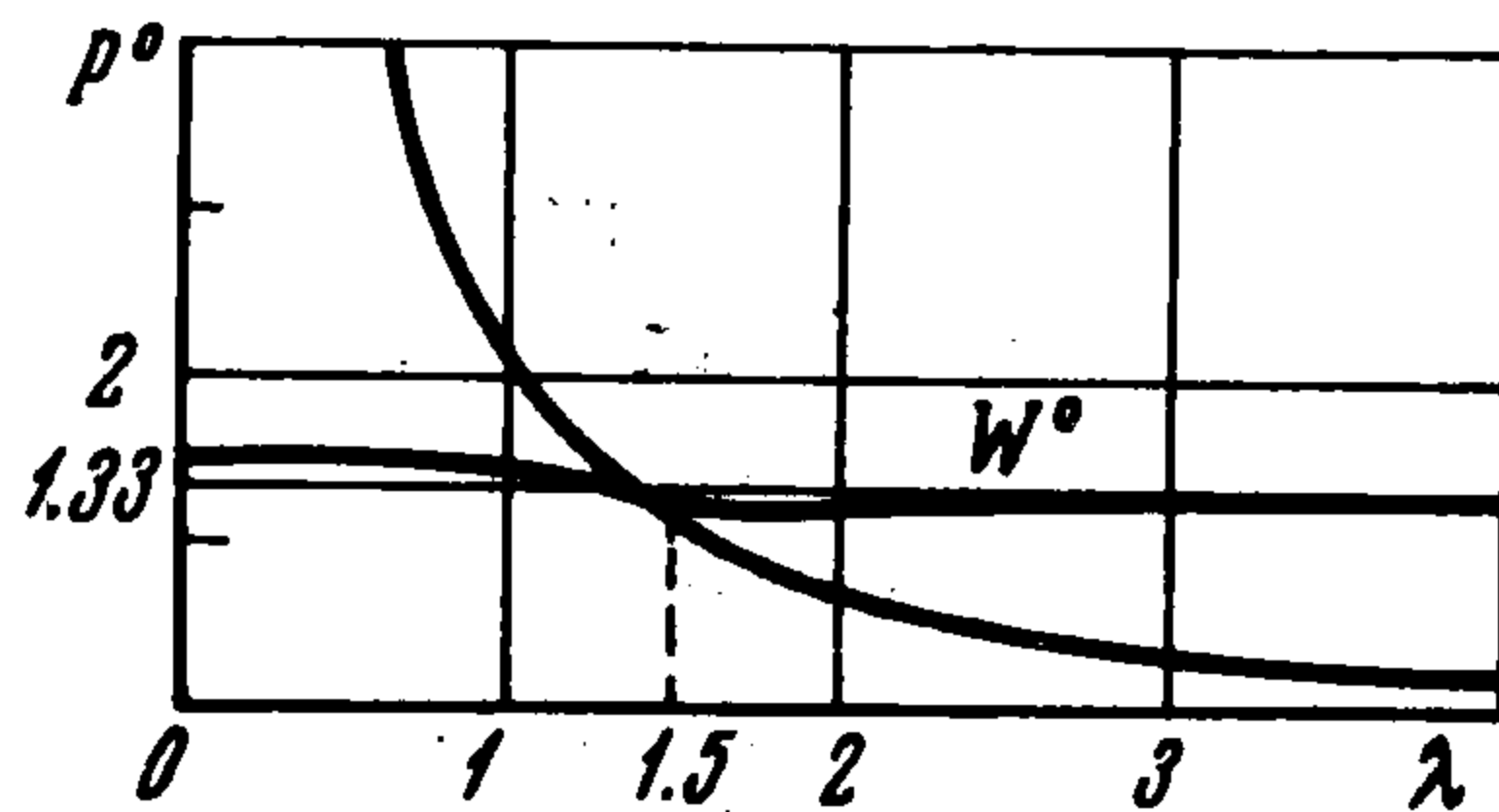


Как показывают численные расчеты, формулы § 2 и 3, дающие решение поставленной задачи соответственно при больших и малых  $\lambda$ , охватывают весь интервал изменения  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \infty$ ). Стыковка обоих методов происходит в окрестности точки  $\lambda = 1.5$ .

В качестве примера рассмотрим полученные формулы для случая  $\delta = 0.5$ . При этом имеем

$$\begin{aligned} a_{20} &= -0.25\pi, & a_{12} &= 0.125 \\ a_{32} &= 0.2629, & a_{22} &= -1/96\pi \\ B &= 2.725, & C &= 1.362, & A &= 2 \end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в таблице и на фиг. 2. Срачивание обоих методов происходит в окрестности точки  $\lambda = 1.5$ , причем относительное различие результатов при  $\lambda = 1.5$  составляет 3% для коэффициента подъемной силы  $P^\circ = P^*/\pi\rho U^2 h^2 \alpha^*$  и 1% для коэффициента сопротивления  $W^\circ = W/\beta P$



Фиг. 2

$\lambda$	0	0.25	0.5	1.0	1.5	2	5	10	$\infty$	
$P^\circ$	$\infty$	43.45	8.240	2.055	1.196	1.157	0.6854	0.1200	0.03012	0
$W^\circ$	1.5	1.496	1.477	1.420	1.317	1.310	1.315	1.323	1.328	1.333

Поступила 2 VI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактными задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, «Механика», 1965, № 2.
3. Белоконь В. М., Грунтфест Р. А. К задаче глассирования пластинки по поверхности тяжелой идеальной жидкости конечной глубины. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2. М., «Наука», 1966.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА

Э. Г. Шифрин

(Москва)

Вводится специальная плоскость годографа для изучения осесимметричных трансзвуковых течений. Исследование отображений в эту плоскость позволяет обобщить ряд известных свойств плоских трансзвуковых потоков.

Уравнения осесимметричных трансзвуковых течений имеют вид [1]

$$uu_x = v_y + v/y, \quad v_x = u_y \quad (u = (k+1)(\lambda-1) + \dots, \quad v = (k+1)\beta + \dots)$$

Здесь  $\lambda$  — коэффициент скорости,  $\beta$  — угол наклона вектора скорости к оси симметрии,  $x, y$  — декартова система координат в физической плоскости (ось  $x$  совпадает с осью симметрии,  $y = |y|$ ). Обозначив  $w = vy$ , приведем эту систему к однородной (относительно первых производных) форме

$$yuu_x = w_y, \quad w_x = yu_y \quad (1)$$

Введем специальную плоскость годографа  $uw$ . Эта плоскость получается растяжением в каждой точке плоскости годографа  $uv$  в  $y$  раз в направлении оси  $v$ . Пусть оси  $x, u$  направлены горизонтально вправо, оси  $w, y$  — вертикально вверх.

1°. Якобиан отображения в плоскость  $uw$  при помощи (1) преобразуется к виду

$$J = \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, y)} = u_x w_y - u_y w_x = y(u u_x^2 - u_y^2) \quad (2)$$

Так как  $J \leq 0$  при  $u \leq 0$ , отображение области дозвуковых скоростей в плоскость  $uw$  является локально однолиственным ( $J$  обращается в нуль только в изолированных точках). Кроме того, ориентации соответствующих контуров в плоскостях  $xu$  и  $uw$  оказываются противоположными. Поэтому имеет место обобщение «закона монотонности» вектора скорости на звуковой линии, установленного в [2] для плоских потенциальных течений, указанное ниже.

