То обстоятельство, что y^2 зависит и от u и от w, делает невозможным прямой перенос результатов, полученных в теории плоских течений.

При исследовании единственности решения задачи «в малом» контуры обтекаемых тел остаются неизменными. Поэтому соответствующие граничные условия будут записываться, как и в плоском случае, в виде $\psi_i = C_i$ на каждой из кривых $w_i = w_i(u)$, изображающих контур тела в основном течении.

Поступила 27 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит. 1960.
2. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике Л., Изд-во ЛГУ, 1965.
4. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. Белоцерковский О. М., Шифрин Э. Г. О наклоне звуковой линии на ударной волне в осесимметричном течении. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
6. Шифрин Э. Г. Об одном условии разрушения области непрерывного сверхзвукового течения при обтекании выпуклого профиля с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 4.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.
8. Шифрин Э. Г. К прямой задаче плоского симметричного обтекания гладкого выпуклого профиля с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
9. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений. Сб. теор. работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.

АППРОКСИМАЦИЯ ИГРОВЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

С. И. Тарлинский

(Свердловск)

Рассматривается три типичных игровых задачи в конфликтно-управляемых системах. Устанавливается, что в регулярном случае разрывные оптимальные способы управления можно аппроксимировать непрерывными стратегиями так, чтобы был достигнут эффект (с точки зрения преследователя или преследуемого) сколь угодно близкий к оптимальному.

§ 1. Рассмотрим движение $x(t) = \{x_i(t)\}$, $(i = 1, \ldots, n)$, описываемое векторным дифференциальным уравнением

$$dx / dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v + f(t) \tag{1.1}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размерностей $n \times n$, $n \times r$, $n \times s$ соответственно; $f(t)$ — n-мерный вектор возмущений; u и v — векторы управлений размерностей r и s, стесненные в каждый момент времени условиями

$$u[t] \in U_t, \qquad v[t] \in V_t \qquad (1.2$$

где U_t и V_t — выпуклые ограниченные замкнутые множества соответственно в r- и s-мерных пространствах E_r и E_s, изменяющиеся непрерывно с изменением t.

Рассматриваются следующие три задачи (см. [1–6]).

1. *Конфликтная задача о сближении.* Задан конечный момент времени ϑ. Задача преследователя, распоряжающегося управлением $u[t]$, заключается в том, чтобы минимизировать величину $\| \{x(\vartheta)\}_m \|$, а преследуемый, распоряжающийся управлением $v[t]$, стремится максимизировать эту величину. Здесь символ $\{q\}_m$ означает вектор, составленный из первых m координат вектора q, а $\| q \|$ — евклидову норму вектора q.

2. *Задача о преследовании.* Задано выпуклое ограниченное замкнутое множество M в m-мерном пространстве X_m.

Преследователь стремится обеспечить приведение движения $\{x[t]\}_m$ на множество M в наикратчайшее время.

3. *Задача об уклонении.* Снова задано выпуклое ограниченное замкнутое множество M в m-мерном пространстве X_m. Преследуемый стремится не допустить попадания $\{x[t]\}_m$ на множество М; если ему этого сделать не удается, то он ставит своей целью максимально отсрочить время выхода движения $\{x[t]\}_m$ на множество M.

Начальное состояние системы (1.1) $x[t_0] = x_0$ предполагается во всех задачах зафиксированным.

В соответствии с работой [7] под стратегиями $U(t, x)$ и $V(t, x)$ первого и второго игроков понимаются заданные при каждом значении $\{t, x\}$ выпуклые ограниченные замкнутые множества, полунепрерывные сверху по включению, причем $U(t, x) \subset U_t$, $V(t, x) \subset V_t$, а под решением уравнения (1.1) — любая абсолютно непрерывная функция $x(t)$, почти всюду удовлетворяющая условию

$$dx / dt \in A(t)x + B(t)U(t, x) - C(t)V(t, x) + f(t) \tag{1.3}$$

Тогда в соответствии с результатами работы [4] минимаксная стратегия $U_1^\circ(t, x)$ в задаче 1 удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{gathered}\Gamma^\circ(t_0, x_0) = \max_v \max_{x[t]} \{\| \{x(\vartheta)\}_m \| \mid \chi[U_1^\circ(t, x), V(t, x), t_0 x_0]\} \leqslant \\ \leqslant \max_v \max_{x[t]} \{\| \{x(\vartheta)\}_m \| \mid \chi[U(t, x), V(t, x), t_0, x_0]\}\end{gathered} \tag{1.4}$$

