

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГИДРОМЕХАНИКИ МАКРОТРЕЩИН В ТОНКОМ ПЛАСТЕ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. П. П и л а т о в с к и й

(Москва)

Сообщается о решении ряда задач гидромеханики макротрещин в тонком пласте при фильтрации однородной жидкости. Предложен метод решения задач с использованием тригонометрических разложений.

В работах [1,2] получена система функциональных уравнений фильтрационного потока в тонком макротрещиноватом пласте. Основная гипотеза [1,2] состоит в том, что в достаточно узких макротрещинах пласта фильтрационный поток ламинарен и подчиняется закону Дарси; из сохранения потока в окрестности элемента макротрещины найдено [1] граничное условие потенциала скоростей вне и внутри трещин. При этом в построении потенциала скоростей существенную роль играют комплексные интегралы с ядром типа Коши или Гильберта. Исследованы простейшие обратные задачи, причем если функция расхода  $\omega(s)$  задана, то, как показано [1,2], существуют трещины либо с затупленными, либо с заостренными окончаниями.

В работе [3] рассмотрена прямая задача в случае, когда профиль трещины с прямой осью задан аналитической функцией в виде выражения  $\delta(s) = \sqrt{1-s^2}/\rho(s)$  ( $-1 \leq s \leq 1$ ), причем рациональная функция  $\rho(s) > 0$ . Решение [3] задачи о возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной в тонком пласте оказывается расходящимся в случае заостренной трещины. Это говорит о недостаточности метода [3]. Ниже найдено общее решение прямой задачи, при этом показано, что оно применимо также в случае заостренных трещин. Попутно дано обобщение основного граничного условия [1,2]. Это обобщение позволяет исследовать гидромеханическое взаимодействие деформирующихся трещин с окрестным неустановившимся фильтрационным потоком однородной жидкости в тонком пласте.

### 1. Краевое условие фильтрационного потока на границах трещин.

**Система функциональных уравнений потока.** На фиг. 1, *b* схематично представлено поперечное сечение макротрещины  $\Gamma$  в тонком наклонном пласте [1]: вообще ось трещины кривая, ниже рассматриваем случай прямолинейной трещины  $\Gamma \equiv AB$ . Объем  $V$  элемента  $MM'M_*M'_*$  (фиг. 1, *a*) трещины  $AB$  состоит из объема  $V_0$  пустот, заполненных однородной пластовой жидкостью, и объема  $V_*$  упругих включений  $L$ , например газовых пузырей, образовавшихся при снижении давления и свободно перемещающихся в трещине в процессе фильтрации. Положение поперечного сечения  $MM'$  на оси трещины  $\Gamma$  определяем действительным параметром  $s$ . Объем  $V = V_0 + V_*$  изменяется по двум причинам:

1) происходит поперечная осадка, т. е. некоторое сужение (расширение) трещины;

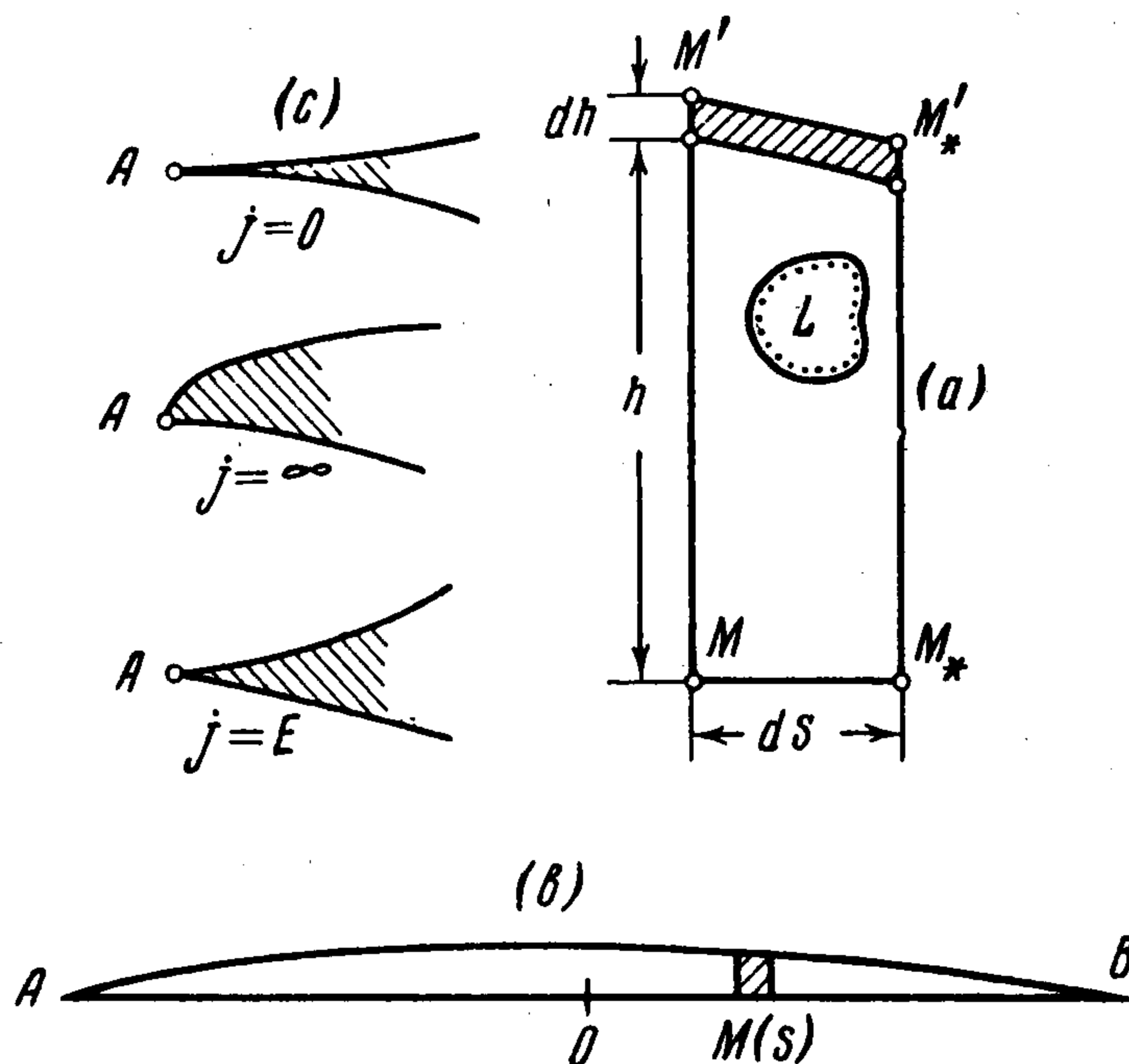
2) происходит сжатие (растяжение) упругих включений  $L$  в зависимости от изменения гидромеханического давления  $p = p(s, t)$ .