Перемещению по звуковой линии, при котором область дозвуковых скоростей остается слева, соответствует монотонное убывание  $w$ .

Если при таком перемещении  $y$  монотонно возрастает, то будет убывать и  $v$ , т. е. вектор скорости монотонно поворачивается по часовой стрелке. Последнее справедливо и в рамках точных уравнений осесимметричных потенциальных течений для участка звуковой линии, где  $\beta \geq 0$  и где при указанном направлении обхода функция тока  $\psi$  монотонно возрастает. Действительно, уравнения движения имеют вид  $(\partial / \partial S_1, \partial / \partial S_2$  — производные по направлениям линии тока и нормали к ней)

$$(M^2 - 1) \frac{\partial \ln \lambda}{\partial S_1} = \frac{\partial \beta}{\partial S_2} + \frac{\sin \beta}{y}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial S_1} = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial S_2} \quad (3)$$

При  $\lambda = 1$  получим

$$\frac{\partial(\ln \lambda, \beta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\ln \lambda, \beta)}{\partial(S_1, S_2)} = -\frac{\sin \beta}{y} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial S_1} - \left(\frac{\partial \beta}{\partial S_1}\right)^2 \leq 0 \quad \text{при } \beta \geq 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial S_1} \geq 0$$

При выбранном направлении обхода звуковой линии условие  $d\lambda / dS_1 \geq 0$  равносильно условию монотонного возрастания  $\psi$ .

Система (1) в плоскости  $uw$  преобразуется к виду

$$uy u_w = x_u, \quad y_u = y x_w \quad (4)$$

Якобиан  $j = J^{-1}$  с использованием этих уравнений можно представить в виде

$$j = x_u y_w - x_w y_u = y(u y_w^2 - x_w^2)$$

В дозвуковой области  $j$  может обращаться в нуль только в изолированных точках.

2°. Уравнения характеристик в плоскостях  $xu$  и  $uw$  имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \left(\frac{dw}{du}\right)_{1,2} = \pm y \sqrt{u} \quad (5)$$

Из первого уравнения следует, что в течении, описываемом системой (1), направление звуковой линии является характеристическим в точках  $K$  вертикальности звуковой линии; в этих точках  $J = 0$ .

Из (5) следует, что в соответствующих точках плоскостей  $x, \ln y$  и  $uw$  имеет место взаимная ортогональность разноименных характеристик.

Если обозначить производные по характеристическим направлениям в плоскостях  $xu$  и  $uw$  через

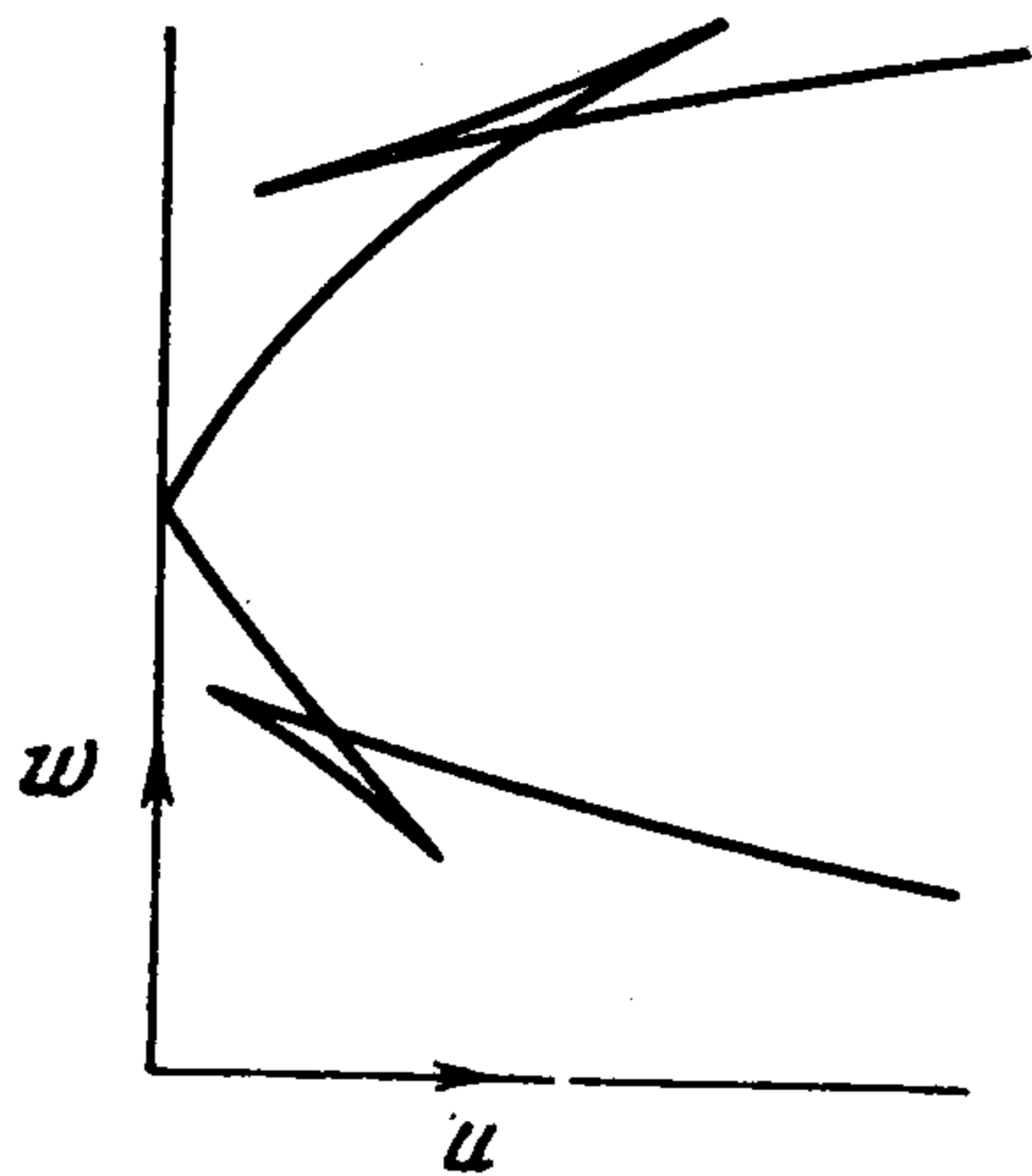
$$\frac{\partial}{\partial s_{1,2}} = \pm \sqrt{u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_{1,2}} = \frac{\partial}{\partial u} \pm y \sqrt{u} \frac{\partial}{\partial w}$$