В задаче 2 минимаксная стратегия $U_2^\circ(t, x)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered}\theta^\circ(t_0, x_0) = \max_v \max_{x[t]} \{\theta^\circ \mid \chi[U_2^\circ(t, x), V(t, x), t_0, x_0]\} \leqslant \\ \leqslant \max_v \max_{x[t]} \{\theta \mid \chi[U(t, x), V(t, x), t_0, x_0]\}\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем $\chi[U(t, x), V(t, x), t_0, x_0]$ — семейство движений системы (1.3), порожденное стратегиями $U(t, x)$, $V(t, x)$ и начальными данными t_0, x_0, а θ — время выхода движения $\{x[t]\}_m$ на множество M, где $x[t] \in \chi[U(t, x), V(t, x), t_0, x_0]$.

Максиминные стратегии $V_1^\circ(t, x)$ и $V_2^\circ(t, x)$ в задачах 1 и 3 удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\Gamma_0(t_0, x_0) = \min_u \min_{x[t]} \{\| \{x(\vartheta)\}_m \| \mid \chi[U(t, x), V_1^\circ(t, x), t_0, x_0]\} \geqslant \\ \geqslant \min_u \min_{x[t]} \{\| \{x(\vartheta)\}_m \| \mid \chi[U(t, x), V(t, x), t_0, x_0]\}\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\theta_0(t_0, x_0) = \min_u \min_{x[t]} \{\theta_0 \mid \chi[U(t, x), V_2^\circ(t, x), t_0, x_0]\} \geqslant \\ \geqslant \min_u \min_{x[t]} \{\theta \mid \chi[U(t, x), V(t, x), t_0, x_0]\}\end{gathered} \tag{1.7}$$

Если в задаче 1 имеет место регулярный случай (см., например, [4,7]), то известен способ построения минимаксной и максиминной стратегии преследователя и преследуемого. При этом случай называется регулярным, если максимум выражения

$$\varepsilon^\circ(t, x) = \max_{\|l\|=1} [\rho_2(t, \vartheta, l) - \rho_1(t, \vartheta, l) - l'x^\circ(t, x, \vartheta)] \tag{1.8}$$

при $\varepsilon^\circ(t, x) > 0$ достигается на единственном векторе среди всех векторов вида

$$l = \{l_i\} \quad (i=1,\ldots,n), \qquad l_j = 0 \quad \text{при } j > m \tag{1.9}$$

Верхний индекс означает транспонирование, а смысл величин, фигурирующих в формуле (1.8), определяется соотношениями

$$\rho_1(t, \vartheta, l) = \max_{u(\xi)} \left[\int_t^{\vartheta} B'(\xi)\, S[\xi, t]\, lu(\xi)\, d\xi \right], \qquad u(\xi) \in U_\xi \tag{1.10}$$

$$\rho_2(t, \vartheta, l) = \max_{v(\xi)} \left[\int_t^{\vartheta} B'(\xi)\, S[\xi, t]\, lv(\xi)\, d\xi \right], \qquad v(\xi) \in V_\xi \tag{1.11}$$

$$x^\circ(t, x, \vartheta) = X[\vartheta, t]\, x + \int_t^{\vartheta} X[\vartheta, \xi]\, f(\xi)\, d\xi \tag{1.12}$$

где $X[t, \tau]$, $S[t, \tau]$ — фундаментальные матрицы уравнений

$$dx \,/\, dt = A(t)x, \quad ds \,/\, dt \in -A'(t)s \tag{1.13}$$

Ниже рассматривается аппроксимация оптимальных стратегий $U^\circ(t, x)$, $V^\circ(t, x)$ непрерывными стратегиями, т. е. такими стратегиями, которые задаются однозначными непрерывными функциями $u(t, x)$, $v(t, x)$, удовлетворяющими условиям

$$u(t, x) \in U_t, \qquad v(t, x) \in V_t$$

Ниже будет показано, что такая аппроксимация в сформулированных задачах 1—3 имеет место. Точный смысл этой аппроксимации будет разъяснен по ходу разбора каждой из трех задач.

