

ДВИЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО КОНТУРА ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

А. В. Белокопъ, Р. А. Грунтфест

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о движении параболического контура вида

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\delta = ghU^{-2} < 1) \quad (0.1)$$

по поверхности тяжелой идеальной жидкости конечной глубины; h — глубина жидкости, U — скорость движения, g — ускорение силы тяжести. Методами работ [1, 2] строится асимптотическое решение при больших и малых значениях λ отношения глубины h к l (l — полудлина зоны контакта контура с жидкостью) (фиг. 1). Приведен пример расчета динамических характеристик движущегося контура для конкретного значения $\delta = 0.5$.

§ 1. Рассматриваемая задача о движении малоизогнутого параболического контура по поверхности тяжелой идеальной жидкости конечной глубины при значении $\delta < 1$ методами операционного исчисления может быть сведена к определению давления в зоне контакта из интегрального уравнения вида [3]

$$\int_{-1}^1 p(u) K\left(\frac{x-u}{\lambda}\right) du = \pi f(x), \quad |x| \leq 1 \quad (1.1)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{\cos \xi t}{\xi \operatorname{cth} \xi - \delta} d\xi, \quad t = \frac{x-u}{\lambda} \quad (1.2)$$

В формулах (0.1), (1.1) и в дальнейшем предполагается совершенным переход к безразмерным величинам, введенным в работе [3].

В работах о глиссировании контура по поверхности тяжелой идеальной жидкости, подробная библиография которых содержится в монографии [4], положение точки B отрыва жидкости от контура считалось известным и совпадающим с задней кромкой контура, а положение точки A определялось из условия ограниченности скорости или давления в точке B . Исследование распределения давления под выпуклым контуром при фиксированной точке схода показывает, что возможны случаи, когда вблизи точки схода образуются отрицательные давления, что физически невозможно и приводит к смещению точки схода. Это смещение должно определяться условием положительности давления во всей зоне контакта, которое будет выполнено, если потребовать в точке схода ограниченности не только давления, но и производной от давления вдоль контура (фиг. 1). Отметим, что последнее условие ограниченности производной от давления необходимо выполнять только до тех пор, пока точка схода B не достигнет задней кромки контура.

§ 2. Следуя [1], представим ядро (1.2) при больших значениях λ в виде

$$K(t) = -\ln |t| + a_{30} + a_{20} |t| + a_{12} t^2 \ln |t| + a_{32} t^2 + a_{22} |t|^3 + O(t^4 \ln^2 |t|) \quad (2.1)$$

$$a_{20} = -0.5\pi\delta, \quad a_{12} = 0.5\delta^2, \quad a_{22} = \frac{\pi\delta^3}{12}, \quad a_{30} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi \operatorname{cth} \xi - \delta} - \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} \right) d\xi$$

$$a_{32} = -\frac{3}{4} \delta^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\xi + \delta + \delta^2 \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} - \frac{\xi^2}{\xi \operatorname{cth} \xi - \delta} \right) d\xi \quad (2.2)$$

Искомое давление в зоне контакта ищем в форме

$$p(x) = \omega(x) (1 - x^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{[0.5n]} \omega_{ij}(x) \lambda^{-i} \ln^j \lambda \quad (2.3)$$

Функции $\omega_{ij}(x)$ можно определить по формулам (1.13) работы [1], для функции $f(x)$, определяемой формулой (0.1), имеем