то выражения для  $J, j$  преобразуются к виду

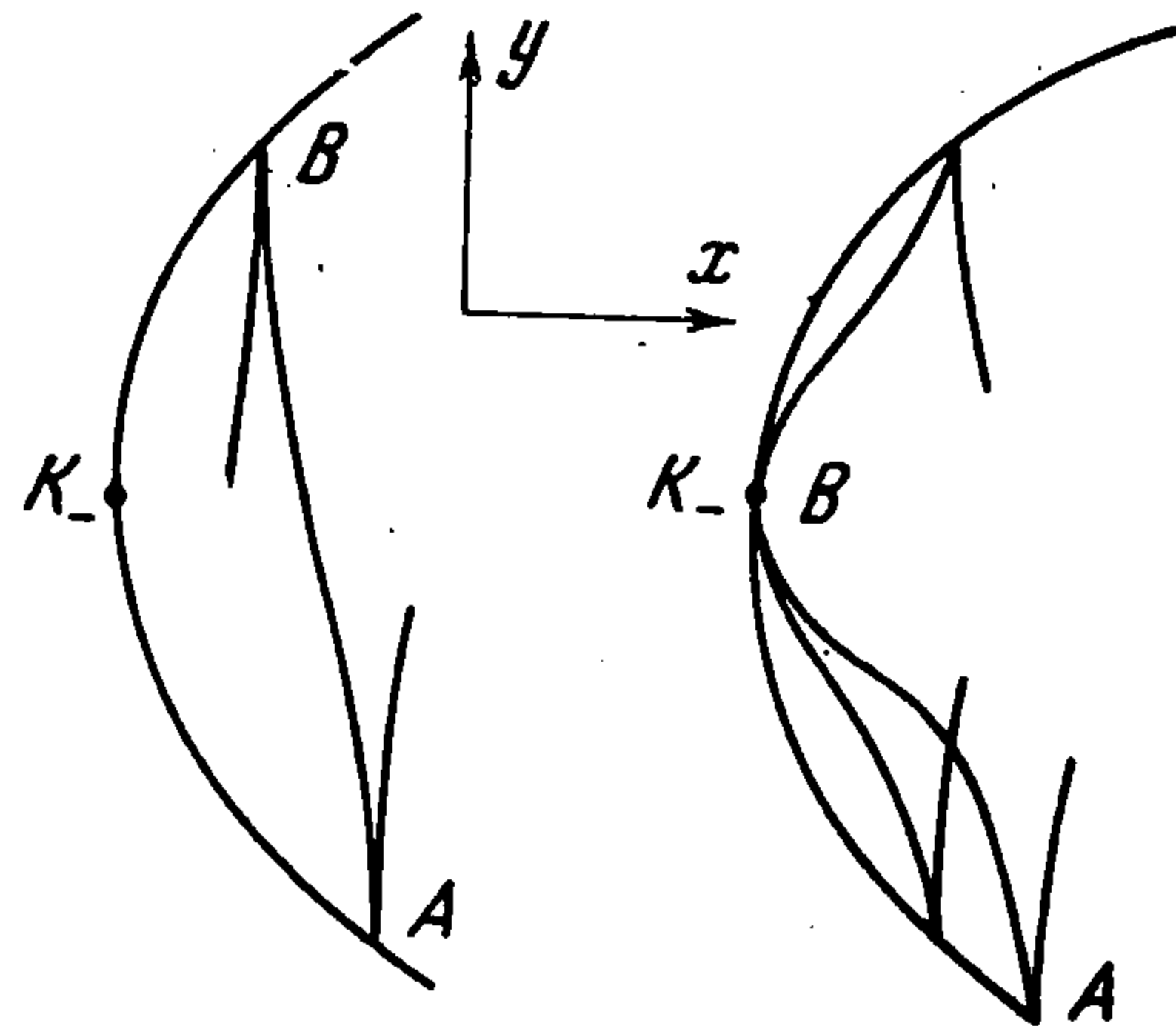
$$J = y \frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial u}{\partial s_2} = -\frac{1}{uy} \frac{\partial w}{\partial s_1} \frac{\partial w}{\partial s_2}, \quad j = uy \frac{\partial x}{\partial \sigma_1} \frac{\partial x}{\partial \sigma_2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial \sigma_1} \frac{\partial y}{\partial \sigma_2} \quad (6)$$

3°. При помощи второй формулы (6) легко доказывается, аналогично случаю плоского потенциального течения [3], что образ вершины выпуклого угла в плоскости  $uw$  — характеристика.

При обтекании выпуклой угловой точки вектор скорости меняется непрерывно, поэтому ее образ будет непрерывной кривой. Скорость в такой точке многозначна, следовательно, в ней  $j = 0$ , т. е. равна нулю хотя бы одна из производных  $\partial y / \partial \sigma_1$ ,  $\partial y / \partial \sigma_2$ . Если образ угловой точки не характеристика, то решение задачи Коши с условиями  $y = \text{const}$ ,  $\partial y / \partial \sigma = 0$  даст  $y = \text{const}$  на всех характеристиках, выходящих из угловой точки, что невозможно.



Фиг. 1



Фиг. 2

4°. Линия, при переходе через которую в плоскости  $xu$  якобиан  $J$  меняет знак, называется линией ветвления; она является краем складки отображения в плоскость годографа. В связи с нелинейностью системы (4) линия ветвления в общем случае не будет характеристикой. Исключение возможно только когда вдоль характеристики распространяется разрыв первых производных составляющих скорости.

В достаточно малой окрестности линии ветвления характеристики в плоскости  $uw$  располагаются по одну сторону от края складки. Ввиду непрерывности касательной к характеристике в области непрерывности поля вектора скорости (5) получим, что в общем случае линия ветвления в плоскости  $uw$  состоит из отрезков, каждый из которых является огибающей характеристик одного семейства и геометрическим местом точек возврата характеристик другого семейства. На линии ветвления меняют знак производные от  $u$  и  $w$  по направлению характеристики того семейства, изображение которой имеет в плоскости  $uw$  точку возврата; кривизна этой характеристики в физической плоскости меняет знак.

5°. Из теоремы существования решения первого уравнения (5) следует, что в области непрерывного сверхзвукового течения  $y$  является монотонной функцией длины дуги характеристики. Преобразуем плоскость  $uw$  в плоскость  $tw$ , где  $t = (2/3)u^{3/2}$ . Уравнение характеристик в плоскости  $tw$  будет

$$(dw / dt)_{1,2} = \pm y \quad (7)$$

поэтому угол наклона характеристики в плоскости  $tw$  будет монотонной функцией длины дуги. Следовательно, в плоскости  $tw$  на каждом отрезке характеристики, не содержащем точек возврата, кривизна характеристики имеет постоянный знак; отрезки характеристики, граничащие в точке возврата, обращены выпуклостями друг к другу (фиг. 1).

6°. Рассмотрим характеристику, выходящую из произвольной точки  $O$  звуковой линии. Если при перемещении по ней от звуковой линии  $y$  убывает, то  $w > w_0$  на характеристике первого семейства и  $w < w_0$  на характеристике второго семейства.

Доказательство достаточно провести для характеристики первого семейства. Возьмем случай, когда на характеристике в плоскости  $tw$  имеются точки возврата, так как в противном случае доказательство тривиально. Разобьем характеристику

на отрезки точками возврата и пронумеруем их в направлении от звуковой линии. На первом отрезке будет  $w > w_0$ . Второй отрезок лежит не ниже касательной к первому отрезку в крайней правой его точке. Поэтому на втором отрезке будет также  $w > w_0$  и т. д.

7°. Будем называть точку  $K$  вертикальности звуковой линии точкой  $K_+$  ( $K_-$ ), если звуковая линия в этой точке обращена выпуклостью в сторону области сверхзвуковых (дозвуковых) скоростей.

Покажем, что внутри области течения не существует точек  $K_-$ . Предположим, что точка  $K_-$  существует. Возьмем на звуковой линии точку  $A$ , в которой  $y_A < y_{K_-}$ , и проведем из нее характеристику второго семейства  $AB$ . Если точка  $A$  достаточно близка к точке  $K_-$ , то эта характеристика снова подойдет к звуковой линии и пересечет ее либо в точке  $K_-$ , либо в некоторой точке  $B$ ,  $y_B > y_{K_-}$  (фиг. 2)<sup>1</sup>.