Поперечное сужение («осадка») трещины  $\Gamma$  в сечении  $M(s)$  определяем выражением

$$\Delta h = + \beta_0 h_0 \Delta p$$

$$(\Delta V = \Delta s \Delta h) \tag{1.1}$$

Здесь  $h_0 = h_0(s)$  — начальное раскрытие трещины,  $\beta_0$  — коэффициент объемной сжимаемости (коэффициент «упругой осадки» трещины в сечении  $M(s)$ ). Соотношение (1.1) является исходным в теории балки на упругом основании [4]. Достаточно узкую полость, которую представляет трещина  $\Gamma$  в тонком пласте  $E$ , моделируем упругой балкой, деформирующейся в поперечном направлении в зависимости от внешнего гидромеханического давления  $p = p(s, t)$  ( $t$  — параметр времени).



Фиг. 1

Изменение объема  $V_*$  упругих включений  $L$  в элементе  $MM'M_*M_*'$  определяем соотношением

$$\Delta V_* = - mV\beta_* \Delta p = - mh\beta_* \Delta s \Delta p \tag{1.2}$$

Здесь  $m$  — доля объема пустого элемента  $MM'M_*M_*'$ , содержащего упругие включения  $L$ ,  $\beta_*$  — коэффициент объемной сжимаемости упругих включений,  $h = h(s, t)$  — раскрытие трещины в сечении  $M(s)$ . Величина  $m$  аналогична величине пористости в обычном смысле этого понятия, но имеет более общее значение, поэтому правильнее  $m$  называть [5,6] пустотностью трещины в сечении  $M(s)$ .

Из зависимостей (1.1), (1.2) и выражения  $\Delta V_0 = \Delta V - \Delta V_*$  вытекает соотношение

$$\Delta V_0 = (\beta_0 h_0 + m\beta_* h) \Delta p \Delta s \tag{1.3}$$

Коэффициент объемной сжимаемости трещин  $\beta$  определяем выражением

$$\beta = \frac{\Delta V_0}{\Delta p V} = \beta_0 + m\beta_* \frac{h_0}{h} \quad (V = h\Delta s, h_0 = h(s, 0)) \tag{1.4}$$

Используя выражение (1.4), основную систему функциональных уравнений фильтрационного потока в тонком наклонном пласте [2] приводим к виду

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\delta}{|\zeta'|} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - |\zeta'| (h_0 \beta_0 + m\beta_* h) \frac{\mu}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial s}$$

$$\varphi = \text{Re } F(\zeta) + \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} \frac{\omega(\sigma, t) \zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma) - \zeta(s)} d\sigma \tag{1.5}$$

Здесь  $\zeta = \zeta(s)$  — комплексная функция действительного аргумента  $s$ , определяющего точку  $M(s)$  на оси трещины  $\Gamma$ ;  $F(\zeta)$  — комплексный потенциал внешнего потока в точке  $\zeta$ ;  $\omega(s, t)$  — функция расхода пластовой жидкости через сечение  $M$  (расход отнесен на единицу мощности пласта);  $\delta = (k_0/k)h$  — эффективное раскрытие трещины в точке  $M$ ;  $k_0, k$  — проницаемость соответственно заполнителя трещины и пористой среды;  $\mu$  — вязкость пластовой жидкости. Размерность каждой из величин в уравнениях (1.5) определяем, как принято в [1].

Для прямолинейной трещины имеем  $\zeta = z_0 s$  ( $z_0 = be^{i\beta}$ ,  $\beta = 0$  — полярный угол,  $-1 \leq s \leq 1$ ); в случае поступательного потока  $F(\zeta) = V\zeta$ ,  $V$  — скорость потока вдоль действительной оси.