$$\begin{aligned}\omega_{00}(x) &= \pi^{-1}P + \beta x - \alpha(1-2x^2) \\ \omega_{10}(x) &= 4\pi^{-3}Pa_{20}S_1(x) + 2\pi^{-2}\beta a_{20}[2x - \Lambda(x)] - 2\pi^{-2}a_{20}\alpha S_4(x) \\ \omega_{20}(x) &= \pi^{-1}P\{(a_{32} + 0.8069a_{12})(1-2x^2) + \\ &\quad + 32\pi^{-4}a_{20}^2[S_2 - 0.1506]\} + \beta[(a_{32} + 0.5a_{12})x + a_{12}x(x^2 - \ln 2) - \\ &\quad - 16\pi^{-4}a_{20}^2S_7(x)] + \alpha\{0.3333(2x^4 + 1.25 - 4x^2)a_{12} + 1.333\pi^{-4}a_{20}^2[S_6(x) - 2S_4(x)]\} \\ \omega_{21}(x) &= \pi^{-1}Pa_{12}(1-2x^2) - a_{12}\beta x \\ \omega_{31}(x) &= -2\pi^{-3}Pa_{12}a_{20}S_4(x) + 2\pi^{-2}\beta a_{20}a_{12}[\Lambda(x) - 14/3] \\ \omega_{30}(x) &= \pi^{-3}P\{2.667a_{22} + 0.8889a_{12} \cdot a_{20}S_3(x) + [6a_{22}(1+2x^2) - \\ &\quad - 19.30\pi^{-4}a_{20}^3]S_1(x) + 64\pi^{-4}a_{20}^3S_5(x) + [9a_{22} + 2(a_{32} + 0.8069a_{12})a_{20}]S_4(x)\} + \\ &\quad + \pi^{-2}\beta\{a_{12}a_{20}S_8(x) + 2a_{32}a_{20}[-\Lambda(x) + 14/3x] - 16\pi^{-4}a_{20}^3S_9(x) + 2a_{22}S_{10}(x)\} - \\ &\quad - \alpha\pi^{-2}[a_{22}S_{11}(x) + a_{20}a_{12}S_{12}(x) - 2.667\pi^{-4}a_{20}^3S_{13}(x)]\end{aligned}\quad (2.4)$$

Здесь

$$\Lambda(x) = (1-x^2) \ln[(1-x)/(1+x)]$$

$$\begin{aligned}S_6(x) &= -1.333 - 2(x^2 - 2) + 0.5[\Lambda^2(x) - (1-x^2)^2\pi^2] \\ S_7(x) &= -2x(0.8125 - 0.1067x^2 - 0.060x^4) + (0.7067 - 0.1467x^2 - 0.060x^4)\Lambda(x) \\ S_8(x) &= -0.0250x - 4xS_1(x) + 2.667x^3 - (2.280 + 1.333x^2)\Lambda(x) \\ S_9(x) &= -9.309x + 1.860x^3 + 0.4354x^5 + (3.893 - 1.092x^2 - 0.2177x^4)\Lambda(x) \\ S_{10}(x) &= 2.667x + 2x^3 - 6xS_1(x) - (2+x^2)\Lambda(x) \\ S_{11}(x) &= 0.2667 + (x^2 - 2.5)S_4(x) - 3S_1(x) \\ S_{12}(x) &= 1.067 - 1.778x^2 - S_1(x) - 1.667S_4(x) + 0.6667x^2S_4(x) \\ S_{13}(x) &= 0.3723 + 0.01523x^2 + (0.8896 - 0.1657x^2 - 0.05714x^4)S_6(x) + \\ &\quad + (-3.146 + 1.156x^2 - 0.01905x^4)S_4(x)\end{aligned}$$

а функции $S_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, приведены в работе [1].

Постоянная P , входящая в формулы (2.4), имеет смысл подъемной силы контура и может быть определена из условия удовлетворения найденного решения исходному интегральному уравнению (1.1). Это приводит к следующей зависимости:

$$P\varphi_1(\lambda) + \alpha\varphi_2(\lambda) = \pi\gamma \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda) &= \ln 2\lambda(1 - a_{12}\lambda^{-2} + 0.1801a_{12}a_{20}\lambda^{-3}) + a_{30} + 0.8106a_{20}\lambda^{-1} + (a_{32} + a_{12} - \\ &\quad - 0.03287a_{20}^2)\lambda^{-2} + (1.442a_{22} - 0.2702a_{12}a_{20} - 0.1807a_{32}a_{20} - 0.02450a_{20}^3)\lambda^{-3} + \\ &\quad + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda) \\ \varphi_2(\lambda) &= -1.571 + 0.2829a_{20}\lambda^{-1} - 0.7854\lambda^{-2}a_{12} \ln \lambda + (0.6337a_{12} + 0.06051a_{20}^2 + \\ &\quad + 0.7854a_{32})\lambda^{-2} - 0.1698a_{12}a_{20}\lambda^{-3} \ln \lambda + (1.630a_{22} + 0.2071a_{20}a_{12} + 0.01358a_{20}^3 + \\ &\quad + 0.1698a_{20}a_{32})\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda)\end{aligned}$$

