Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О ВСТРЕЧЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ В РЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Э. Г. Альбрехт

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача о встрече движений управляемых объектов [1–6], поведение которых описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями. При мгновенных ограничениях на значения управляющих воздействий показывается, что в регулярном случае тормозящая экстремальная стратегия [5,6] обеспечивает встречу не позже, чем в момент поглощения.

§ 1. Пусть преследующее $y\,[t]$ и преследуемое $z\,[t]$ движения управляемых объектов описываются уравнениями

$$y^{\cdot} = A^{(1)}(t)\,y + B^{(1)}(t)\,u + \lambda f^{(1)}(y, t) \tag{1.1}$$

$$z^{\cdot} = A^{(2)}(t)\,z + B^{(2)}(t)\,v + \lambda f^{(2)}(z, t) \tag{1.2}$$

где y и z — соответственно $n^{(1)}$- и $n^{(2)}$-мерные фазовые векторы; u, v — $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$-мерные векторы управляющих воздействий; $A^{(j)}$ и $B^{(j)}$ — матрицы соответствующих размерностей; $f^{(1)}(y, t)$ и $f^{(2)}(z, t)$ — вектор-функции непрерывно дифференцируемые по t и дважды непрерывно дифференцируемые по y и z при $y \in \Gamma_1$ и $z \in \Gamma_2$, а Γ_1 и Γ_2 — некоторые замкнутые ограниченные области; λ $(\lambda > 0)$ — малый параметр. На управляющие воздействия u и v наложены ограничения: $u\,[t] \in U$, $v\,[t] \in V$, причем множества U и V векторов u и v описываются неравенствами

$$\|u\,[t]\| \leqslant \mu, \qquad \|v\,[t]\| \leqslant \nu \qquad (\mu, \nu = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

Здесь и везде в дальнейшем символ $\|x\|$ означает евклидову норму вектора x.

Будем говорить, что в момент $t = \vartheta \geqslant t_0$ произошла встреча движений $y\,[t]$ и $z\,[t]$, если при $t = \vartheta$ впервые выполняется равенство

$$\{y\,[\vartheta]\}_m = \{z\,[\vartheta]\}_m;$$

символ $\{x\}_m$ означает вектор, составленный из m первых компонент вектора x.

Ниже приводится обоснование тормозящей экстремальной стратегии [5,6] в случае квазилинейных объектов (1.1) и (1.2) при $\lambda \leqslant \lambda_0$, где λ_0 — достаточно малое положительное число.

§ 2. Приведем некоторые факты, используемые в дальнейшем. Для этого будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 2.1. Движения систем (1.1) и (1.2) при $\lambda = 0$, порождаемые всевозможными управлениями, стесненными ограничениями (1.3), при начальных условиях $y_0 \in \Gamma_1^\circ \subset \Gamma_1$, $z_0 \in \Gamma_2^\circ \subset \Gamma_2$ целиком содержатся в областях Γ_1 и Γ_2.

Пусть $Y^\circ[\vartheta, \tau]$ и $Z^\circ[\vartheta, \tau]$ — фундаментальные матрицы уравнений (1.1) и (1.2) при $\lambda = 0$, $u \equiv 0$, $v \equiv 0$. Обозначим

$$\xi_1(\tau) = \| l' \{Y^\circ[\vartheta, \tau] B^{(1)}(\tau)\}_m \|, \qquad \xi_2(\tau) = \| l' \{Z^\circ[\vartheta, \tau] B^{(2)}(\tau)\}_m \| \qquad (2.1)$$

Условие 2.2. Каков бы ни был единичный m-мерный вектор l ($\|l\| = 1$), функции $\xi_1(\tau)$, $\xi_2(\tau)$ (2.1) могут обращаться в нуль лишь в конечном числе точек $\tau_k^{(1)}$ и $\tau_s^{(2)}$ из отрезка $[t, \vartheta]$, где ϑ — любое конечное число большее t, причем

$$\left| \frac{d\xi_1}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^{(1)}} \right| \geqslant k_1 > 0, \quad \left| \frac{d\xi_2}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_s^{(2)}} \right| \geqslant k_2 > 0 \quad (k_1, k_2 = \mathrm{const})$$

Рассмотрим управления $u^\circ(\tau)$ и $v^\circ(\tau)$ ($t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$), которые являются решением задач

$$\rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda] = \max_u l' \{y(\vartheta; u)\}_m = l' \{y^\circ(\vartheta; l, \vartheta, t, y, \lambda)\}_m \quad (u \in U)$$
$$(2.2)$$
$$\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda] = \max_v l' \{z(\vartheta; v)\}_m = l' \{z^\circ(\vartheta; l, \vartheta, t, z, \lambda)\}_m \quad (v \in V)$$