Из п. 6° следует, что  $w_A < w_B$ . С другой стороны, из закона монотонности  $w$  на звуковой линии п. 1° получим обратное неравенство  $w_B < w_A$ . Таким образом, предположение о существовании точки  $K_-$  привело к противоречию.

Как следствие получим отсюда, что на звуковой линии может существовать не более одной точки  $K_+$ .

8°. Установим величину угла наклона звуковой линии на теле.

Контур тела, уравнение которого  $y = (c_1x + c_2)^{1/2}$ , будем называть  $w$ -прямым. Если кривизна контура в некоторой точке больше (меньше) кривизны  $w$ -прямого контура, будем называть его  $w$ -выпуклым ( $w$ -вогнутым). Образ  $w$ -прямого контура в плоскости  $uw$  лежит на прямой  $w = \text{const}$ .

Из уравнений (1) следует, что в звуковой точке контура

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dx}$$

поэтому  $u_y < 0$  в звуковой точке  $w$ -выпуклого контура и  $u_y > 0$  в звуковой точке  $w$ -вогнутого контура.

Отсюда следует правило: При обтекании  $w$ -выпуклого ( $w$ -вогнутого) контура касательная к звуковой линии на контуре получается поворотом направления оси  $x$ , соответствующего увеличению скорости, на острый угол против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Заметим, что в рамках точных уравнений (3) имеет место другое свойство, асимптотически эквивалентное (при  $u, v \rightarrow 0$ ) и отличающееся тем, что слово « $w$ -выпуклый» и «оси  $x$ » должны быть заменены словами «выпуклый» и «вектора скорости».

9°. Установим величину угла наклона звуковой линии в звуковой точке ударной волны, возникающей в равномерном сверхзвуковом потоке перед телом.

Обозначим через  $\delta$  острый угол между касательной к ударной волне и осью  $y$ ,  $\delta > 0$ , если угол отсчитывается от касательной к ударной волне против часовой стрелки. Соотношения на ударной волне в трансзвуковой аппроксимации записываются в виде

$$u = 2\delta^2 - u_\infty, \quad w = 2\delta y (u_\infty - \delta^2)$$

Здесь  $u_\infty$  — скорость набегающего потока.

Присоединив к уравнениям (1) выражения для производных  $u, w$  по направлению ударной волны, упрощенные в трансзвуковом диапазоне скоростей

$$u_x \delta + u_y = \frac{du}{dy} = \frac{du}{d\delta} \frac{d\delta}{dy} = 4\delta \delta'$$

$$w_x \delta + w_y = \frac{dw}{dy} = \frac{\partial w}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dy} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\delta (u_\infty - \delta^2) + 2y (u_\infty - 3\delta^2) \delta'$$

<sup>1</sup> Точка  $K_-$  существует в вихревом течении. При этом возможны оба случая расположения характеристик [4], указанных на фиг. 2.

получим систему для определения производных  $u_x, u_y, w_x, w_y$  в случае, когда кривизна ударной волны ограничена (в случае бесконечной кривизны ударной волны особенность будет такая же, как и в плоском течении).

В звуковой точке ударной волны

$$u_y = \frac{2\delta}{y} (\delta - y\delta'), \quad u_x = \frac{2}{y} (3y\delta' - \delta)$$

поэтому для угла наклона  $\gamma$  звуковой линии к оси  $y$  получим

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{u_y}{u_x} = \delta \frac{y\delta' - \delta}{3y\delta' - \delta}, \quad \delta' = \frac{d\delta}{dy}$$

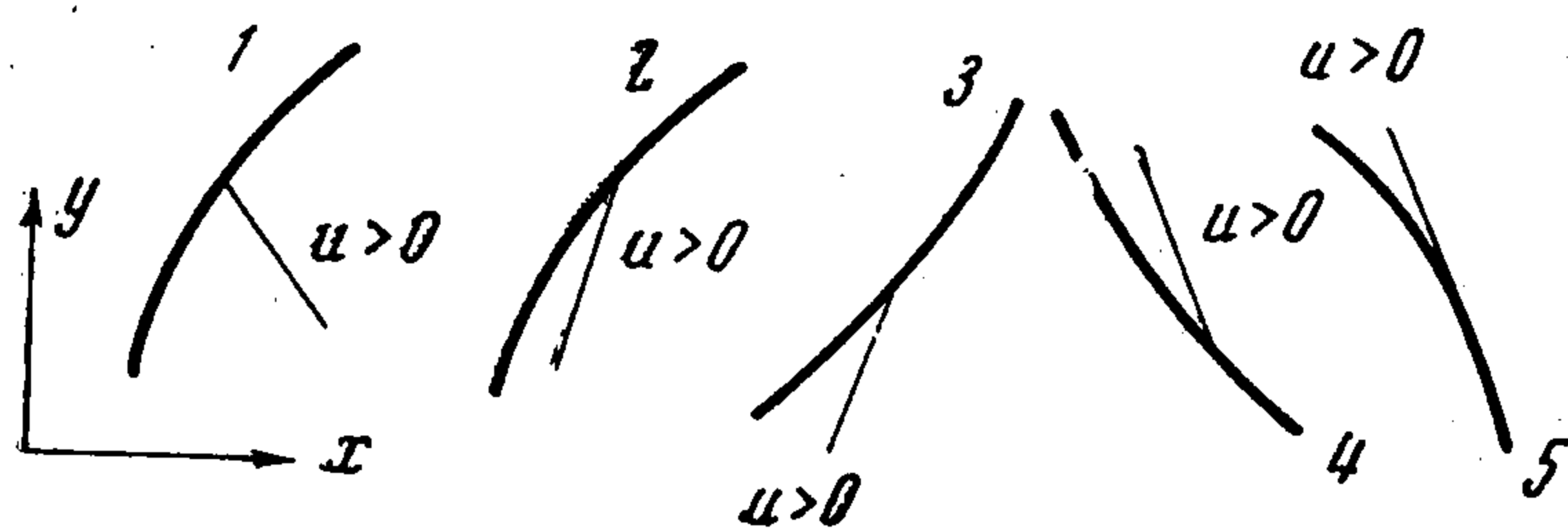
Анализируя знаки  $\gamma, u_x, u_y$  и  $\delta'$ , получим, что могут осуществиться только случаи, указанные в таблице.

В верхней строчке таблицы даны номера вариантов, во второй — области значений  $d = \delta / y\delta'$ , в остальных строчках — знаки величин  $\delta, \delta', u_x, u_y, \gamma$ . Варианты показаны на фиг. 3 под соответствующими номерами (толстая линия — ударная волна, тонкая — звуковая линия).

Результаты этого пункта асимптотически согласуются (при  $u, w \rightarrow 0$ ) с аналогичными свойствами, полученными в [5] для точных уравнений.

10°. Результаты пп. 7° — 9° позволяют установить классификацию минимальных областей влияния смешанного течения при обтекании тел разной формы с отошедшей ударной волной. Например, при обтекании  $w$ -выпуклого тела, расположенного на оси симметрии, могут осуществляться только два типа минимальной области влияния (фиг. 4): с точкой  $K_+$  (при  $1 < d < 3$ ) и без нее (при  $0 < d < 1$ ).