Элемент  $MM'M_*M'_*$  трещины  $\Gamma$  представляет узкую щель между цилиндрическими стенками  $MM_*$  и  $M'M'_*$ , расстояние между которыми изменяется в тесных границах, поэтому с достаточной точностью продольная проницаемость такой щели в случае ламинарного течения вязкой жидкости имеет верхнюю границу, определяемую по формуле Буссинеска [5] для плоской щели

$$\max k_0 = 1/12 h^2 \quad (0 < k_0 \leq \max k_0) \quad (1.6)$$

Систему уравнений (1.5) приводим к безразмерному виду, соответствующее преобразование выполняем при помощи некоторых масштабов:  $T$  — время,  $p_0$  — давление,  $2b$  — осевая длина трещины,  $H$  — наибольшее раскрытие трещины или раскрытие трещины в срединном сечении. Кроме того, принимаем очевидные дополнительные соглашения

$$t = T\tau, \quad \varphi = -\frac{k}{\mu} p_0 P, \quad p = p_0 P, \quad \omega = -\frac{k}{\mu} p_0 \Omega, \quad h = Hf, \quad h_\infty = Hf_\infty \\ h_0 = Hf_0$$

$$P = P(s, \tau), \quad \Omega = \Omega(s, \tau), \quad P_\infty = P(s, \infty), \quad \Omega_\infty = \Omega(s, \infty) \quad (1.7)$$

$$f = f(s, \tau), \quad f_0 = f(s, 0), \quad f_\infty = f(s, \infty), \quad F = P - P_\infty, \quad G = \Omega - \Omega_\infty$$

$$\lambda = \frac{kT}{\mu b H \beta_0}, \quad \kappa = \frac{TH^2}{12 \mu \beta_0 b^2}, \quad \varepsilon = m \frac{\beta_*}{\beta_0}, \quad \nu = \frac{Vb\mu}{kp_0}, \quad \Theta = \beta_0 p_0, \quad \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{H^3}{12 kb}$$

$$f(\pm 1, \tau) = 0, \quad \Omega(\pm 1, \tau) = 0, \quad f(0, \tau) = 1$$

Последняя строчка в списке (1.7) равносильна записи граничных условий для функций  $h(s, \tau)$  и  $\omega(s, \tau)$ .

После преобразований уравнений (1.5) на основе соотношений (1.7) получаем систему функциональных уравнений

$$\kappa \frac{\partial}{\partial s} \left( f^3 \frac{\partial P}{\partial s} \right) - (\varepsilon f + f_0) \frac{\partial P}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial s} \\ P + \nu s = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega(\sigma, \tau)}{\sigma - s} d\sigma \quad (1.8)$$

В случае стационарной задачи —  $P(s, \infty) = P_\infty = \text{const}(\tau)$ , тогда из уравнений (1.8) получаем

$$\kappa f_\infty^3 \frac{\partial P_\infty}{\partial s} = \lambda \Omega_\infty$$

$$P_\infty + \nu s = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_\infty(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma \quad \text{при} \quad \begin{cases} \Omega(s, \infty) = \Omega_\infty \\ f(s, \infty) = f_\infty \end{cases} \quad (1.9)$$

В результате исключения функции  $P_\infty(s)$  из уравнений (1.9) с точностью до принятых здесь обозначений получаем интегродифференциальное уравнение, найденное в [1]

$$\frac{\lambda}{\kappa} \frac{\Omega_\infty(s)}{f_\infty^3(s)} + \nu = \frac{d}{ds} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_\infty(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma \quad (1.10)$$

В случае прямой задачи по заданному выражению  $\Omega_\infty(s)$  находим профиль трещины, определяемый функцией  $f_\infty(s)$ . В обратной задаче задаем функцию  $f_\infty(s)$  и ищем функцию расхода  $\Omega_\infty(s)$ . При некоторых дополнительных требованиях в смысле гладкости функций  $f_\infty(s)$  и  $\Omega_\infty(s)$  уравнение (1.10) сводится к уравнению Прандтля [7-10]. Найденное на этом пути решение [3] обратной задачи обладает рядом существенных недостатков; оно теряет смысл в случае заостренных окончаний трещин — это очевидно из расходимости некоторых несобственных интегралов, так, например, для смыкающихся заостренных) окончаний трещин выражение] вспомогательной функции  $\theta(s)$  [3] при  $|s| \rightarrow 1$  обращается в бесконечность.

**2. Метод тригонометрических разложений в решении [стационарной задачи о взаимодействии макротрещины тонкого [пласта с окрестным фильтрационным потоком. Нетрудно показать, что функциональное преобразование [1, 10]**

$$\int_0^1 \frac{\cos \pi n \sigma}{\cos \pi \sigma - \cos \pi s} d\sigma = \frac{\sin \pi n s}{\sin \pi s} \quad \left( \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots; \\ -1 < s < 1 \end{array} \right) \quad (2.1)$$

равносильно системе сопряженных преобразований

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{\cos n\chi}{\sin \chi - \sin \theta} d\chi = -\frac{\sin n\theta}{\cos \theta} \quad \left( \begin{array}{l} n = 0, 2, 4, \dots; \\ -1/2\pi < \theta < 1/2\pi \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{\sin n\chi}{\sin \chi - \sin \theta} d\chi = \frac{\cos n\theta}{\cos \theta} \quad \left( \begin{array}{l} n = 1, 3, 5, \dots; \\ -1/2\pi < \theta < 1/2\pi \end{array} \right) \quad (2.2)$$

Систему (1.9) [преобразовываем к] новым аргументам  $\theta$  и  $\chi$ , пользуясь подстановками

$$f_\infty = f_\infty(s) = f_*(\theta), \quad P_\infty = P_\infty(s) = P_*(\theta), \quad \Omega_\infty = \Omega_\infty(s) = \Omega_*(\theta)$$

$$\Omega_\infty(\sigma) = \Omega_*(\chi), \quad s = \sin \theta, \quad \sigma = \sin \chi$$

$$(-1/2\pi \leq \theta \leq 1/2\pi) \quad (-1/2\pi \leq \chi \leq 1/2\pi) \quad (2.3)$$