Требование ограниченности давления в точке B дает еще одну связь

$$\pi^{-1}P\varphi_3(\lambda) + \beta\varphi_4(\lambda) + \alpha\varphi_5(\lambda) = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(\lambda) &= 1 - 4\pi^{-2}a_{20}\lambda^{-1} + a_{12}\lambda^{-2} \ln \lambda + 1.333\pi^{-2}a_{12} \cdot a_{20}\lambda^{-3} \ln \lambda - (a_{32} + 0.8069a_{12} + \\ &\quad + 4.826\pi^{-4}a_{20}^2)\lambda^{-2} - (21.33a_{22} + 1.333a_{32}a_{20} + 0.1867a_{12}a_{20} + \\ &\quad + 9.370\pi^{-4}a_{20}^3)\pi^{-2}\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda) \\ \varphi_4(\lambda) &= 1 + 4\pi^{-2}a_{20}\lambda^{-1} - a_{12}\lambda^{-2} \ln \lambda + (a_{32} + 0.8069a_{12} + 20.67\pi^{-4}a_{20}^2)\lambda^{-2} - \\ &\quad - 9.333\pi^{-2}a_{20}a_{12}\lambda^{-3} \ln \lambda + (21.33a_{22} + 9.333a_{32}a_{20} - 6.642a_{12}a_{20} + \\ &\quad + 112.6\pi^{-4}a_{20}^3)\pi^{-2}\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda) \\ \varphi_5(\lambda) &= 1 + 1.333\pi^{-2}a_{20}\lambda^{-1} + (2.667\pi^{-4}a_{20}^2 - 0.25a_{12})\lambda^{-2} - \\ &\quad - (4.267a_{22} + 0.9557a_{20}a_{12} - 5.842\pi^{-4}a_{20}^3)\pi^{-2}\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda)\end{aligned}$$

Обратимся теперь к условию ограниченности производной от давления в точке B , о котором говорилось выше и которое должно выполняться наряду с условиями (2.5)

и (2.6). Следует отметить, что дифференцирование асимптотического ряда (2.3) является незаконной операцией, поэтому для нахождения производной приходится выводить новое интегральное уравнение. Известно, что решение интегрального уравнения (1.1) с ядром (1.2), ограниченное в концевой точке $x = 1$, имеет вид

$$p(x) = \Omega(x)\omega_1(x), \quad \omega_1 \in C[-1, 1], \quad \Omega(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$$

Отсюда вытекает, что функция

$$q(x) = p(x) - a\Omega(x), \quad a = \omega_1(-1) = -\beta\varphi_4(\lambda)$$

ограничена на отрезке $[-1, 1]$ и обращается на его концах в нуль. Запишем теперь интегральное уравнение (1.1) в виде

$$\int_{-1}^1 q(u) K\left(\frac{x-u}{\lambda}\right) du = \pi f(x) - a \int_{-1}^1 \Omega(u) K\left(\frac{x-u}{\lambda}\right) du$$