§ 2. Рассмотрим задачу 1. Остановимся сначала на скалярном случае, когда $B(t) = b(t)$ есть n-мерный вектор, а множество U_t представимо в виде

$$U_t = \{u : |u| \leqslant \mu, \ \mu > 0\} \tag{2.1}$$

и имеет место регулярный случай. Тогда максиминная стратегия первого игрока определяется следующим образом [4]: множество $U^\circ(t, x)$ при $\varepsilon^\circ(t, x) > 0$ образуется теми и только теми величинами u°, для которых выполняется условие

$$s'(t, x) b(t) u^\circ = \max_u [s'(t, x) b(t) u] \quad \text{при } |u| \leqslant \mu \tag{2.2}$$

где $s(t, x)$ — решение уравнения (1.12) при краевом условии $s(\vartheta) = l^\circ$ и вектор l° определяется из (1.8). В области $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant 0$ имеем $U^\circ(t, x) = U_t$. Отметим, что в регулярном случае игры выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \Gamma^\circ(t_0, x_0) = \Gamma_0(t_0, x_0) = \varepsilon^\circ(t_0, x_0), \quad \text{если } \varepsilon^\circ(t_0, x_0) > 0 \\ \Gamma^\circ(t_0, x_0) = \Gamma_0(t_0, x_0) = 0, \quad \text{если } \varepsilon^\circ(t_0, x_0) \leqslant 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

При сделанных предположениях справедлива следующая теорема

Теорема 2.1. Для любого $\alpha > 0$ существует непрерывная стратегия $u^\alpha(t, x)$, удовлетворяющая соотношению

$$\sup_v \sup_{x[t]} \{\|\{x(\vartheta)\}_m\| \mid \chi[u^\alpha(t, x), v(t), t_0, x_0]\} \leqslant \Gamma^\circ(t_0, x_0) + \alpha \tag{2.4}$$

где $v(t)$ — любая допустимая реализация, т. е. интегрируемая функция, удовлетворяющая условию $v(t) \in V_t$.

Докажем теорему. Введем функцию $\omega(t, x) = s'(t, x) b(t)$. Тогда из формулы 2.2), учитывая (2.1), получим, что минимаксная стратегия определяется условиями

$$U^\circ(t, x) = \begin{cases} \mu, & \text{если } \omega(t, x) > 0 \text{ и } \varepsilon^\circ(t, x) > 0 \\ -\mu, & \text{если } \omega(t, x) < 0 \text{ и } \varepsilon^\circ(t, x) > 0 \\ -\mu \leqslant u^\circ \leqslant \mu, & \text{если } \omega(t, x) = 0 \text{ или } \varepsilon^\circ(t, x) \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Возьмем произвольное число $\alpha > 0$ и в $(n+1)$-мерном пространстве $X_t\{\vartheta\} = \{t, x: t \leqslant \vartheta\}$ определим множества $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ следующим образом:

$$N_1 = \{t, x: \omega(t, x) > {}^1\!/_4\alpha\mu(\vartheta - t_0); \quad \varepsilon^\circ(t, x) > 0\} \quad N_4 = \{t, x: \varepsilon^\circ(t, x) > {}^1\!/_2\alpha\}$$
$$N_2 = \{t, x: \omega(t, x) < -{}^1\!/_4\alpha\mu(\vartheta - t_0); \ \varepsilon^\circ(t, x) > 0\} \quad N_5 = \{t, x: 0 < \varepsilon^\circ(t, x) \leqslant {}^1\!/_2\alpha\}$$
$$N_3 = \{t, x: |\omega(t, x)| < {}^1\!/_4\alpha\mu(\vartheta - t_0), \ \varepsilon^\circ(t, x > 0\} \quad N_6 = \{t, x: \varepsilon^\circ(t, x) \leqslant 0\}$$