N	1	2	3	4	5
$d$	$1 < d < 3$	$0 < d < 1$	$d < 0$	$d > 3$	$d < 0$
$\delta$	+	+	+	-	-
$\delta'$	+	+	-	-	+
$u_x$	+	+	-	+	+
$u_y$	+	-	+	+	+
$\gamma$	-	+	+	-	-



Фиг. 3

11°. Свойства п. 6° позволяют обобщить на случай осесимметричного трансзвукового течения результат, установленный в [6] для плоского потока, о разрушении при определенной деформации тела непрерывного сверхзвукового течения в характеристическом треугольнике  $ABC$  (фиг. 4), примыкающем к минимальной области влияния.

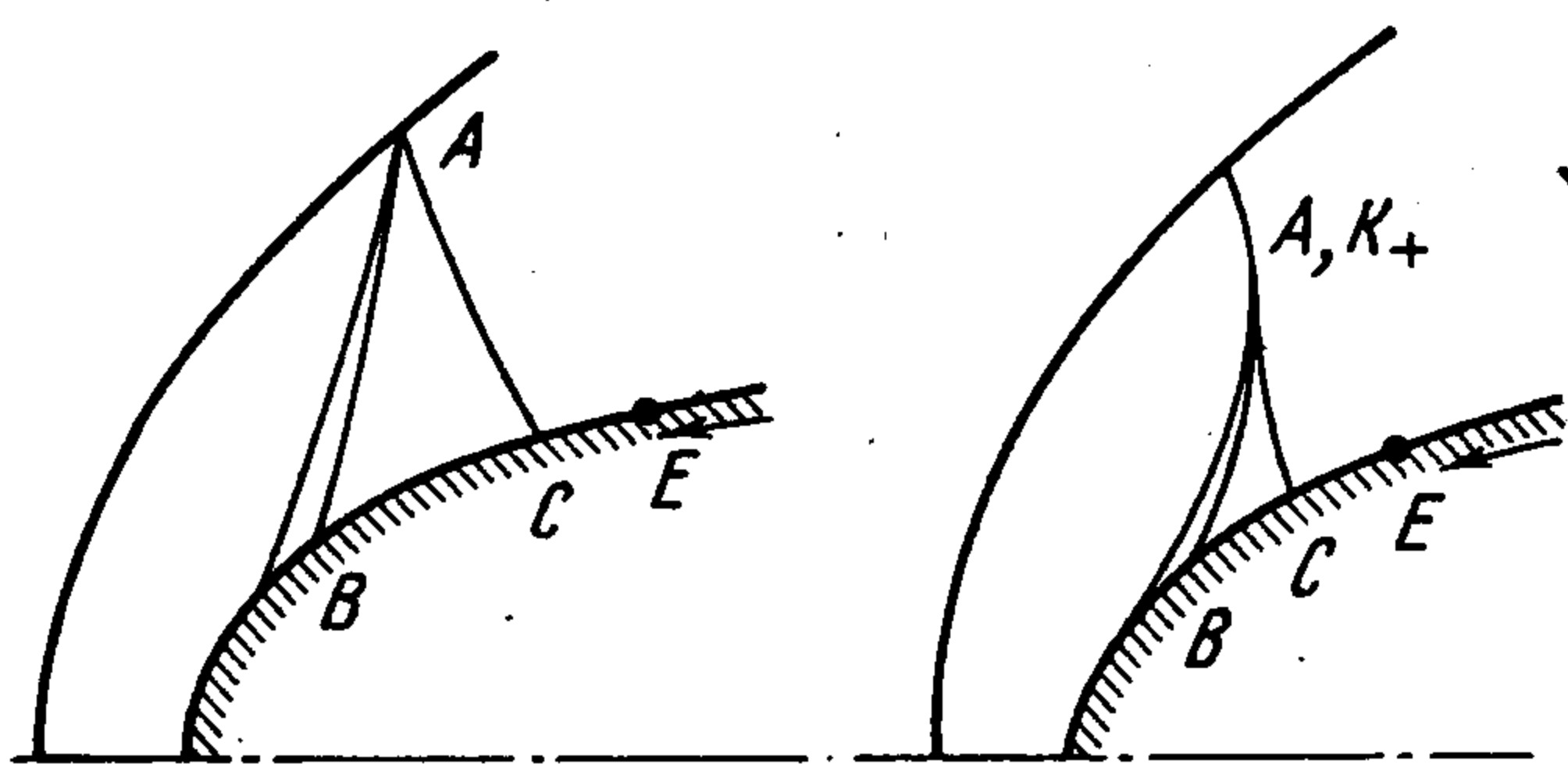
Предположим существование такого  $w$ -выпуклого тела, что при обтекании его сверхзвуковым потоком с отошедшей ударной волной существует непрерывное сверхзвуковое течение в треугольнике  $ABC$  (точка  $A$  — либо звуковая точка на ударной волне, либо точка  $K_+$  звуковой линии). Иначе говоря, предполагается существование «в целом» непрерывного решения «задачи 3» ([7], стр. 56) по заданному распределению скорости на характеристике  $AB$  и условию непротекания на стенке  $BC$ . В этом случае из п. 6° следуют оценки  $w_B > w_A > w_C$ . Поэтому на отрезке контура  $BC$  существует точка  $D$ , в которой  $w_D = w_A$ .

Подвергнем тело непрерывной деформации, заменяя его контур вниз по потоку от некоторой точки  $E$  касательной к контуру в этой точке и передвигая при этом точку  $E$  вверх по потоку вплоть до точки  $D$ . При положении точки  $E$ , совпадающем с точкой  $D$ , непрерывного сверхзвукового течения в треугольнике  $ABC$  уже не будет существовать из-за нарушения оценки  $w_D > w_C$ . Таким образом задача 3 в треугольнике  $ABC$  при достаточной близости точки  $E$  к точке  $D$  уже не будет иметь решения в целом. Это

означает, что возникнет либо местная зона дозвуковых скоростей, либо скачок уплотнения.

12°. Рассмотрим подобласть сверхзвуковых скоростей, содержащуюся в минимальной области влияния смешанного течения. Эта подобласть покрывается характеристиками обеих семейств, выпущенными из звуковой линии; следуя [2], будем называть ее зоной 1.

Зона 1 может быть двух типов: в зоне 1а при перемещении по характеристике в направлении от звуковой линии  $y$  убывает, в зоне 1б — возрастает.



Фиг. 4

Докажем, что отображение зоны 1а в плоскость  $tw$  является однолиственным.

При неоднолистном отображении (имеется в виду локальная однолиственность) возникает линия ветвления, которая в плоскости  $tw$  является огибающей характеристик одного семейства (п. 4°). Покажем, что характеристики, проведенные на образе зоны 1а, не пересекаются (а значит, и не имеют огибающей).

Рассмотрим в плоскости  $tw$  характеристику  $w_0 = w_0(t_0)$ , выпущенную из произвольной точки звуковой линии; пусть это будет характеристика первого семейства. Проведем через каждую ее точку прямые, касательные характеристикам второго семейства; ввиду гладкости характеристики  $w_0 = w_0(t_0)$  в достаточно малой ее окрестности эти прямые не имеют огибающей. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемый отрезок исходной характеристики не содержит точек возврата.