В результате преобразования уравнений (1.9) к новым аргументам  $\theta$  и  $\chi$  при помощи соотношений (2.3) получаем

$$\kappa f_*^3(\theta) \frac{\partial P_*(\theta)}{\partial \theta} = \lambda \Omega_*(\theta) \cos \theta \quad (-1/2\pi < \theta < 1/2\pi)$$

$$P_*(\theta) + \nu \sin \theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{\Omega_*(\chi) \cos \chi}{\sin \chi - \sin \theta} d\chi \quad (2.4)$$

Пусть четная функция  $\Omega_*(\theta)$  ( $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ ) достаточно гладкая (гладкость функции определяем порядком  $r$  существующей старшей непрерывной производной функции), представлена равномерно сходящимся тригонометрическим рядом по косинусам от нечетно кратных аргументов в виде

$$\Omega_*(\theta) = \sum_{(n)} c_n \cos n\theta \quad (n = 1, 3, 5, \dots; -\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi) \quad (2.5)$$

Очевидно, функция  $\Omega_*(\theta)$  удовлетворяет граничному условию  $\Omega_\infty(\pm 1) = \Omega_*(\pm \frac{1}{2}\pi) = 0$ . Подстановка разложения  $\Omega_*(\theta)$  (2.5) под знак интеграла (2.4) позволяет вычислить последний почленным интегрированием образовавшегося ряда. После элементарных тригонометрических преобразований с использованием формул (2.2) получаем выражение функции давления  $P_*(\theta)$

$$P_*(\theta) = -v \sin \theta - \frac{1}{2} \sum_{(n)} c_n \sin n\theta \quad \left( \begin{array}{l} n = 1, 3, 5; \dots \\ -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi \end{array} \right) \quad (2.6)$$

Подстановка функции  $P_*(\theta)$  в первое равенство (2.4) приводит к зависимости

$$\frac{\kappa}{\lambda} f_*^3(\theta) = -\cos \theta \sum_{(n)} c_n \cos n\theta \left( v \cos \theta + \frac{1}{2} \sum_{(n)} n c_n \cos n\theta \right)^{-1} \quad \left( \begin{array}{l} n = 1, 3, \dots, 5; \\ -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi \end{array} \right) \quad (2.7)$$

Система соотношений (2.5) — (2.7), взятых вместе с выражением  $s = \sin \theta$  (2.3), представляет искомое решение задачи в параметрической форме; при этом необходимо иметь в виду, что функциональные свойства функций  $P_*(\theta)$  (2.5),  $f_*(\theta)$  (2.7) зависят от аналогичных свойств исходной функции  $\Omega_*(\theta)$  (2.5).

С учетом отмеченного обстоятельства и в зависимости от того, какая функция из  $\Omega_*(\theta)$ ,  $P_*(\theta)$  и  $f_*(\theta)$  задана, коэффициенты  $c_n$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) определяем из соответствующего разложения (2.5), (2.6) и (2.7) известными методами, например для приближенного решения задачи по дискретным значениям аргумента  $\theta$  на отрезке  $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ .

Отмечаем элементарный случай, аналогичный примеру, приводимому в [3]. Полагаем  $c_1 \neq 0$ ,  $c_3 = c_5 = \dots = 0$ , тогда из соотношений (2.5) — (2.7) получаем

$$\Omega_*(\theta) = c_1 \cos \theta, \quad P_*(\theta) = -(v + \frac{1}{2}c_1) \sin \theta, \quad \frac{\kappa}{\lambda} f_*^3(\theta) = -\frac{c_1}{v + \frac{1}{2}c_1} \cos \theta \quad (2.8)$$

в точке  $\theta = 0$ ,  $f_\infty(0) = f_*(0) = 1$ , это приводит к уравнению для  $c_1$ , из которого находим

$$c_1 = -\frac{v\kappa}{\lambda + \frac{1}{2}\kappa} \quad (2.9)$$

В соответствии со списком (2.3) получаем явное выражение функций

$$f_{\infty} = (1 - s^2)^{1/2}, \quad \Omega_{\infty}(s) = -\frac{\nu\kappa}{\lambda + 1/2\kappa} (1 - s^2)^{1/2}, \quad P_{\infty}(s) = -\frac{\lambda\nu}{\lambda + 1/2\kappa} s \quad (2.10)$$

$$(-1 \leq s \leq 1)$$

Пользуясь списком (1.7), находим решение задачи в размерных величинах

$$h_{\infty} = H (1 - s^2)^{1/2} \quad (2.11)$$

$$\omega_{\infty} = \frac{2VbH^3}{H^3 + 24kb} (1 - s^2)^{1/2}, \quad p_{\infty} = -\frac{24Vb^2\mu}{H^3 + 24kb} s$$

$$x = bs \quad (-1 \leq s \leq 1)$$

Здесь  $x$  представляет абсциссу точки  $M(s)$ . При  $x = \pm b$  имеем  $dh/dx = \mp \infty$ , поэтому профиль трещины  $\Gamma$  пересекается с осью  $AB$  под прямым углом, иначе говоря, в концевых точках  $A$  и  $B$  края трещины  $\Gamma = AB$  не сомкнуты, т. е. концы трещины не представляют точек заострения.

Переходим к вопросу существования заостренных трещин.