Заметим, что множества N_4, N_5, N_6 не пересекаются и составляют все пространство $X_t\{\vartheta\}$. Определим теперь в $X_t\{\vartheta\}$ стратегию $u^\alpha(t, x)$, полагая

$$u^\alpha(t, x) = \begin{cases} u(t, x), \ \{t, x\} \in N_4, \\ u^*(t, x) = 2\alpha^{-1}\varepsilon^\circ(t, x)\, u(t, x), \ \{t, x\} \in N_5, \\ 0, \ \{t, x\} \in N_6, \end{cases}$$

$$u(t, x) = \begin{cases} \mu, \ \{t, x\} \in N_1 \\ -\mu, \ \{t, x\} \in N_2 \\ \mu^* = 4\mu^2\alpha^{-1}(\vartheta - t_0)\,\omega(t, x) \ \{t, x\} \in N_3 \end{cases} \tag{2.6}$$

Здесь $u(t, x)$ непрерывная функция. Очевидно, $u^\alpha(t, x)$ определена и непрерывна на всем пространстве $X_t\{\vartheta\}$.

Рассмотрим теперь, как будет меняться $\varepsilon^\circ(t, x)$, (1.8) в области N_4 при использовании вторым игроком любой допустимой реализации $v(t)$. Функция $\varepsilon^\circ(t, x)$ в регулярном случае дифференцируема в области $\varepsilon^\circ(t, x) > 0$, поэтому, вычисляя производную $d\varepsilon^\circ / dt$ вдоль движения системы (1.1), порожденного управлениями $u^\alpha(t, x)$, $v(t)$, получим (см., например, [8])

$$d\varepsilon^\circ / dt = \max_u [\omega(t, x)u] - \omega(t, x)u^\alpha(t, x) - \max_v [s'(t, x)\, C(t)v] + s'(t, x)C(t)v(t)$$
$$\text{при } |u| \leqslant \mu, \ v \in V_t \tag{2.7}$$

учитывая, что в области N_4 непрерывная стратегия $u^\alpha(t, x)$ отличается от $U^\circ(t, x)$, (2.6) и (2.5), лишь на множестве N_3 имеем

$$\frac{d\varepsilon^\circ}{dt} \leqslant \frac{\alpha}{2(\vartheta - t_0)} \tag{2.8}$$

Из (2.8), (2.6) получим

$$\varepsilon^\circ[\vartheta] \leqslant \varepsilon^\circ[t_0] + \alpha$$

Тогда из (1.8), (2.3), (2.6) вытекает, что

$$\|\{x(\vartheta)\}_m\| = \varepsilon^\circ[\vartheta] \leqslant \Gamma^\circ(t_0, x_0) + \alpha \tag{2.9}$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Аналогичными выкладками можно показать, что при подходящей аппроксимации максиминной стратегии $V^\circ(t, x)$ непрерывной функцией $v^\alpha(t, x)$ в задаче сближения в регулярном случае и при ограничениях на управляющее воздействие вида

$$V_t = \{v: |v| \leqslant \nu, \ \nu > 0\} \tag{2.10}$$

имеет место условие

$$\inf_u \inf_{x[t]} \{\| \{x(\vartheta)\}_m \| \ |\chi[u(t), v^\alpha(t, x), t_0, x_0]\} \geqslant \Gamma_0(t_0, x_0) + \alpha \tag{2.11}$$

где $u(t)$ — любая допустимая реализация. Таким образом, и здесь можно построить непрерывную стратегию $v^\alpha(t, x)$, аппроксимирующую максиминную такую, что результат игры будет отличаться от оптимального на сколь угодно малую величину.