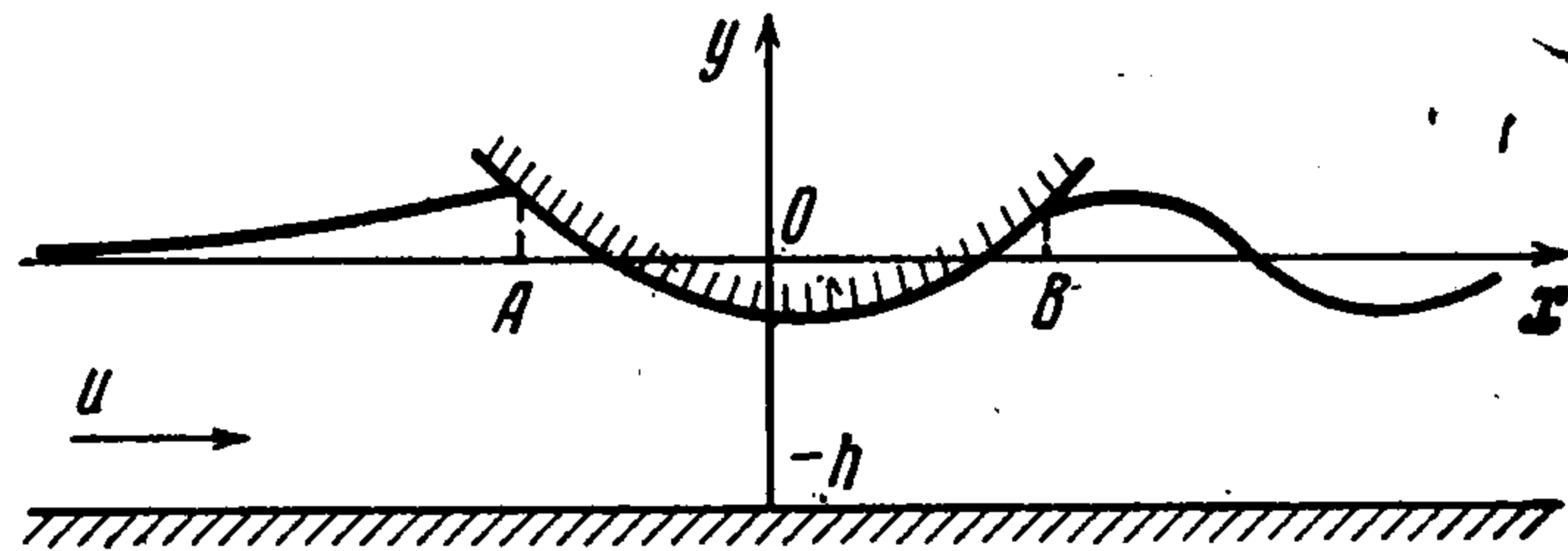
Выполняя дифференцирование по x и последующее интегрирование левой стороны по частям, получим

$$\int_{-1}^1 \frac{dq(u)}{du} K\left(\frac{x-u}{\lambda}\right) du = \pi f'(x) - a \int_{-1}^1 \Omega(u) K_x'\left(\frac{x-u}{\lambda}\right) du \quad (2.7)$$

Решение интегрального уравнения (2.7) при больших значениях λ строится аналогично решению интегрального уравнения (1.1). Опуская многочисленные выкладки, запишем сразу условие ограниченности производной от давления в точке B

$$4\alpha + \beta\varphi_6(\lambda) = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_6(\lambda) = & 1 + 8\pi^{-2}a_{20}\lambda^{-1} - 4a_{12}\lambda^{-2} \ln \lambda + \\ & + (4a_{32} + 5.228a_{12} + 51.38\pi^{-4}a_{20}^2)\lambda^{-2} - \\ & - 32a_{20}a_{12}\pi^{-2}\lambda^{-3} \ln \lambda - (128a_{22} - \\ & - 32a_{20}a_{32} - 31.15a_{20}a_{12} - \\ & - 156.2\pi^{-4}a_{20}^3)\pi^{-2}\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda) \end{aligned}$$



Фиг. 1

Отметим, что дифференцирование асимптотического ряда (2.3) приводит к другому результату.

Из выражений (2.6) — (2.8) нетрудно получить уравнение

$$\frac{P^*}{\pi\alpha^*\rho U^2 h^2} \varphi_3(\lambda) \varphi_6(\lambda) \lambda^2 + \varphi_5(\lambda) \varphi_6(\lambda) - 4\varphi_4(\lambda) = 0 \quad (2.9)$$

