \vartheta') = 0$$

Возьмем последовательность позиций $\{t^n, x_e[t^n-\eta], v_e(\cdot\mid t^n)\}$, где $t^n < t^*$, $t^n\to t^*$ при $n\to\infty$. Тогда последовательность чисел

$$\varepsilon^n = \varepsilon(t^n, x_e[t^n-\eta], g_e(t^n), \vartheta') > 0$$

стремится к нулю в силу непрерывности функции $\varepsilon(t, x, g, \vartheta)$. По утверждению 2.3 при любом $\vartheta\in[t^n, \vartheta^*]$ можно записать неравенство

$$\varepsilon(t^n, x_e[t^n-\eta], g_e(t^n), \vartheta) < \varepsilon^n + \lambda|\vartheta-\vartheta'|$$

Отсюда имеем оценку

$$L(t^n, x_e[t^n-\eta], g_e(t^n)) \geqslant \int_{t^n}^{\vartheta'} [\varepsilon^n + \lambda|\vartheta-\vartheta'|]^{-1} d\vartheta$$

из которой следует, что

$$L(t^n, x_e[t^n-\eta], g_e(t^n)) \to \infty$$

при

$$n\to\infty$$

Рассмотрим на полуинтервале $[t^\circ, t^*)$ функцию $L(t, x_e[t-\eta), g_e(t)]$ вдоль изменения позиции $\{t, x_e[t-\eta], v_e(\cdot\mid t)\}$ как функцию времени $L(t)$.

Так как функция $L(t, x, g)$ непрерывно-дифференцируема, функции $x_e[t]$ и $g_e[t]$ абсолютно-непрерывны, то существует почти всюду на $[t^\circ, t^*)$ производная

$$dL(t)/dt = \Phi(t) \tag{3.7}$$

где $\Phi(t)$ — реализация функции $\Phi(t, x_e[t-\eta], g_e(t), u[t-\eta], v_e[t])$ как функции времени. Из соотношений (3.3) — (3.7) получаем оценку

$$dL(t)/dt \leqslant \varkappa L(t) \qquad \text{при } t\in[t^\circ, t^*),$$

из которой следует ограниченность функции $L(t)$ на полуинтервале $[t^\circ, t^*)$. Таким образом, получаем противоречие, с одной стороны, функция $L(t)$ ограничена на $[t^\circ, t^*)$, с другой стороны, при $t^n\to t^*$ $(t^n < t^*)$ последовательность $\{L(t^n)\}$ неограниченно возрастает. Это противоречие доказывает лемму 3.1.

4. Определим ограничения на управления игроков и стратегию второго игрока, обеспечивающие уклонение движения $x[t]$ от встречи с множеством M на некотором полуинтервале $[t^\circ, \vartheta^\circ)$. Введем определение момента поглощения.

Определение 4.1. Моментом поглощения $\vartheta^\circ(t, x, v(\cdot|t))$, отвечающим позиции игры $\{t, x, v(\cdot|t)\}$, назовем наименьшее значение параметра ϑ, при котором имеет место включение $x\in W(v(\cdot|t), t, \vartheta)$.

Пусть дана начальная позиция $\{t^\circ, x^\circ, v(\cdot|t^\circ)\}$ и пусть ϑ° — соответствующий ей момент поглощения. Построим стратегию второго игрока $V_\alpha^\circ(t, x, v(\cdot|t))$

$$V_\alpha^\circ(t,x,v(\cdot\,|\,t)) = \begin{cases} V^{(e)} & \text{при } \min_\vartheta \varepsilon(t,x,g,\vartheta) > 0 \\ V_t & \text{при } \min_\vartheta \varepsilon(t,x,g,\vartheta) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\vartheta \in [t, \vartheta^\circ - \alpha]$, α — постоянное положительное число.

Положим в лемме 3.1 $\vartheta^* = \vartheta^\circ - \alpha$. Тогда из определений 2.1 и 4.1 следует, что выполняется при любом $\alpha \in (0, \vartheta^\circ - t^\circ]$ первое условие леммы 3.1, т. е. начальная позиция удовлетворяет условию $x^\circ \notin W(v(\cdot|t^\circ), t^\circ, \vartheta)$ при всех $\vartheta \in [t^\circ, \vartheta^\circ - \alpha]$.

Допустим теперь, что система (1.1) и ограничения на управления игроков (1.2) таковы, что выполняется условие

$$X(t, t-\eta)\,B(t-\eta)\,U_{t-\eta} = C(t)\,V_t + D_t \qquad (t \in [t^\circ, \vartheta^\circ]) \tag{4.2}$$

где D_t — некоторое выпуклое множество.