§ 3. Рассмотрим теперь сформулированную в § 1 задачу 2 (о преследовании). Будем предполагать, что ограничение на управляющее воздействие преследователя задано в виде (2.1) и имеет место регулярный случай. При этом случай называется регулярным, если максимум выражения

$$\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta) = \max_{\|l\|=1} [\rho_2(t, \vartheta, l) - \rho_1(t, \vartheta, l) - l'x^\circ(t, x, \vartheta) - \max_p \{l'p\}] \tag{3.1}$$

при любом $\vartheta \geqslant t_0$ и при условии $\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta) > 0$ достигается на единственном векторе l° среди векторов вида (1.9).

В соотношении (3.1) величины $\rho_1(t, \vartheta, l)$, $\rho_2(t, \vartheta, l)$, $x^\circ(t, x, \vartheta)$ определяются из (1.10) — (1.13), а максимум величины $\{l'p\}$ берется по всем векторам p таким, что $-p \in M$.

Тогда существует (см. [5]) стратегия преследователя $U^\circ(t, x)$, обеспечивающая приведение $\{x[t]\}_m$ на множество M к моменту поглощения $\vartheta = \vartheta_0^M(t_0, x_0)$, где $\vartheta_0^M(t_0, x_0)$ — наименьший момент времени, когда впервые область достижимости процесса (1.1) по всевозможным программным управлениям $u(t)$ и любом фиксированном программном управлении $v(t)$ будет содержать хотя бы одну точку множества M.

Следуя результатам работы [6], стратегию $U^\circ(t, x)$ можно определить следующим образом. В $(n+1)$-мерном пространстве $X_t\{\vartheta_0^M(t_0, x_0)\}$ вводятся множества W_1, W

$$W_1 = \{t, x\colon \varepsilon^\circ(t, x) > 0\}, \qquad W_2 = \{t, x\colon \varepsilon^\circ(t, x) \leqslant 0\}$$

Тогда на множестве W_1 стратегия $U^\circ(t, x)$ определяется теми и только теми величинами u°, для которых выполняется условие

$$s'(t, x) b(t) u^\circ = \max_u [s'(t, x) b(t) u] \quad \text{при} \quad |u| \leqslant \mu \tag{3.2}$$

$U^\circ(t, x) = U_t$ на множестве W_2.

В формуле (3.2) $s(t, x)$ определяется из условий (1.8) — (1.13) и является непрерывной функцией своих аргументов в открытой области W_1.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Для любого $\alpha > 0$ существует непрерывная стратегия $u^\alpha(t, x)$ такая, что к моменту $\vartheta_0^M(t_0, x_0)$ будет выполняться условие

$$\sup_v \sup_{x[t]} \min_\vartheta \{\rho[\{x(\vartheta)\}_m, M] \mid \chi[u^\alpha(t, x), v(t), t_0, x_0]\} \leqslant \alpha \tag{3.3}$$

$$\text{при } t_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0^M(t_0, x_0)$$

где $\rho[q, M]$ — евклидово расстояние от точки q до множества M. Доказательство теоремы 3.1 по существу не отличается от доказательства теоремы 2.1, а поэтому наметим лишь план рассуждений.

В $(n+1)$-мерном пространстве $X_t\{\vartheta_0^M(t_0, x_0)\}$ определяются множества N_1, N_2

$$N_1 = \left\{t, x : |s'(t, x) b(t)| > \frac{\alpha}{4\mu(\vartheta_0^M(t_0, x_0) - t_0)} \text{ и } \varepsilon^\circ(t, x, \vartheta_0^M(t_0, x_0)) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$N_2 = \left\{t, x : |s'(t, x) b(t)| \leqslant \frac{\alpha}{4\mu(\vartheta_0^M(t_0, x_0) - t_0)} \text{ или } \varepsilon^\circ(t, x, \vartheta_0^M(t_0, x_0)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$$

Так же как и в теореме 2.1, здесь можно построить непрерывную функцию $u^\alpha(t, x)$ такую, что

$$u^\alpha(t, x) = U^\circ(t, x), \text{ если } \{t, x\} \in N_1, \qquad u^\alpha(t, x) \in U_t, \text{ если } \{t, x\} \in N_2$$

Тогда, вычисляя в области $\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta_0^M(t_0, x_0)) > 0$ производную $d\varepsilon^\circ / dt$ вдоль движения системы (1.1), порожденного стратегией $u^\alpha(t, x)$ и любой допустимой реализацией $v(t)$, получим неравенство (2.8). Интегрируя это неравенство, убеждаемся, что имеет место условие (3.3), что и доказывает теорему.