которое определяет параметр λ , а следовательно, и длину зоны контакта при заданных значениях P^* (размерный вес контура) и α^* (размерная кривизна). После того как найдено λ , параметры β и γ , определяющие положение контура относительно введенной системы координат (фиг. 1), находятся из выражений (2.6) и (2.5). Найдем еще момент сил давления относительно начала координат M и сопротивление W , испытываемое контуром при движении

$$M = \beta\varphi_7(\lambda), \quad W = \beta P + 2\alpha M \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_7(\lambda) = & 1.571 + 0.8488a_{20}\lambda^{-1} - 1.571a_{12}\lambda^{-2} \ln \lambda + (0.8748a_{12} + 1.571a_{32} + \\ & + 0.4017a_{20}^2)\lambda^{-2} - 1.698a_{20}a_{12}\lambda^{-3} \ln \lambda + (2.716a_{22} + 0.9170a_{12}a_{20} + 1.698a_{32}a_{20} + \\ & + 26.81\pi^{-4}a_{20}^3)\lambda^{-3} + O(\lambda^{-4} \ln^2 \lambda) \end{aligned}$$

§ 3. Следуя [2], асимптотическое решение интегрального уравнения (1.1) при малых λ берем в форме

$$p(x) = p_1\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + p_2\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - p_3(x) \quad (3.1)$$

или

$$p(x) = p_1\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) p_2\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) p_3^{-1}(x) \quad (3.2)$$

где $p_i(t)$, $i = 1, 2$, — решения интегральных уравнений Винера — Хопфа

$$\int_0^{\infty} p_i(u) K(t-u) du = \pi\lambda^{-1}(\alpha t^2 + \beta_i t + \gamma_i), \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.3)$$

$$\gamma_i = \alpha + (-1)^i \beta + \gamma, \quad \beta_i = -2\alpha - (-1)^i \beta \quad (i = 1, 2)$$

а $p_3(x)$ — вырожденное решение при $\lambda \rightarrow 0$.

При нахождении решений интегральных уравнений (3.2) использовалась для трансформанты Фурье ядра (1.2) аппроксимация вида

$$\frac{\sqrt{\xi^2 + B^2}}{\xi^2 + C^2}, \quad A = \frac{B}{C^2} = \frac{1}{1-\delta} \quad (3.4)$$

Это приводит к следующему результату:

$$p_i(t) = \frac{1}{A} \left[\operatorname{erf} \sqrt{Bt} + \left(\frac{A}{\pi t}\right)^{1/2} e^{-Bt} \right] \left(\frac{\gamma_i}{\lambda} - \beta_i \varepsilon_1 - \frac{\alpha\lambda}{B} \varepsilon_2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{A} \left[(t + \varepsilon_1) \operatorname{erf} \sqrt{Bt} + \left(\frac{t}{\pi B}\right)^{1/2} e^{-Bt} \right] (\beta_i - 2\alpha\lambda\varepsilon_1) +$$

$$+ \frac{2\alpha\lambda}{A} \left[\left(\frac{t^2}{2} + t\varepsilon_1 - \frac{1}{2B} \varepsilon_2\right) \operatorname{erf} \sqrt{Bt} + \left(\frac{t}{2} + \varepsilon_2\right) \left(\frac{t}{\pi B}\right)^{1/2} e^{-Bt} \right]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{C} - \frac{1}{2B}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{C} - \frac{3}{4B}, \quad I_3(x) = \frac{1}{A\lambda}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \quad (3.5)$$

Как и в работе [2], при определении момента сил давления относительно начала координат M и подъемной силы контура P будем исходить из решения в форме (3.2).
Имеем

$$M = \beta\psi_1(\lambda) \quad (3.6)$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{2}{A} \left[\frac{1}{3\lambda} + \varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_1^2 + \lambda^2 \left(\varepsilon_1 \frac{(B-C)^2}{B^2C^2} - \varepsilon_1^3 + \frac{(B-C)^2}{2B^3C^2} \right) \right] -$$

$$- \exp\left(-\frac{2B}{\lambda}\right) \left[1 + 2\lambda \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{B} \right) + \lambda^2 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{B} \right)^2 \right] \frac{(B-C)^2}{B^2}$$