Зададим на каждой прямой поле направлений, параллельных касательной к характеристике  $w_0 = w_0(t_0)$  в точке пересечения с этой прямой. Для определения в окрестности исходной характеристики интегральных кривых  $W = W(t)$  этого поля получим систему

$$\frac{dW(t(t_0))}{dt} = \frac{dw_0(t_0)}{dt_0}, \quad W(t) - w_0(t_0) = -(t - t_0) \frac{dw_0(t_0)}{dt_0}$$

Продифференцируем второе уравнение по  $t_0$  и исключим  $dW/dt$

$$2 \frac{dw_0}{dt_0} \left( \frac{dt}{dt_0} - 1 \right) = - \frac{d^2w_0}{dt_0^2} (t - t_0)$$

Отсюда

$$|t - t_0| = C \left| \frac{dw_0}{dt_0} \right|^{-1/2} = \frac{C}{\sqrt{y}}$$

Если отрезок характеристики  $w_0 = w_0(t_0)$  примыкает к звуковой линии и не содержит точек возврата,  $y(t_0)$  является убывающей функцией и вспомогательная кривая, выпущенная из линии  $t = 0$ , не пересекается с характеристикой  $w_0 = w_0(t)$  при  $C \neq 0$ .

Предположим, что в зоне 1а существует линия ветвления — огибающая характеристик первого семейства.

Проведем отрезок характеристики  $w_0 = w_0(t_0)$  от линии  $t = 0$  до пересечения с линией ветвления в точке  $O$ . В окрестности точки  $O$  могут представиться два случая: в первом характеристика лежит под огибающей, во втором, наоборот, характеристика лежит сверху огибающей.

Рассмотрим сначала первый случай (фиг. 5).

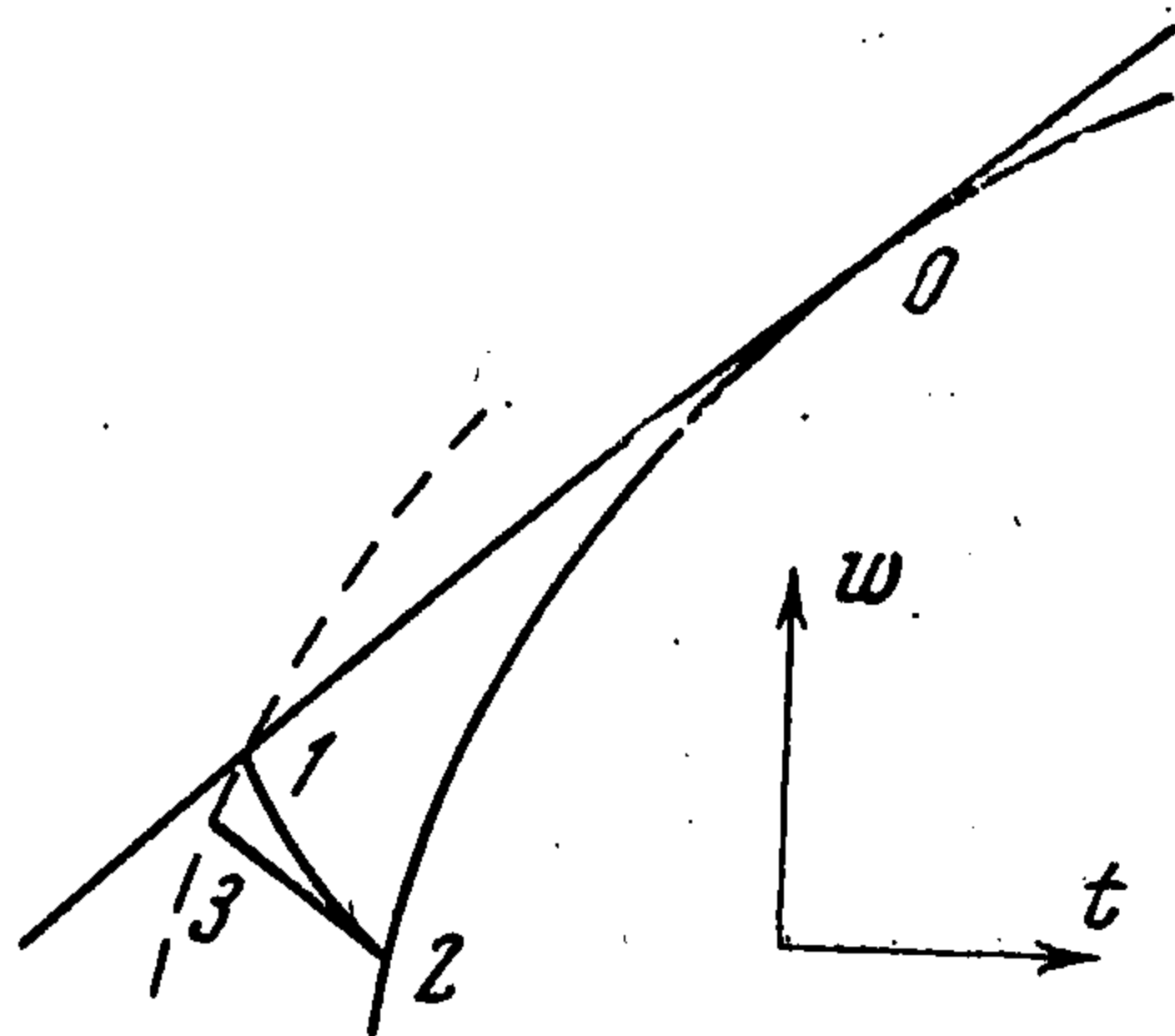
Проведем в полосе  $0 < t < t_0$  вспомогательную кривую  $W = W(t)$  сверху от характеристики  $w_0 = w_0(t_0)$ . Обозначим точку пересечения кривой  $W = W(t)$  с линией ветвления номером 1; эта точка существует, так как  $|t - t_0| > 0$ . Ввиду достаточной близости кривой  $W = W(t)$  к характеристике  $w_0 = w_0(t_0)$  можно считать,

что в окрестности точки 1 линия ветвления 1-0 расположена в секторе между лучами линии  $W(t)$  и прямой  $w = w_1$ , на которых  $t > t_1$ .