**3. Условия существования заостренных трещин.** В окрестности каждого из концов  $A$  и  $B$  профиль трещины  $\Gamma$  определяем в параметрической форме через аргумент  $\alpha > 0$  из выражения (2.7), в котором подставляем  $\theta = \pm (1/2 \pi - \alpha)$ . Тогда получаем

$$s = \pm \cos \theta, \quad \frac{\kappa}{\lambda} f_*^3 = -\sin \alpha \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} c_n \sin n\alpha \times \left( \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1/2 \pi \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right) \quad (3.1)$$

$$\times \left[ \nu \sin \alpha + \frac{1}{2} \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} n c_n \sin n\alpha \right]^{-1}$$

Если для функции  $\Omega_*(\theta)$  (2.5) числовой ряд  $\sum_{(n)} n^r c_n$  сходится абсолютно при  $r = 7$ , то он также сходится абсолютно при  $1 \leq r \leq 6$ .

При дополнительном требовании

$$\nu + \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} n^2 c_n \neq 0 \quad (3.2)$$

из выражения (3.1) вытекает предельное равенство  $\lim f_* = f_*(\pm 1/2 \pi) = 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ; таким образом, граничное условие  $f_{\infty}(\pm 1) = 0$  (1.7) для функции  $f_{\infty}^{\text{III}}(s)$  выполняется.

В зависимости от степени ( $r$ ) гладкости функции  $f_*$  (3.1) отмечаем три основные формы профиля (симметричных) трещин (фиг. 1, с):

- 1) заостренная трещина, если  $j = dh/dx \rightarrow \mp 0$  при  $x \rightarrow \pm b$ ;
- 2) затупленная трещина, если  $j = dh/dx \rightarrow \pm \infty$  при  $x \rightarrow \pm b$ ;
- 3) угловая трещина, если  $j = dh/dx \rightarrow E$  ( $|E| < \infty$ ) при  $x \rightarrow \pm b$ .

Предлагаемая классификация применима и для асимметричных трещин, в этом случае каждый конец трещины должен рассматриваться самостоятельно для отнесения его к одному из перечисленных типов окончаний трещины.

Форма трещины  $AB$  зависит от поведения функции  $dh/dx$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , причем имеем

$$\frac{dh}{dx} = \pm \frac{H}{b} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{df_*}{d\alpha} \quad (3.3)$$

При условии (3.2) из равенства (3.1) следует разложение

$$f_*^3 = M \left[ \alpha \sum_{(n)} \gamma_n n c_n - \frac{\alpha^3}{3!} \sum_{(n)} \gamma_n n^3 c_n + \frac{\alpha^5}{5!} \sum_{(n)} \gamma_n n^5 c_n - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^7}{7!} \sum_{(n)} \gamma_n n^7 c_n \right] + O(\alpha^9), \quad M = \text{const}, \quad \gamma_n = (-1)^{1/2(n-1)} \quad (3.4)$$

Справедлива теорема: 1) если вместе с разложением (3.4) выполняются равенства

$$\sum_{(n)} \gamma_n n^r c_n = 0 \quad (r = 1, 3, 5) \quad (3.5)$$

то трещина  $\Gamma$  на концах  $A$  и  $B$  имеет точки заострения, в этом случае трещина  $\Gamma$  по своей форме относится к типу 1; 2) если вместе с разложением (3.4) не выполняется по меньшей мере одно из равенств системы (3.5), то трещина на концах  $A$  и  $B$  имеет точки затупления, т. е. профиль трещины в этих точках имеет прямой угол наклона к оси трещины — в этом случае трещина  $\Gamma$  по своей форме относится к типу 2.

Доказательство теоремы очевидно из рассмотрения порядка малости выражений (3.3) и (3.4) при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Левая часть равенства (3.1) получена в предположении, что эффективное раскрытие трещины  $\delta = (k_0/k) h$  определено по формуле

$$\delta (\max k_0/k) h = 1/12 (h^3/k)$$

При таком выражении проницаемости  $k_0$  исключено существование трещин типа 3, характеризуемых функцией расхода  $\Omega_*(\theta)$  в виде разложения (2.5), т. е. в этом случае не существует трещин с угловатым профилем на концах  $A$  и  $B$ .

Функция  $f_*$  (2.7) кроме условия  $f_*(\pm 1/2 \pi) = 0$  должна удовлетворять масштабному условию  $f_*(0) = 1$ , поэтому из соотношения (2.7) получаем зависимость

$$v + \sum_{(n)} \left( \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{1}{2} n \right) c_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.6)$$

Итак, для заостренных трещин имеем систему уравнений (3.5) и (3.6). Минимальное число ненулевых коэффициентов  $c_n$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ), при помощи которых можно построить профиль заостренной трещины, равно четырем — это  $c_1, c_3, c_5$  и  $c_7$ . Эти коэффициенты находим из уравнений (3.5) и (3.6) при  $c_9 = c_n = \dots = 0$

$$c_1 - 3^r c_3 + 5^r c_5 - 7^r c_7 = 0 \quad (r = 1, 3, 5) \\ v + \left( \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{1}{2} \right) c_1 + \left( \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{3}{2} \right) c_3 + \left( \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{5}{2} \right) c_5 + \left( \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{7}{2} \right) c_7 = 0 \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.7) имеет единственное решение

$$c_1 = 35\rho, \quad c_3 = 21\rho, \quad c_5 = 7\rho, \quad c_7 = \rho = -\kappa\nu(64\lambda + 70\kappa)^{-1} \quad (3.8)$$