$$P = \gamma\psi_2(\lambda) + \alpha\psi_3(\lambda), \quad \psi_2(\lambda) = \frac{1}{A} \left(\frac{2}{\lambda} + 2\varepsilon_1 \right) + \frac{(B-C)^2}{B^2} \exp\left(-\frac{2B}{\lambda}\right) \quad (3.7)$$

$$\psi_3(\lambda) = \frac{2}{A} \left[\frac{1}{3\lambda} + \varepsilon_1 - \frac{\lambda\varepsilon_2}{B} + \lambda^2\varepsilon_3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(B-C)^2}{4BC^2} - \frac{\lambda}{2B} \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2B} \right) - \lambda^2\varepsilon_3 \right) \exp\left(-\frac{2B}{\lambda}\right) \right], \quad \varepsilon_3 = \frac{3}{4B^2C} - \frac{5}{8B^3}$$

Условия ограниченности давления и его производной в точке B приводят к следующим соотношениям:

$$\gamma + \beta\psi_4(\lambda) + \alpha\psi_5(\lambda) = 0, \quad \psi_4(\lambda) = 1 + \lambda\varepsilon_1 \quad (3.8)$$

$$\psi_5(\lambda) = 1 + 2\lambda\varepsilon_1 - \lambda^2B^{-1}\varepsilon_2, \quad \beta + 2\alpha\psi_4(\lambda) = 0$$

Из (3.6) — (3.9) нетрудно получить уравнение для определения λ , соответствующее уравнению (2.9) в методе больших λ

$$\frac{P^*}{\rho U^2 h^2 \alpha^*} = \lambda^{-2} [2\psi_4^2(\lambda) \psi_2(\lambda) + \psi_3(\lambda) - \psi_5(\lambda) \psi_2(\lambda)] \quad (3.9)$$

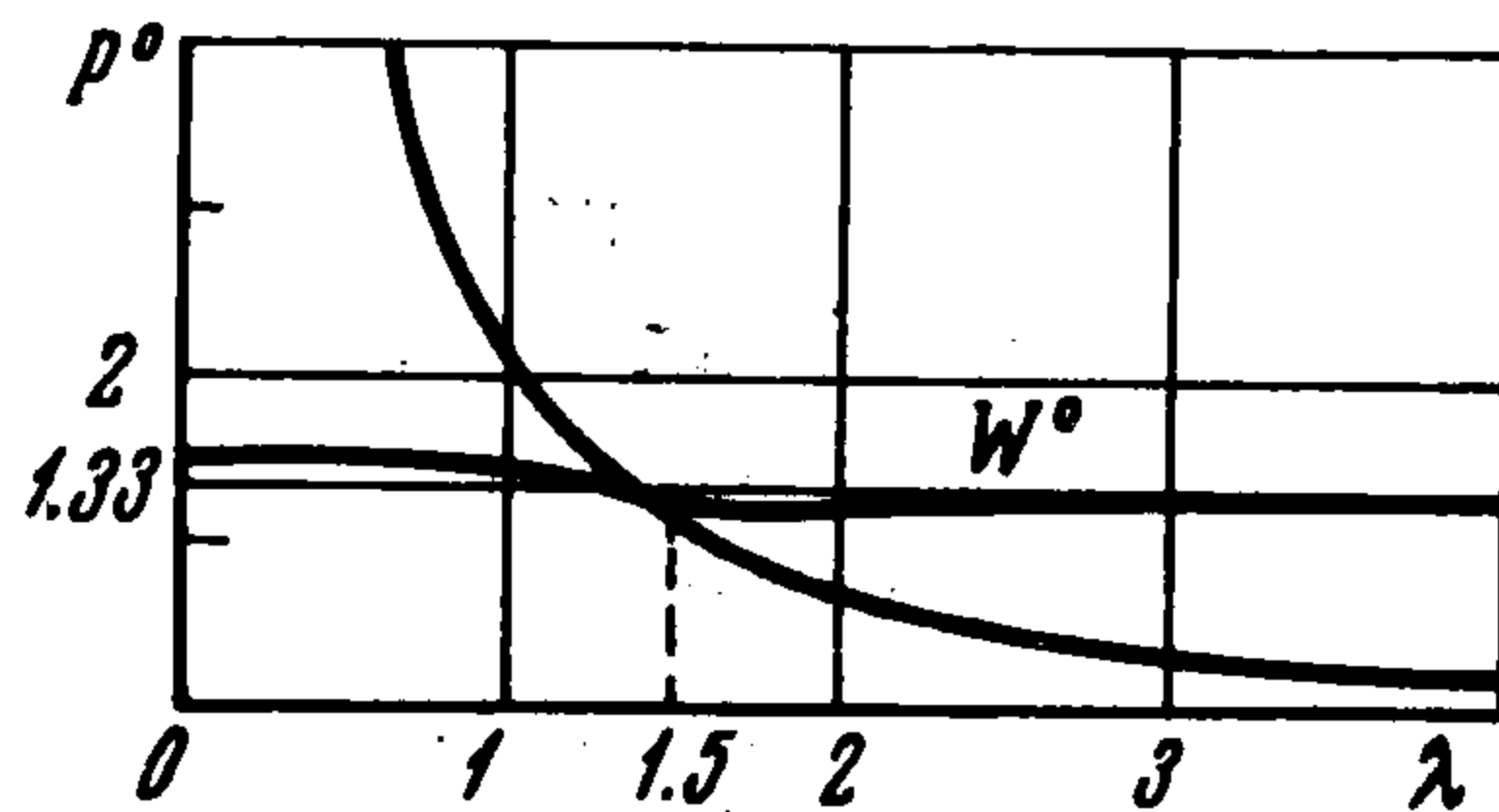
При известном λ параметры β и γ находятся из выражений (3.8) — (3.9), а для вычисления момента M и сопротивления W можно использовать формулы (3.6) и (3.2).