Покажем, что при выполнении соотношения (4.2) выполняется условие 1.2. Рассмотрим функцию

$$\rho(s, t-\eta, \vartheta) = \rho_1(s, t-\eta, \vartheta) - \rho_2(s, t, \vartheta) \tag{4.3}$$

Это равенство можно записать в виде [5]

$$\rho(s, t-\eta, \vartheta) = \int_{t-\eta}^{\vartheta} \mu_1(s,\tau,\vartheta)\,d\tau - \int_t^{\vartheta} \mu_2(s,\tau,\vartheta)\,d\tau =$$
$$= \int_t^{\vartheta} \mu_1(s,\tau-\eta,\vartheta)\,d\tau - \int_t^{\vartheta} \mu_2(s,\tau,\vartheta)\,d\tau + \int_{\vartheta-\eta}^{\vartheta} \mu_1(s,\tau,\vartheta)\,d\tau$$

где $\mu_i(s, \tau, \vartheta)$ $(i = 1,2)$ определяются выражениями (2.9).

Отсюда и из (4.2) следует, что

$$\rho(s, t-\eta, \vartheta) = \int_t^{\vartheta} \mu(s,\tau,\vartheta)\,d\tau + \int_{\vartheta-\eta}^{\vartheta} \mu_1(s,\tau,\vartheta)\,d\tau \tag{4.4}$$

где

$$\mu(s, \tau, \vartheta) = \max_y s'X(\vartheta, \tau)\,y \text{ при } y \in D_\tau,\ \tau \in [t, \vartheta]$$

Из выражения (4.4) следует, что разность (4.3) является выпуклой по s-функцией. Используя это свойство, можно показать [5], что максимум в выражении (2.4) достигается на единственном векторе $s = s^\circ(t, x, g, \vartheta)$, т. е. условие 2.1 выполняется.

Теперь проверим выполнение второго условия леммы 3.1. Для этого, учитывая соотношения (2.6) — (2.8), (3.1), (3.4), (4.4), запишем выражение для функции

$$\Phi(t,x,g,u,v) =$$
$$= \int_t^{\vartheta^\circ-\alpha} \left\{ \frac{s^\circ(t,x,g,\vartheta)\,X(\vartheta,t)\,[X(t,t-\eta)\,B(t-\eta)\,u - C(t)\,v]}{\varepsilon^2(t,x,g,\vartheta)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu(s(t,x,g,\vartheta),t,\vartheta)}{\varepsilon^2(t,x,g,\vartheta)} \right\} d\vartheta - \varepsilon^{-1}(t,x,g,t) \tag{4.5}$$

где

$$u \in U_{t-\eta}, \qquad v \in V_t, \qquad t \in [t^\circ, \vartheta^\circ - \alpha]$$

Пусть u°, v° — пара векторов, для которых имеет место равенство

$$\Phi(t, x, g, u^\circ, v^\circ) = \Phi^\circ(t, x, g)$$

В силу (4.2) существует вектор v^* такой, что

$$X(t, t-\eta) B(t-\eta) u^\circ - C(t) v^* \in D_t$$

Для вектора v^* в силу (3.5) справедливо неравенство

$$\Phi^\circ(t, x, g) \leqslant \Phi(t, x, g, u^\circ, v^*)$$

Отсюда и из (4.5), учитывая, что функция $\varepsilon(t, x, g, t)$ положительна, получаем, что

$$\Phi^\circ(t, x, g) \leqslant 0$$

Таким образом, второе условие леммы 3.1 выполняется. Используя формулы (4.5) и (3.3), запишем множество $V^{(e)}$, определяющее стратегию второго игрока $V_\alpha^\circ(t, x, v(\cdot \mid t))$ как совокупность векторов v_e, удовлетворяющих условию

$$l_\alpha'(t, x, g) C(t) v_e = \max_v l_\alpha'(t, x, g) C(t) v, \qquad v \in V_t \tag{4.6}$$

где вектор $l_\alpha(t, x, g)$ определяется равенством

$$l_\alpha(t, x, g) = \int\limits_t^{\vartheta^\circ - \alpha} \frac{X'(\vartheta, t) s^\circ(t, x, g, \vartheta)}{\varepsilon^2(t, x, g, \vartheta)} d\vartheta \tag{4.7}$$

Таким образом справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть система уравнений (1.1) и ограничения на управления (1.2) таковы, что выполняется условие (4.2). Тогда стратегия второго игрока $V_\alpha^\circ(t, x, v(\cdot \mid t))$ (4.1), (4.6), (4.7) гарантирует уклонение движения $x[t]$ от встречи с множеством M на отрезке $[t^\circ, \vartheta^\circ - \alpha]$ при любом $\alpha \in \in (0, \vartheta^\circ - t^\circ]$.