где $y(\tau; u)$ и $z(\tau; v)$ — движения систем (1.1) и (1.2), порождаемые некоторыми управлениями $u(\tau)$ и $v(\tau)$, стесненными неравенствами (1.3), при начальном условии $\tau = t$, $y(t; u) = y$, $z(t; v) = z$, а l — произвольный единичный вектор. Движения $y^\circ(\tau; l, \vartheta, t, y, \lambda)$ и $z^\circ(\tau; l, \vartheta, t, z, \lambda)$, удовлетворяющие равенствам (2.2), порождаются управлениями $u^\circ(\tau)$ и $v^\circ(\tau)$, которые при каждом τ из отрезка $[t, \vartheta]$ определяются из условия максимума

$$l' \{Y[\vartheta, \tau; l, \vartheta, t, y, \lambda] B^{(1)}(\tau)\}_m u^\circ(\tau) =$$
$$= \max_u l' \{Y[\vartheta, \tau; l, \vartheta, t, y, \lambda] B^{(1)}(\tau)\}_m u \quad (u \in U)$$
$$l' \{Z[\vartheta, \tau; l, \vartheta, t, z, \lambda] B^{(2)}(\tau)\}_m v^\circ(\tau) =$$
$$= \max_v l' \{Z[\vartheta, \tau; l, \vartheta, t, z, \lambda] B^{(2)}(\tau)\}_m v \quad (v \in V)$$

где Y и Z — фундаментальные матрицы систем уравнений в вариациях $d\delta y / d\tau = A^{(1)\circ}(\tau; l, \vartheta, t\ y, \lambda)\,\delta y$, $d\delta z / d\tau = A^{(2)\circ}(\tau; l, \vartheta, t, z, \lambda)\,\delta z$ составленных для уравнений (1.1) и (1.2) соответственно вдоль движений $y^\circ(\tau; l, \vartheta, t, y, \lambda)$ и $z^\circ(\tau; l, \vartheta, t, z, \lambda)$.

Из результатов [7,8] и из условия (2.2) вытекает, что при $\lambda \leqslant \lambda_0$ управления $u^\circ(\tau)$ и $v^\circ(\tau)$ определяются единственным образом для каждого вектора l, следовательно, для каждого вектора l существуют единственные точки $y^\circ(\vartheta; l, \vartheta, t, y, \lambda)$ и $z^\circ(\vartheta; l, \vartheta, t, z, \lambda)$, удовлетворяющие равенствам (2.2).

Введем в рассмотрение величину

$$\varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda) = \max_l \{\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda] -$$
$$- \rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda]\} \quad (\|l\| = 1) \qquad (2.3)$$

По определению функций $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ (2.2) при $t = \vartheta$ величина ε° (2.3) равняется расстоянию между точками $\{y[\vartheta]\}_m$ и $\{z[\vartheta]\}_m$.

Определение 2.1. Будем говорить, что имеет место регулярный случай [6], если для каждой позиции $\{t, y, z\}$, для которой $0 < \varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda) < \alpha$

(α — достаточно малое положительное число) максимум в правой части равенства (2.3) достигается на единственном векторе $l^\circ = l^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda)$.

Определение 2.2. Наименьшее значение $\vartheta \geqslant t$, при котором выполняется равенство

$$\max_l \{\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda] - \rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda]\} = 0 \qquad (\|l\| = 1) \tag{2.4}$$

будем называть моментом поглощения $\vartheta^\circ = \vartheta^\circ(t, y, z, \lambda)$ процесса $z[t]$ (1.2) процессом $y[t]$ (1.1).

Предположим теперь, что на некотором отрезке времени $[t_*, \vartheta]$ (ϑ — фиксировано) игроки применяют допустимые стратегии [6]. При этом в каждый момент времени $t \in [t_*, \vartheta]$ реализуются лишь такие позиции $\{t, y, z\}$ ($y = y[t]$, $z = z[t]$), для которых $\varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda) > 0$. Рассмотрим функцию $\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(\vartheta, t, y[t], z[t], \lambda)$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 2.1 и 2.2. Тогда в регулярном случае при $\lambda \leqslant \lambda_0$ функция $\varepsilon^\circ[t]$ абсолютно непрерывна и при почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$

$$\begin{aligned} d\varepsilon^\circ[t]/dt = {} & \max_u l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta, t; l^\circ, \vartheta, t, y, \lambda]B^{(1)}(t)\}_m u - \\ & - l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta, t; l^\circ, \vartheta, t, y, \lambda]B^{(1)}(t)\}_m u[t] - \qquad (u \in U) \\ & - \max_v l^{\circ\prime}\{Z[\vartheta, t; l^\circ, \vartheta, t, z, \lambda]B^{(2)}(t)\}_m v + l^{\circ\prime}\{Z[\vartheta, t; l^\circ, \vartheta, t, z, \\ & \lambda]B^{(2)}(t)\}_m v[t] \qquad (v \in V) \end{aligned} \tag{2.5}$$