§ 4. Рассмотрим задачу 3 при условии, что ограничения на управляющие воздействия игроков задаются условиями (2.1), (2.10), причем $\mu > \nu$ и в уравнении (1.1) функции $B(t) = C(t) = b'(t)$.

Тогда будет иметь место регулярный случай (3.1), и для любого $\alpha > 0$ можно указать стратегию $V^\alpha(t, x)$, обеспечивающую уклонение движения $\{x[t]\}_m$ от выхода на многообразие M до момента времени $\vartheta_0^M(t_0, x_0) - {}^1/_2\alpha$. Следуя результатам работы [6], стратегию $V^\alpha(t, x)$ можно определить следующим образом. Введем множества N_1, N_2.

$$N_1 = \{t, x\colon \min_\vartheta [\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta)] > 0 \text{ при } t \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0^M(t_0, x_0) - {}^1/_2\alpha\}$$
$$N_2 = \{t, x\colon \min_\vartheta [\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta)] \leqslant 0 \text{ при } t \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0^M(t_0, x_0) - {}^1/_2\alpha\}$$

Тогда стратегия $V^\alpha(t, x)$ при каждых $\{t, x\} \in N_1$ состоит из тех и только тех величин v°, для которых справедливо условие

$$g'(t, x) b(t) v^\circ = \max_v [g'(t, x),\ b(t) v] \text{ при } |v| \leqslant \nu \tag{4.1}$$

$$g'(t, x) = -\operatorname{grad} \lambda(t, x), \quad \lambda(t, x) = \int_t^\chi \frac{d\xi}{\varepsilon^\circ(t, x, \xi)} \quad (\chi = \vartheta_0^M - {}^1/_2\alpha) \tag{4.2}$$

В области N_2 множества $V^\alpha(t, x)$ совпадают с V_t. Как и для задач 1 и 2, здесь также имеет место следующая аппроксимационная теорема.

Теорема 4.1. Для любого $\alpha > 0$ существует непрерывная стратегия $v^\alpha(t, x)$ такая, что справедливо соотношение

$$\inf_u \inf_{x[t]} \min_\vartheta \{\rho[\{x(\vartheta)_m\}, M] \mid \chi[u(t), v^\alpha(t, x), t_0, x_0]\} > 0$$
$$t_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0^{\mathrm{M}}(t_0, x_0) - \alpha \tag{4.3}$$

Докажем теорему. Введем функцию $h(t, x) = g'(t, x)\, b(t)$. Тогда из формулы (4.1) вытекает, что стратегия уклонения определяется условием

$$V^\alpha(t, x) = \begin{cases} \nu, & \text{если } h(t, x) > 0 \text{ и } \beta(t, x) > 0 \\ -\nu, & \text{если } h(t, x) < 0 \text{ и } \beta(t, x) > 0 \\ -\nu \leqslant |v^\circ| \leqslant \nu, & \text{если } h(t, x) = 0 \text{ или } \beta(t, x) \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\beta(t, x) = \min_\vartheta \varepsilon^\circ(t, x, \vartheta) \quad \text{при } t \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0^M(t_0, x_0) - {}^1/_2\alpha$$

Заметим, что функция $\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta)$ при $\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta) > 0$ удовлетворяет по ϑ условию Липшица

$$|\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta_1) - \varepsilon^\circ(t, x, \vartheta_2)| \leqslant L |\vartheta_1 - \vartheta_2|, \qquad L > 0$$

Введем множества

$$N_1 = \{t, x\colon \ h(t, x) > \nu'(k);\ \beta(t, x) > 0\}, \quad N_4 = \{t, x\colon \ \beta(t, x) > \delta\}$$
$$N_2 = \{t, x\colon h(t, x) < = \nu'(k);\ \beta(t, x) > 0\}, \quad N_5 = \{t, x\colon 0 < \beta(t, x) \leqslant \delta\}$$
$$N_3 = \{t, x\colon |h(t, x)| < \nu'(k);\ \beta(t, x) > 0\}, \quad N_6 = \{t, x\colon \ \beta(t, x) \leqslant 0\}$$
$$\nu'(k) = k/2\nu\, [\vartheta_0^M(t_0, x_0) - t_0]$$