С другой стороны, оказывается, что второй игрок не может гарантировать уклонение системы (1.1) от встречи с множеством M на промежутке времени большем, чем полуинтервал $[t^\circ, \vartheta^\circ)$.

Для доказательства этого рассмотрим стратегию первого игрока, определяемую в каждый момент времени $t - \eta$, $(t \in [t^\circ, \vartheta^\circ])$ множеством

$$U^\circ(t-\eta, x, v(\cdot \mid t)) = \begin{cases} U^{(e)} & \text{при } x \notin W(v(\cdot \mid t), t, \vartheta^\circ) \\ U_t & \text{при } x \in W(v(\cdot \mid t), t, \vartheta^\circ) \end{cases}$$

где $U^{(e)}$ — множество векторов u_e, удовлетворяющих соотношению

$$s^{\circ\prime}(t, x, g, \vartheta^\circ) X(\vartheta^\circ, t-\eta) u_e =$$
$$= \max_u s^{\circ\prime}(t, x, g, \vartheta^\circ) X(\vartheta^\circ, t-\eta) B(t-\eta) u, \qquad u \in U_{t-\eta}$$

Стратегия $U^\circ(t-\eta, x, v(\cdot \mid t))$ предполагает знание первым игроком в момент времени $t - \eta$ реализации $v(\cdot \mid t)$ управления второго игрока на промежутке $[t-\eta, t)$.

Такая информированность первого игрока о состоянии игры в будущем, разумеется, не реальна. Однако в силу постановки задачи 1.1 второй игрок не гарантирован от применения первым игроком реализации управления $u(t)$, удовлетворяющего в ходе игры включению $u(t-\eta) \in U^\circ(t-\eta, x, v(\cdot|t))$.

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в работах [1,6], можно показать, что стратегия первого игрока $U^\circ(t-\eta, x, v(\cdot|t))$ при выполнении условия 2.1 гарантирует приведение системы (1.1) на множество M не позже момента ϑ°. Отсюда следует, что момент ϑ° является с точки зрения второго игрока наилучшим моментом, для которого может быть решена задача 1.1.

Рассмотрим случай, когда множество M является линейным подпространством пространства E_n. Обозначим через $X^*(\vartheta, t)$ матрицу, столбцы которой есть проекции вектор-столбцов матрицы $X(\vartheta, t)$ на ортогональное дополнение подпространства M. Пусть выполнено условие

$$X^*(\vartheta, t)\, X(t, t-\eta)\, B(t-\eta)\, U_{t-\eta} = X^*(\vartheta, t)\, C(t)\, V_t + D(\vartheta, t) \tag{4.8}$$

при всех $\vartheta \in [t^\circ, \vartheta^\circ]$, $t \in [t^\circ, \vartheta^\circ]$, где $D(\vartheta, t)$ — некоторое выпуклое множество. Пусть также для любых $t \in [t^\circ, \vartheta^\circ]$, $u \in U_{t-\eta}$ можно подобрать вектор $v \in V_t$ такой, что при всех $\vartheta \in [t, \vartheta]$ будет иметь место включение

$$X^*(\vartheta, t)\,[X(t, t-\eta)\, B(t-\eta)\, u - C(t) v] \in D(\vartheta, t) \tag{4.9}$$

Обозначим через $l_\alpha^*(t, x, g)$ вектор, определяемый по формуле

$$l_\alpha^*(t, x, g) = \int\limits_t^{\vartheta^\circ - \alpha} \frac{X^*(\vartheta, t)\, s^\circ(t, x, g, \vartheta)}{\varepsilon^2(t, x, g, \vartheta)}\, d\vartheta \tag{4.10}$$

Так же, как и в случае ограниченного множества M, здесь можно показать справедливость утверждения, аналогичного теореме 4.1. При этом вместо выполнения условия (4.2) потребуется выполнение более слабых условий (4.8), (4.9), а стратегия второго игрока определится формулами (4.1), (4.6), (4.10).

Автор благодарен Н. Н. Красовскому и А. И. Субботину за внимание к работе.

Поступила 30 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи динамики. II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 1.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
4. Черноусько Ф. Л. О дифференциальной игре с запаздыванием информации. Докл. АН СССР, 1969, т. 188, № 4.
5. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
6. Шишмаков В. С. Дифференциальная игра наведения при запаздывании информации. Управляемые системы. 1970, вып. 7.