§ 3. Опишем построение аппроксимационной тормозящей экстремальной стратегии [4-6]. Пусть $\vartheta^\circ = \vartheta^\circ(t_0, y_0, z_0, \lambda)$ — момент поглощения, соответствующий начальной позиции $\{t_0, y_0, z_0\}$. Отрезок времени $[t_0, \vartheta^\circ]$ разобьем на полуинтервалы $[\tau_k, \tau_{k+1})$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$; $\tau_0 = t_0$) одинаковой длины $\Delta = \tau_{k+1} - \tau_k$. Будем полагать, что на каждом из этих полуинтервалов управление $u_{e\Delta}$ постоянно и строится в виде

$$u_{e\Delta}[t] = u_\Delta[\tau_k, y_\Delta[\tau_k], z[\tau_k], \vartheta_\Delta[\tau_k], \lambda] = u_{e\Delta}[\tau_k]$$
$$(\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1})$$

где $\vartheta_\Delta[t]$ — некоторая вспомогательная переменная, которая также считается постоянной на каждом полуинтервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$, т. е.

$$\vartheta_\Delta[t] = \vartheta_\Delta[\tau_k] \qquad (\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1})$$

При этом значения $\vartheta_\Delta[\tau_k]$ определяются следующим образом. При $t = t_0$ полагаем, что $\vartheta_\Delta[t_0] = \vartheta^\circ$.

Пусть при $t = \tau_k$ реализовалась позиция $\{\tau_k, y_\Delta[\tau_k], z[\tau_k]\}$ и этой позиции соответствует момент поглощения $\vartheta_{\Delta k}^\circ = \vartheta^\circ(\tau_k, y_\Delta[\tau_k], z[\tau_k], \lambda)$.

Величину $\vartheta_\Delta[t]$ при $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ будем определять так

$$\vartheta_\Delta[t] = \begin{cases} \vartheta_{\Delta k}^\circ & \text{при } \vartheta_{\Delta k}^\circ \leqslant \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}] \\ \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}] & \text{при } \vartheta_{\Delta k}^\circ > \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}] \end{cases}$$

Опишем теперь способ выбора значений $u_{e\Delta}[\tau_k]$. Если $\vartheta_\Delta[\tau_k] = \vartheta_{\Delta k}^\circ$, то полагаем

$$u_{e\Delta}[\tau_k] \in U \tag{3.1}$$

т. е. $u_{e\Delta}[\tau_k]$ — любое значение управления u из множества U. Если же $\vartheta_\Delta[\tau_k] < \overset{\bullet}{\vartheta}_{\Delta k}$, то

$$\text{при } \|l_{\Delta k}{}^{\bullet\prime}\{YB^{(1)}\}_m\| \neq 0 \tag{3.2}$$

$$u_{e\Delta}[\tau_k] = \mu \frac{(l_{\Delta k}{}^{\circ\prime}\{Y[\vartheta_\Delta[\tau_{k-1}], \tau_k; l_{\Delta k}{}^\circ, \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}], \tau_k, y_\Delta[\tau_k], \lambda] B^{(1)}(\tau_k)\}_m)'}{\|l_{\Delta k}{}^{\circ\prime}\{Y[\vartheta_\Delta[\tau_{k-1}], \tau_k; l_{\Delta k}{}^\circ, \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}], \tau_k, y_\Delta[\tau_k], \lambda] B^{(1)}(\tau_k)\}_m\|}$$

$$\text{при } \|l_{\Delta k}{}^\circ\{YB^{(1)}\}_m\| = 0, \quad u_{e\Delta}[\tau_k] \in U \tag{3.3}$$