Здесь k и δ — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$k + \lambda(t_0, x_0) < \frac{1}{L} \ln \frac{L\alpha}{2\delta} \tag{4.5}$$

Определим теперь непрерывную стратегию $v^\alpha(t, x)$, полагая

$$v^\alpha(t, x) = \begin{cases} v(t, x) & \{t, x\} \in N_4, \\ v^*(t, x), & \{t, x\} \in N_5, \\ 0, & \{t, x\} \in N_6, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$v^*(t, x) = \delta^{-1} v(t, x) \beta(t, x)$$

Здесь непрерывная функция $v(t, x)$ задается соотношением

$$v(t, x) = \begin{cases} \nu, & \{t, x\} \in N_1 \\ -\nu, & \{t, x\} \in N_2 \\ \nu^*, & \{t, x\} \in N_3 \end{cases}$$

где

$$\nu^* = 2\nu^2 k^{-1} (\vartheta_0^M(t_0, x_0), - t_0), \ h(t, x)$$

Покажем, что определенная таким образом стратегия $v^\alpha(t, x)$ обеспечивает уклонение движения $\{x[t]\}_m$ от выхода на многообразие M до момента времени $\vartheta_0^M(t_0, x_0) - \alpha$. Очевидно, для этого достаточно показать, что вдоль движения системы (1.1), порожденного управлениями $u(t)$, $v^\alpha(t, x)$ до момента времени $\vartheta_0^M(t_0, x_0) - \alpha$ имеет место неравенство $\beta[t] > \delta$. Действительно, в начальный момент времени t_0 выполняется условие $\beta(t_0, x_0) = \beta[t_0] > \delta$. Допустим противное. Пусть в момент времени t_1 впервые выполняется равенство $\beta[t_1] = \delta$. Это означает, что вектор $\{t_1, x[t_1]\}$ попадает на границу множества N_5. Тогда, согласно работе [6], вычисляя производную $d\lambda / dt$ вдоль движения системы (1.1), порожденного управлениями $u(t)$, $v^\alpha(t, x)$, и учитывая, что $v^\alpha(t, x)$ отличается от $V^\alpha(t, x)$ при $\{t, x\} \in N_4$ лишь на множестве N_3, получим

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant \frac{k}{\vartheta_0^M(t_0, x_0) - t_0} \tag{4.7}$$

Тогда из (4.7) вытекает, что

$$\lambda[t_1] \leqslant \lambda[t_0] + k \tag{4.8}$$

С другой стороны, для всех значений $\{t, x\}$ таких, что $\beta(t, x) = \delta$ и $t \leqslant \vartheta_0^M(t_0, x_0)$ справедливо неравенство

$$\lambda(t, x) > \frac{1}{L} \ln \frac{L\alpha}{2\delta}$$

и значит

$$\lambda(t_1, x[t_1]) = \lambda[t_1] > \frac{1}{L} \ln \frac{L\alpha}{2\delta} \tag{4.9}$$

Тогда из (4.8), (4.9) следует

$$\frac{1}{L} \ln \frac{L\alpha}{2\delta} < \lambda[t_0] + k \tag{4.10}$$

Условия (4.5), (4.10), противоречивы и, значит, движение $\{x[t]\}_m$ до момента времени $\vartheta_0^M(t_0, x_0) - \alpha$ не покидает множества N_4, что и доказывает теорему.

§ 5. В заключение рассмотрим более общий случай, когда ограничения на управляющие воздействия u и v задаются в виде (1.2), а U_t и V_t — произвольные выпуклые замкнутые ограниченные множества непрерывные по t. Кроме того, будем предполагать, что в задаче 3 множества U_t и V_t одинаково ориентированы и подобны с коэффициентом подобия $\beta > 1$ и $B(t) = C(t)$.