В этом случае решение задачи заостренной трещины определяется в конечном виде из соотношений (2.5) — (2.7) и (3.8), причем на основе формулы 1.3.2.3.6 в справочнике [11] имеем выражение суммы

$$\sum_{(n)} c_n \cos n\theta = 64 c_7 \cos^7 \theta \quad (3.9)$$

**4. Комплексный потенциал внешнего фильтрационного потока.** Фильтрационный поток вне трещины  $\Gamma$  в тонком пласте описываем комплексным потенциалом  $w(z)$  [1,2] в виде

$$w(z) = Vz + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(s)b}{bs-z} ds = Vz - \frac{kp_0}{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{-i/2\pi}^{i/2\pi} \frac{\cos \theta \Omega_*(\theta)}{\sin \theta - z/b} d\theta \quad (4.1)$$

Здесь  $z$  — комплексная координата точки  $M(z)$  тонкого пласта  $E$ . В интеграле (4.1) переходим к комплексному аргументу  $\tau = e^{i\theta}$ , в результате получаем

$$w(z) = Vb\zeta - \frac{kp_0}{\mu} \frac{1}{8\pi i} \oint_{|\tau|=1} K(\tau, \zeta) \sum_{(n)} \gamma_n c_n (\tau^n - \tau^{-n}) d\tau \quad (4.2)$$

$$\zeta = z/b, \quad K(\tau, \zeta) = (\tau - \tau^{-1})(\tau^2 - 2\zeta\tau + 1)^{-1}, \quad \gamma_n = (-1)^{1/2(n-1)}$$

Контурный интеграл (4.2) вычисляем при помощи теории вычетов [1]

$$w(z) = Vb\zeta - \frac{kp_0}{2\mu} \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} c_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \quad (\zeta = z/b; n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.3)$$

Комплексную скорость  $w'(z) = u - iv$  в точке  $M(z)$  находим дифференцированием комплексного потенциала  $w(z)$  (4.3) по аргументу  $z = x + iy$

$$w'(z) = V + \frac{kp_0}{2\mu b \sqrt{\zeta^2 - 1}} \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} n c_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n \quad (4.4)$$

$$(\zeta = z/b; n = 1, 3, 5, \dots)$$

Покажем, что для трещин типа 1 (заостренная трещина) комплексная скорость на концах трещины, т. е. при  $z \rightarrow \pm b$  ( $\zeta \rightarrow \pm 1$ ), всегда представляет ограниченную величину.

В самом деле, для трещин типа 1 справедливо первое равенство в системе (3.5), поэтому вместо выражения (4.4) получаем равносильную запись

$$w'(z) = V + \frac{kp_0}{2\mu b} \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} c_n \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^n - \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (4.5)$$

$$(\zeta = z/b; n = 1, 3, 5, \dots)$$

Предельный переход в правой части равенства (4.4) при  $\zeta \rightarrow \pm 1$  совершаем с применением правила Лопиталья в каждом члене, стоящем под знаком суммы. В результате имеем конечное значение скорости фильтрации в точках  $z = \pm b$

$$w'(\pm b) = V - \frac{kp_0}{2\mu b} \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} n^2 c_n \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.6)$$

Скорость фильтрации на верхнем и нижнем краях трещины в срединном сечении  $O$  находим из выражения (4.4) при  $\zeta = \pm 0$

$$w'(\pm 0) = V - \frac{kp_0}{2\mu b} \sum_{(n)} n c_n \quad (4.7)$$

Выражения (4.6) и (4.7) принимают только действительные значения, находим продольную и поперечную составляющие скорости фильтрации внешнего потока в точках  $A$ ,  $B$  и  $O$  (фиг. 1)

$$u_A = u_B = V - \frac{kp_0}{2\mu b} \sum_{(n)} (-1)^{1/2(n-1)} n^2 c_n, \quad v_A = v_B = 0$$