Здесь $\overset{\bullet}{l}_{\Delta k} = l^\circ$ $(\vartheta_\Delta[\tau_{k-1}], \tau_k, y_\Delta[\tau_k], z[\tau_k], \lambda)$, — вектор, на котором достигается максимум в правой части равенства (2.3) при $t = \tau_k$ и $\vartheta = \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 2.1 и 2.2 и пусть имеет место регулярный случай, тогда при $\lambda \leqslant \lambda_0$ для любого, сколь угодно малого числа $\eta > 0$, можно указать такое число $\Delta^\circ > 0$, что для всех $0 < \Delta \leqslant \Delta^\circ$ при выборе преследователем аппроксимационной тормозящей экстремальной стратегии и любой допустимой стратегии преследуемого найдется такой момент времени $\vartheta^* \leqslant \vartheta^\circ$ (t_0, y_0, z_0, λ), когда будет выполняться неравенство

$$\|\{y_\Delta[\vartheta^*]\}_m - \{z[\vartheta^*]\}_m\| \leqslant \eta$$

если только начальная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$ $(y_0 \in \Gamma_1{}^\circ, z_0 \in \Gamma_2{}^\circ)$ такова, что момент поглощения ϑ° существует.

Доказательство. Предположим сначала, что при $t = \tau_k$ реализовалась такая позиция $\{\tau_k, y_\Delta[\tau_k], z[\tau_k]\}$, что $\vartheta_{\Delta k}[\tau_k] = \overset{\circ}{\vartheta}_{\Delta k}$, тогда по определению $\varepsilon_\Delta{}^\circ[\tau_k] = 0$. Из непрерывности функций $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ (2.2) вытекает, что при $t = \tau_{k+1}$ будет справедливо неравенство

$$\varepsilon_\Delta{}^\circ[\tau_{k+1}] \leqslant \delta(\Delta) \qquad (y_\Delta[\tau_k] \in \Gamma_1, z[\tau_k] \in \Gamma_2)$$

где $\lim\limits_{\Delta\to 0} \delta(\Delta) = 0$ равномерно по $\lambda \leqslant \lambda_0$.

Предположим теперь, что при $t = \tau_k$ реализовалась такая позиция, что $\vartheta_{\Delta k}{}^\circ > \vartheta_\Delta[\tau_{k-1}]$, тогда $\varepsilon_\Delta{}^\circ[\tau_k] > 0$. Из (2.5) и (3.2), (3.3) получаем, что

$$\varepsilon_\Delta{}^\circ[\tau_{k+1}] - \varepsilon_\Delta{}^\circ[\tau_k] \leqslant o(\Delta)$$

При этом равномерно по $\lambda \leqslant \lambda_0$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0 \qquad (y_\Delta[\tau_k] \in \Gamma_1, \ z[\tau_k] \in \Gamma_2)$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\varepsilon_\Delta{}^\circ[\vartheta^\circ] \leqslant \frac{\vartheta^\circ - t_0}{\Delta} o(\Delta) + \delta(\Delta) \tag{3.4}$$

Из (3.4) получаем, что для любого, сколько угодно малого числа $\eta > 0$, можно указать такое число $\Delta^\bullet > 0$, что при всех $0 < \Delta \leqslant \Delta^\bullet$ будет выполняться неравенство

$$\varepsilon_{\Delta^\bullet}[\vartheta^\circ] \leqslant \eta \tag{3.5}$$

Но при $t = \vartheta^\circ$ величина $\varepsilon_{\Delta^\bullet}[\vartheta^\circ]$ по определению является расстоянием между точками $\{y_\Delta[\vartheta^\circ]\}_m$ и $\{z[\vartheta^\circ]\}_m$. Поэтому из (3.5) следует справедливость утверждения теоремы.

§ 4. Рассуждения предыдущего параграфа позволяют дать следующее формальное определение тормозящей экстремальной стратегии U_e^* [5,6]. Рассмотрим $(n^{(1)}+n^{(2)}+1)$-мерное фазовое пространство W, состоящее из элементов $\{y, z, \vartheta\}$, где ϑ — скалярная переменная и $\vartheta \geqslant 0$. Пространство W разобьем на части W_0 и W_ε.

Множество W_0 — совокупность тех и только тех точек $\{y, z, \vartheta\}$, для которых $\vartheta \geqslant \vartheta^\circ(t, y, z, \lambda)$, а W_ε — напротив, совокупность тех точек $\{y, z, \vartheta\}$, для которых $\vartheta < \vartheta^\circ(t, y, z, \lambda)$.