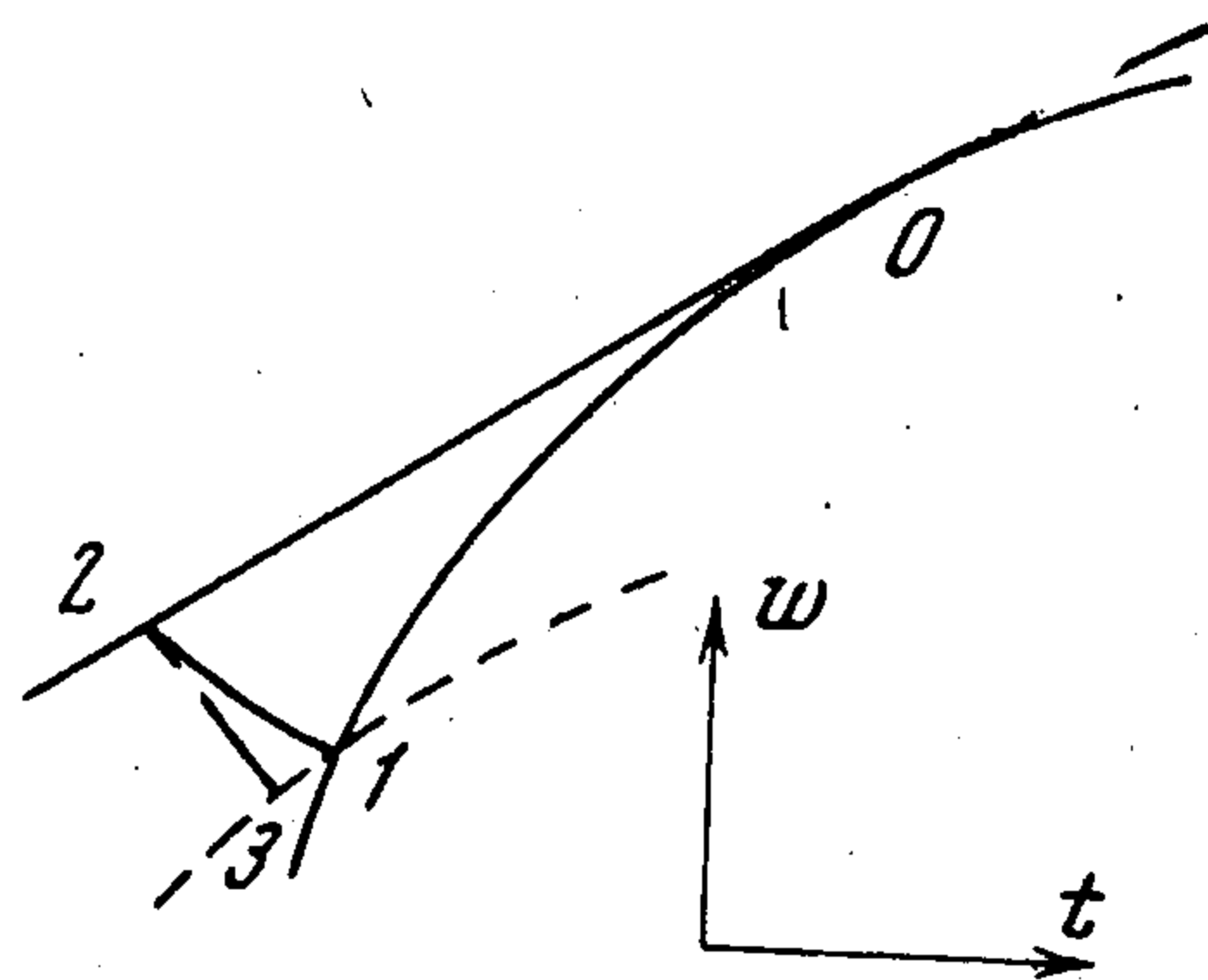
Если обозначить угол наклона характеристики первого семейства в точке 1 через  $(dw/dt)_1$ , то это значит, что

$$0 < \left(\frac{dw}{dt}\right)_1 \leq \left(\frac{dW}{dt}\right)_1 \quad (8)$$

Проведем из точки 1 отрезок характеристики 1-2 до пересечения с характеристикой  $w_0 = w_0(t_0)$  в точке 2. Ввиду достаточной близости точек 1 и 0 можно считать, что весь отрезок 1-2 лежит на том же листе римановой поверхности отображения в плоскость  $tw$ , что и отрезок характеристики  $w_0 = w_0(t_0)$ ; это означает, что отрезок



Фиг. 5



Фиг. 6

1-2 не содержит точек возврата и в каждой точке обращен выпуклостью в сторону области, лежащей в плоскости  $tw$  под характеристикой 1-2 (фиг. 5). Из точки 2 проведем касательную к характеристике 1-2 в точке 2 до пересечения со вспомогательной кривой  $W = W(t)$  в точке 3; при этом будет  $t_3 > t_1$ . Из построения треугольника 1-2-3 с учетом направлений выпуклости характеристик  $w_0 = w_0(t_0)$  и 1-2 следует неравенство, противоположное (8)

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_1 > \left(\frac{dw_0}{dt_0}\right)_2 = \left(\frac{dW}{dt}\right)_3 > \left(\frac{dW}{dt}\right)_1$$

Знак неравенства здесь не может быть заменен знаком равенства, так как  $y \neq \text{const}$  вдоль характеристики. Таким образом, случай, изображенный на фиг. 5, не может осуществиться.

Рассмотрим теперь второй случай (фиг. 6).

Проведем в полосе  $0 < t < t_0$  вспомогательную кривую снизу от характеристики  $w_0 = w_0(t_0)$ . Обозначим номером 1 точку пересечения кривой  $W = W(t)$  с линией ветвления; эта точка существует, так как  $|t - t_0| > 0$ . Аналогично предыдущему получим сначала, что

$$0 < \left(\frac{dw}{dt}\right)_1 \leq \left(\frac{dW}{dt}\right)_1 \quad (9)$$

Проведем так же, как и в предыдущем случае, отрезки 1-2 и 2-3 отрезок 1-2 обращен выпуклостью в сторону области под характеристикой 1-2;  $t_3 < t_1$ .

Обозначим через  $\varepsilon$  длину отрезка 2-3. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место оценки

$$\rho(1, 2) = O(\varepsilon), \quad \rho(1, 3) = O(\varepsilon^2)$$

Здесь  $\rho$  — длина соответствующего отрезка.

Из построения треугольника 1-2-3 получим

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_1 = \left(\frac{dw_0}{dt_0}\right)_2 - O(\varepsilon) = \left(\frac{dW}{dt}\right)_3 - O(\varepsilon) = \left(\frac{dW}{dt}\right)_1 - O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь  $O(\varepsilon)$ ,  $O(\varepsilon^2)$  — положительные величины порядка  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ . При достаточно малых значениях  $\varepsilon$  получим неравенство, противоположное (9)

$$(dw/dt)_1 < (dW/dt)_1$$

Таким образом, и второй случай образования огибающей характеристик в плоскости  $tw$  не может осуществиться.

13°. Полученное в п. 12° свойство позволяет легко обобщить на случай осесимметрического трансзвукового течения в зоне 1а теорему А. А. Никольского и Г. И. Таганова о разрушении плоского непрерывного сверхзвукового течения в зоне 1 при спрямлении участка контура произвольной длины, ограничивающего эту зону [2].

Роль спрямления при этом обобщении играет  $w$ -спрямление контура тела.

Действительно, в соответствии с п. 12° получим, что если образ контура тела, ограничивающего зону 1а, задан в виде кривой  $w = w(t)$ , то

$$|dw/dt| > y$$

Так как  $w$ -спрямление контура нарушает эту оценку (на нем  $dw/dt = 0$ ), то либо возникнет скачок уплотнения, либо расположение зоны 1а изменится так, что  $w$ -спрямленный участок уже не будет принадлежать ее границе.

В случае единственности решения в зоне 1а и его непрерывной зависимости от изменений граничных условий вторую возможность следует отбросить. При произвольно малой длине  $w$ -спрямленного участка контура длина возникающего скачка уплотнения должна быть величиной того же порядка малости.

В случае зоны 1б обобщение теоремы [2] можно получить для той подобласти, лежащей в достаточно малой окрестности звуковой точки контура, отображение которой в плоскости  $tw$  однолистно (до проведения  $w$ -спрямления участка контура в этой окрестности). Доказательство здесь проведем аналогично [8].