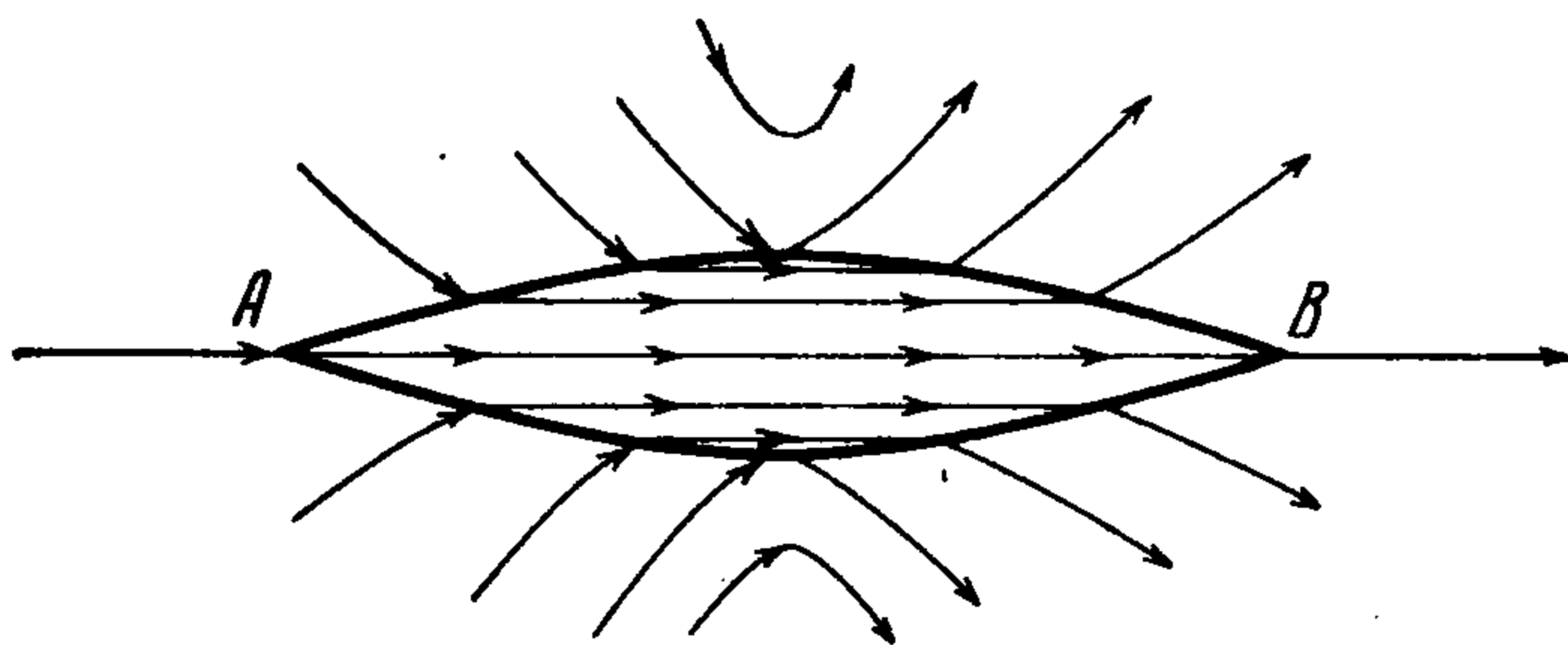
$$u_O^+ = u_O^- = V - \frac{kp_0}{2\mu b} \sum_{(n)} n c_n, \quad v_O^+ = v_O^- = 0 \quad (4.8)$$

Пример из пункта 3 на основе соотношений (3.8) и (4.8) дает

$$u_A = u_B = \frac{32\lambda + 28\kappa}{32\lambda + 35\kappa} V, \quad v_A = v_B = 0$$

$$u_O^+ = u_O^- = \frac{32\lambda + 70\kappa}{32\lambda + 35\kappa} V, \quad v_O^+ = v_O^- = 0 \quad (4.9)$$

Попутно отмечаем, что выражение (4.6) имеет смысл также и для трещин типа 2 лишь при выполнении первого равенства из системы (3.5); в остальных случаях затупленные трещины в окрестности каждого из своих концов характеризуются тем, что скорость внешнего фильтрационного потока неограниченно возрастает. Примерная картина линий тока в окрестности трещины каждого типа представлена на фиг. 2.



Фиг. 2

## 5. Приближенная теория деформации трещины в случае неу-

становившегося продольного фильтрационного потока. Предварительное решение задачи в случае стационарного течения, когда  $\tau \rightarrow \infty$ , предполагаем известным в виде заданных соотношений (2.5) — (2.7), полученных из системы (1.9). На основе списка (1.7) зависимость [(1.1) приводим к виду

$$f(s, \tau) = f_0 [1 + \Theta(F - F_0)], \quad F = P(s, \tau) - P(s, \infty)$$

$$|F_0 = P(s, 0) - P(s, \infty), \quad f_0 = f(s, 0) \quad (5.1)$$

Отсюда при  $\tau \rightarrow \infty$  имеем

$$f_\infty = f_0 (1 - \Theta F_0) \quad (5.2)$$

Зависимость (5.2) связывает конечный  $f_\infty$  и начальный  $f_0$  профили трещины  $AB$ . Исключаем  $f_0$  из системы уравнения (5.1) и (5.2)

$$\frac{f(s, \tau)}{f_\infty} = 1 + \frac{\Theta F}{1 - \Theta F_0} \quad (5.3)$$

Числовые расчеты показывают, что коэффициент деформации  $\Theta$  — величина достаточно малая, поэтому систему основных соотношений (1.8) приводим к функциональным уравнениям

$$\kappa \frac{\partial}{\partial s} \left( f_\infty^3 \frac{\partial F}{\partial s} \right) - (\varepsilon + 1) f_\infty \frac{\partial F}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial G}{\partial s}, \quad F = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(\sigma\tau)}{\sigma - s} d\sigma$$

$$(F = P - P_\infty, \quad G = \Omega - \Omega_\infty) \quad (5.4)$$

С точностью до членов вида  $O(\Theta)$  первое уравнение (5.4) аппроксимирует первое равенство в системе (1.8). Второе уравнение (5.4) получается путем исключения слагаемого  $\nu s$  из системы (1.8) и (1.9).

Уравнение (5.4) преобразуем к аргументам  $\theta$  и  $\chi$ , пользуясь подстановками

$$F = F(s, \tau) = F_*(\theta, \tau), \quad G = G(s, \tau) = G_*(\theta, \tau)$$

$$s = \sin \theta \quad (-1/2\pi < \theta < 1/2\pi), \quad \sigma = \sin \chi \quad (-1/2\pi < \chi < 1/2\pi)$$

$$F_{*0} = F_*(\theta, 0), \quad G_{*0} = G_*(\theta, 0)$$

$$f = f(\theta, \tau), \quad f_* = f(\theta, \infty), \quad f_0 = f(\theta, 0) \quad (5.5)$$

В результате преобразований зависимость (5.3) приводим к виду

$$\frac{f}{f_*} = 1 + \frac{\Theta F_*}{1 - \Theta F_{*0}} \quad (5.6)$$

Вместо уравнений (5.4) получаем

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{f_*^3}{\cos \theta} \frac{\partial F_*}{\partial \theta} \right) - (\varepsilon + 1) f_* \cos \theta \frac{\partial F_*}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial G_*}{\partial \theta}$$

$$F_* = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{G_*(\chi, \tau) \cos \chi}{\sin \chi - \sin \theta} d\chi \quad (5.7)$$

Здесь функция  $f_*(\theta)$  известна из выражения (2.7).