Как показывают численные расчеты, формулы § 2 и 3, дающие решение поставленной задачи соответственно при больших и малых λ , охватывают весь интервал изменения λ ($0 < \lambda < \infty$). Стыковка обоих методов происходит в окрестности точки $\lambda = 1.5$.

В качестве примера рассмотрим полученные формулы для случая $\delta = 0.5$. При этом имеем

$$\begin{aligned} a_{20} &= -0.25\pi, & a_{12} &= 0.125 \\ a_{32} &= 0.2629, & a_{22} &= -1/96\pi \\ B &= 2.725, & C &= 1.362, & A &= 2 \end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в таблице и на фиг. 2. Срачивание обоих методов происходит в окрестности точки $\lambda = 1.5$, причем относительное различие результатов при $\lambda = 1.5$ составляет 3% для коэффициента подъемной силы $P^\circ = P^*/\pi\rho U^2 h^2 \alpha^*$ и 1% для коэффициента сопротивления $W^\circ = W/\beta P$



Фиг. 2

λ	0	0.25	0.5	1.0	1.5	2	5	10	∞	
P°	∞	43.45	8.240	2.055	1.196	1.157	0.6854	0.1200	0.03012	0
W°	1.5	1.496	1.477	1.420	1.317	1.310	1.315	1.323	1.328	1.333

Поступила 2 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактнм задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, «Механика», 1965, № 2.
3. Белоконь В. М., Грунтфест Р. А. К задаче глссирования пластинки по поверхности тяжелой идеальной жидкости конечной глубины. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2. М., «Наука», 1966.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА

Э. Г. Шифрин

(Москва)

Вводится специальная плоскость годографа для изучения осесимметричных трансзвуковых течений. Исследование отображений в эту плоскость позволяет обобщить ряд известных свойств плоских трансзвуковых потоков.

Уравнения осесимметричных трансзвуковых течений имеют вид [1]

$$uu_x = v_y + v/y, \quad v_x = u_y \quad (u = (k+1)(\lambda-1) + \dots, \quad v = (k+1)\beta + \dots)$$

Здесь λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости к оси симметрии, x, y — декартова система координат в физической плоскости (ось x совпадает с осью симметрии, $y = |y|$). Обозначив $w = vy$, приведем эту систему к однородной (относительно первых производных) форме

$$yuu_x = w_y, \quad w_x = yu_y \quad (1)$$