Стратегию U_e^* определим множествами $U_e(t, y, z, \vartheta, \lambda)$, зависящими от величин $t, y, z, \vartheta, \lambda$ следующим образом:

$$U_e(t,y,z,\vartheta,\lambda) = U, \quad \text{если } \{y,z,\vartheta\} \in W_0$$
$$U_e(t,y,z,\vartheta,\lambda) = U_e^{(\varepsilon)}, \quad \text{если } \{y,z,\vartheta\} \in W_\varepsilon$$

Причем множества $U_e^{(\varepsilon)}(t, y, z, \vartheta, \lambda)$ представляют собой совокупность всех тех векторов $u_e[t]$, которые удовлетворяют условию максимума

$$l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta, t; l^\circ, \vartheta, t, y, \lambda]\, B^{(1)}(t)\}_m u_e[t] =$$
$$= \max_u l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta, t; l^\circ, \vartheta, t, y, \lambda]\, B^{(1)}(t)\}_m u \qquad (u \in U)$$

где l° — вектор, на котором достигается максимум в правой части равенства (2.3).

При этом, в те моменты времени t, когда $\|l^{\circ\prime}\{YB^{(1)}\}_m\| \neq 0$ множества $U_e^{(\varepsilon)}$ будут состоять из одной единственной точки

$$u_e[t] = \mu\frac{(l^{\circ\prime}\{YB^{(1)}\}_m)'}{\|l^{\circ\prime}\{YB^{(1)}\}_m\|}$$

в те же моменты времени t, когда $\|l^{\circ\prime}\{YB^{(1)}\}_m\| = 0$, будем полагать, что $U_e^{(\varepsilon)} = U$.

Дополним теперь систему (1.1) и (1.2) соотношениями, которые определят изменение с течением времени t величины $\vartheta[t]$. Будем считать [5,6], что функция $\vartheta[t]$ непрерывна справа и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &(d\vartheta/dt)^+ \leqslant 0, \quad \text{если } \{y,z,\vartheta\} \in W_0 \\ &d\vartheta/dt = 0, \quad \text{если } \{y,z,\vartheta\} \in W_\varepsilon \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Символ $(d\vartheta/dt)^+$ означает правую верхнюю производную.

Предельным переходом при $\Delta \to 0$ от дискретной схемы, описанной в § 3, можно показать [5–9], что тормозящая экстремальная стратегия U_e^* обеспечивает существование решения $\{y[t], z[t], \vartheta[t]\}$ уравнений (1.1), (1.2), (4.1), удовлетворяющего начальному условию

$$\{y[t_0], z[t_0], \vartheta[t_0]\} \in W_0 \qquad (\vartheta[t_0] = \vartheta^\circ)$$

и при всех $t \geqslant t_0$ до тех пор, пока не осуществится встреча, содержащегося во множестве W_0. Следовательно, справедливо утверждение.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия 2.1 и 2.2 и пусть имеет место регулярный случай, тогда при $\lambda \leqslant \lambda_0$ тормозящая экстремальная стратегия U^*_e обеспечивает встречу движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем в момент поглощения $\vartheta^\circ = \vartheta(t_0, y[t_0], z[t_0], \lambda)$, какой бы ни оказалась допустимая реализация $v[t]$ управления v, если только начальная позиция $\{t_0, y[t_0], z[t_0]\}$ ($y[t_0] \in \Gamma_1^\circ$, $z[t_0] \in \Gamma_2^\circ$) такова, что момент поглощения существует.

Примечание 4.1. Все предыдущие утверждения легко переносятся и на более общие случаи игровой задачи о встрече квазилинейных объектов. Пусть P — заданное выпуклое, замкнутое и ограниченное множество, состоящее из m-мерных векторов p. Будем говорить [6], что точка $\{z[t]\}_m$ содержится в области влияния $M(\{y[t]\}_m)$ точки $\{y[t]\}_m$ тогда и только тогда, когда вектор $p = \{z[t]\}_m - \{y[t]\}_m$ содержится во множестве P. Момент времени $t = \vartheta \geqslant t_0$, когда впервые точка $\{z[\vartheta]\}_m$ попадает в область влияния $M(\{y[\vartheta]\}_m)$ точки $\{y[\vartheta]\}_m$, называется моментом встречи движений $y[t]$ (1.1) и $z[t]$ (1.2). В случае такой задачи преследования (при выполнении условий 2.1 и 2.2) также можно сформулировать утверждения, подобные теоремам 3.1 и 4.1

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение работы и ценные советы.

Поступила 24 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, № 4.
3. Пшеничный Б. Н. О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Задача о сближении управляемых объектов. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
6. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
7. Альбрехт Э. Г. О сближении квазилинейных объектов. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
8. Альбрехт Э. Г. Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 3.
9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51, № 1.