Проинтегрировав уравнения (7) вдоль характеристик, получим

$$w(t) = \int_0^t y(t, w(t)) dt + \lambda, \quad w(t) = - \int_0^t y(t, w(t)) dt + \mu$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные, равные значениям  $w$  в точках пересечения характеристик со звуковой линией. Продифференцировав эти уравнения по  $\lambda$  и  $\mu$ , получим

$$w_\lambda = 1 + y t_\lambda + \int_0^t y_w(t, w(t)) w_\lambda dt, \quad w_\lambda = -y t_\lambda$$

$$w_\mu = 1 - y t_\mu - \int_0^t y_w(t, w(t)) w_\mu dt, \quad w_\mu = y t_\mu$$

Отсюда

$$2w_\lambda = 1 + \int_0^t y_w w_\lambda dt, \quad 2w_\mu = 1 - \int_0^t y_w w_\mu dt \quad (10)$$

Покажем, что  $w$ -спрямление контура в достаточно малой окрестности звуковой точки не может привести только к нарушению однолиственности отображения зоны 1б в плоскость  $tw$ .

Действительно, если контур пересекает линия ветвления, то в этой точке меняет знак производная по направлению одной из характеристик; пусть это будет  $\partial w / \partial s_1$ . Производную  $\partial w / \partial s_1$  можно представить в виде

$$\frac{\partial w}{\partial s_1} = \frac{\partial w}{\partial \mu} h_1 = \frac{\partial w}{\partial \mu} \frac{\lambda_x \mu_y - \lambda_y \mu_x}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}}$$

При  $0 < t < \infty$  коэффициент Ламэ  $h_1$  не обращается в нуль, так как это может быть только либо в точках касания характеристик, либо в точках, в которых одновременно

$\mu_x = 0, \mu_y = 0$ . Последнее невозможно в изолированных точках, так как на характеристике нет кратных особых точек, а равенства  $\mu_x = \mu_y = 0$  на некоторой линии означают, что эта линия — характеристика и что она является линией ветвления. Как указывалось в п. 4°, это возможно только в случае, если по характеристике распространяется слабый разрыв первых производных составляющих скорости;  $w$ -спрямление всегда можно произвести так, чтобы кривизна контура осталась непрерывной.

Таким образом, получается, что в точке пересечения линии ветвления с контуром обращается в нуль производная  $w_\mu$ .

Из формул (10) следует, что в звуковой точке контура  $w_\mu = 1/2$ , поэтому на гладком контуре существует окрестность звуковой точки, в которой  $w_\mu \geq \delta > 0$ . При  $w$ -спрямлении участка контура в этой окрестности производная  $w_\mu$  изменится не менее чем на  $\delta$ , причем величина этого изменения (которое может произойти только за счет изменения величины интеграла в (10)) зависит не от длины  $w$ -спрямленного участка, а только от его положения в окрестности звуковой точки.

Таким образом, если  $w$ -спрямление контура в указанной окрестности не сопровождается образованием скачка уплотнения, то это значит, что будет нарушена либо единственность решения, либо непрерывная зависимость его от изменений граничных условий.

14°. Для изучения плоских потенциальных течений, близких к заданным, А. А. Никольским [9] был дан вывод «уравнений в вариациях» в переменных годографа невозмущенного течения. Эти уравнения неоднократно использовались впоследствии при исследовании фундаментальных проблем теории трансзвуковых течений методом АВС Фридрихса.

Выведем аналогичные уравнения для изучения осесимметричных трансзвуковых течений.

Взяв исходные уравнения в форме (1), введем функцию тока  $\psi$  и потенциал  $\varphi$  равенствами

$$\psi_x = w(k+1)^{-1}, \quad \psi_y = y \frac{u^2}{2} (k+1)^{-1} - y, \quad \varphi_x = 1 + u(k+1)^{-1}, \quad \varphi_y = w[y(k+1)]^{-1}$$

Варьируя эти уравнения в фиксированных точках плоскости  $xu$  и обозначая вариации штрихом, получим

$$(k+1)\varphi_x' = u', \quad y(k+1)\varphi_y' = w', \quad (k+1)\psi_x' = w', \quad (k+1)\psi_y' = yu'$$

Отсюда

$$yu\varphi_x' = \psi_y', \quad \psi_x' = y\varphi_y' \quad (11)$$

Возьмем в качестве независимых переменные годографа невозмущенного течения  $u, w$ . Подставляя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} u_x + \frac{\partial}{\partial w} w_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} u_y + \frac{\partial}{\partial w} w_y$$

в уравнения (11), получим

$$\psi_u' u_y + \psi_w' w_y = yu(\varphi_u' u_x + \varphi_w' w_x); \quad \psi_u' u_x + \psi_w' w_x = y(\varphi_u' u_y + \varphi_w' w_y)$$

Комбинируя эти уравнения с использованием (11), получим

$$\psi_w' = \varphi_u', \quad \psi_u' = y^2 u \varphi_w'$$

Исключая  $\varphi'$  или  $\psi'$  из этой системы, получим соответственно

$$\psi_{ww}' = \left( \frac{\psi_u'}{y^2 u} \right)_u, \quad \varphi_{uu}' = u(y^2 \varphi_w')_w$$

Интересно отметить, что эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений плоского трансзвукового течения только положительным коэффициентом  $y^2$ , определяемым из основного решения.

То обстоятельство, что  $y^2$  зависит и от  $u$  и от  $w$ , делает невозможным прямой перенос результатов, полученных в теории плоских течений.

При исследовании единственности решения задачи «в малом» контуры обтекаемых тел остаются неизменными. Поэтому соответствующие граничные условия будут записываться, как и в плоском случае, в виде  $\psi_i = C_i$  на каждой из кривых  $w_i = w_i(u)$ , изображающих контур тела в основном течении.

Поступила 27 I 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К. Г. Теория околзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит. 1960.
2. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике Л., Изд-во ЛГУ, 1965.
4. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. Белоцерковский О. М., Шифрин Э. Г. О наклоне звуковой линии на ударной волне в осесимметричном течении. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
6. Шифрин Э. Г. Об одном условии разрушения области непрерывного сверхзвукового течения при обтекании выпуклого профиля с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 4.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963.
8. Шифрин Э. Г. К прямой задаче плоского симметричного обтекания гладкого выпуклого профиля с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
9. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений. Сб. теор. работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.

### АПРОКСИМАЦИЯ ИГРОВЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

С. И. Тарлинский

(Свердловск)

Рассматривается три типичных игровых задачи в конфликтно-управляемых системах. Устанавливается, что в регулярном случае разрывные оптимальные способы управления можно аппроксимировать непрерывными стратегиями так, чтобы был достигнут эффект (с точки зрения преследователя или преследуемого) сколь угодно близкий к оптимальному.

§ 1. Рассмотрим движение  $x(t) = \{x_i(t)\}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), описываемое векторным дифференциальным уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v + f(t) \quad (1.1)$$

Здесь  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  — матрицы размерностей  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times s$  соответственно;  $f(t)$  —  $n$ -мерный вектор возмущений;  $u$  и  $v$  — векторы управлений размерностей  $r$  и  $s$ , стесненные в каждый момент времени условиями

$$u[t] \in U_t, \quad v[t] \in V_t \quad (1.2)$$

где  $U_t$  и  $V_t$  — выпуклые ограниченные замкнутые множества соответственно в  $r$ - и  $s$ -мерных пространствах  $E_r$  и  $E_s$ , изменяющиеся непрерывно с изменением  $t$ .

Рассматриваются следующие три задачи (см. [1-6]).