Лемма 5.1. Пусть заданы непрерывная r-мерная вектор-функция $h(t, x)$ в $(n+1)$-мерном пространстве X_t и W_t — выпуклое ограниченное замкнутое множество в r-мерном пространстве E_r, содержащее 0 и непрерывное по t. Тогда для любого $a > 0$ существует непрерывная функция $w^\alpha(t, x) \in W_t$ такая, что

$$h'(t, x) w^\alpha(t, x) \geqslant \max_w [h'(t, x) w] - \alpha \text{ при } w \in W_t \tag{5.1}$$

Доказательство леммы 5.1 можно провести следующим образом. Для любого t в r-мерном пространстве E_r надлежит построить строго выпуклое множество G_t, содержащее W_t такое, что для любого вектора $g \in G_t$ найдется вектор $w \in W_t$, что $\| g - w \| \leqslant \eta$, где $\eta > 0$ наперед заданное, сколько угодно малое число, не зависящее от t.

Ввиду того что множество G_t строго выпуклое, максимум выражения

$$h'(t, x)g^\circ = \max_g [h'(t, x)g] \quad \text{при } g \in G_t \tag{5.2}$$

достигается на единственном векторе $g^\circ = g^\circ(t, x)$, и можно показать, что $g^\circ(t, x)$ будет непрерывной функцией от $\{t, x\}$ на множестве $N = \{t, x: h(t, x) \neq 0\}$. Если определить функцию $w^\circ(t, x) \in W_t$ из условия

$$\| w^\circ(t, x) - g^\circ(t, x) = \| \min_w \| w - g^\circ(t, x) \|, \quad \text{при } w \in W_t \tag{5.3}$$

то оказывается, что она будет однозначной, так как минимум выражения (5.3) достигается на единственном векторе $w^\circ = w^\circ(t, x)$ и непрерывной на множестве N. Кроме того, для любого $\alpha > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что при $\{t, x\} \in N$ имеет место неравенство (5.1). Тогда, определяя функцию $w^\alpha(t, x)$ соотношениями

$$w^\alpha(t, x) = \begin{cases} w^\circ(t, x), & \text{если } \| h(t, x) \| > k^{-1} \quad (5.4) \\ k \| h(t, x) \| w^\circ(t, x), & \text{если } \| h(t, x) \| < k^{-1} \quad (5.5) \end{cases}$$

$$k = \delta / \alpha, \quad \delta = \max_t \max_w{}' \| w \| \quad \text{при } w \in W_t$$

получим утверждение леммы 5.1.

Используя лемму 5.1, можно для задач 1—3 построить непрерывные аппроксимации стратегий $U^\circ(t, x)$, $V^\circ(t, x)$ такие, что в регулярном случае теоремы 2.1—4.1 будут иметь место не только для ограничений вида (2.1), (2.10), но и в общем случае ограничений (1.2.) При этом потребуется лишь повторить с понятными изменениями те аппроксимационные построения, которые были описаны выше в скалярном случае.

Замечание 5.1. Аппроксимация, о которой идет речь в лемме 5.1, без больших затруднений выписывается в явном виде во многих частных случаях. Например, если ограничения на управляющие воздействия u и v имеют вид

$$U_t = \{u_1, \ldots, u_r: | u_i | \leqslant \mu_i(t)\}, \qquad V_t = \{v_1, \ldots, v_s \mid | v_j | > \nu_j(t)\} \tag{5.6}$$
$$\mu_i(t) > 0 \quad (i = 1, \ldots, r), \qquad \nu_j(t) > 0 \quad (j = 1, \ldots, s)$$

Автор благодарит Н. Н. Красовского за ценные замечания.

Поступила 26 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 61.
3. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
4. Красовский Н. Н. О дифференциальной игре на сближение. Докл. АН СССР 1968, т. 182, № 6.
5. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Оптимальное уклонение в дифференциальной игре. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 12.
7. Красовский Н. Н. Игровые задачи динамики. I. Техн. кибернетика, 1969, № 5; II, 1970, № 1.
8. Субботин А. И. Регуляризация одной задачи о встрече движений. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 5.