Решение функциональных уравнений (5.7) ищем в форме тригонометрических разложений по нечетным гармоникам, применяя метод пункта 4. Вместо разложения (2.5) берем

$$G_*(\theta, \tau) = \sum_{(n)} g_n(\tau) \cos n\theta \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (5.8)$$

При помощи преобразований (2.2) второе уравнение (5.7) дает выражение

$$F_*(\theta, \tau) = -\frac{1}{2} \sum_{(n)} g_n(\tau) \sin n\theta \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (5.9)$$

Подстановка функция  $G_*(\theta, \tau)$  (5.8) и  $F_*(\theta, \tau)$  (5.9) в первое функциональное уравнение (5.7) приводит задачу к некоторой бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений для  $g_n(\tau)$ . Можно поставить задачу о нахождении характеристических чисел этой системы.

С целью предварительного приближенного анализа уравнений (5.7) будем исходить из решения стационарной задачи (2.5) — (2.7), полученного в виде соотношений

$$\begin{aligned} \Omega_*(\theta) &= -\nu\Lambda(3\cos\theta + \cos 3\theta) = -4\nu\Lambda \cos^3\theta \left( -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi \right) \\ P_*(\theta) &= -\nu\sin\theta + \frac{1}{2}\nu\Lambda(3\sin\theta + \sin 3\theta) \left( \Lambda = \frac{\kappa}{3\kappa + 8\lambda} \right) \\ f_*^3 &= \frac{8\lambda}{3\kappa + 8\lambda} \cos^3\theta (1 - 3\Lambda \cos^3\theta \sec\theta)^{-1}, \quad s = \sin\theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для упрощения анализа принимаем, что величины  $\kappa, \lambda$  удовлетворяют неравенству

$$3\Lambda \ll 1 \quad (5.11)$$

Тогда из последнего равенства (5.10) находим приближенное выражение

$$f_* = l \cos\theta, \quad l = [8\lambda/(3\kappa + 8\lambda)]^{1/2} \quad (5.12)$$

В соответствии с этим, очевидно, имеем случай затупленной трещины  $AB$ .

В разложении  $G_*$  (5.8) и  $F_*$  (5.9) полагаем выражение

$$g_n(\tau) = e^{-r\tau} g_n, \quad g_n = \text{const}(\tau)$$

Первое уравнение в системе (5.7) после подстановки (5.8), (5.9), (5.12) приводит к функциональному ряду

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{8\lambda} l^3 \sum_{(n)} n g_n [2n \sin n\theta + (n-2) \sin(n-2)\theta + (n+2) \sin(n+2)\theta] + \\ + \frac{\varepsilon+1}{8\lambda} l r \sum_{(n)} g_n [2 \sin n\theta + \sin(n-2)\theta + \sin(n+2)\theta] = \\ = \sum_{(n)} n g_n \sin n\theta \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Соотношение (5.13) удовлетворяется при  $g_1, g_3 \neq 0$  и  $g_5 = g_7 = \dots = 0$ , в результате находим условия разрешимости уравнения (5.13):

$$r = \frac{15\kappa}{\varepsilon+1} l^2, \quad \frac{\kappa}{\lambda} l^3 = \frac{1}{2}, \quad g_1 = 3g_3 \quad (5.14)$$

Подстановка выражения  $l$  (5.12) во второе равенство (5.14) дает значение  $\lambda/\kappa = 1^3/8$ , поэтому имеем  $l^3 = 1^3/16$ . Условие (5.11) выполняется, поэтому приближенное решение задачи имеет смысл, и для функций  $G_*$  и  $F_*$  получаем выражения при  $A = 1/2 g_3$

$$\begin{aligned} G_* &= 2A e^{-r\tau} (3\cos\theta + \cos 3\theta), \quad G_{*0} = 2A (3\cos\theta + \cos 3\theta) \\ F_* &= -A e^{-r\tau} (3\sin\theta + \sin 3\theta), \quad F_{*0} = -A (3\sin\theta + \sin 3\theta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из выражений (5.6), (5.12) и (5.15) получаем искомое решение задачи в виде соотношений

$$\begin{aligned}
 P &= P_* + F_*, \quad \Omega = \Omega_* + G_*, \quad s = \sin \theta \quad (-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi) \\
 P_* &= -\nu \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{\kappa\nu}{3\kappa + 4\lambda} (3 \sin \theta + \sin 3\theta), \\
 \Omega_* &= -\frac{\kappa\nu}{3\kappa + 4\lambda} (3 \cos \theta + \cos 3\theta) \\
 f &= l \cos \theta \left[ 1 - \frac{A\theta (3 \sin \theta + \sin 3\theta)}{1 + A\theta (3 \sin \theta + \sin 3\theta)} e^{-r\tau} \right] \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Константу  $A$  определяем через полное изменение перепада давления  $\Delta P$  на всей длине трещины  $AB$  за время наступления установившегося состояния, т. е. при изменении  $\tau$  от  $\tau = 0$  до  $\tau = \infty$ . Текущее значение полного перепада давления между точками  $A$  и  $B$  (фиг. 3) выражаем в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta P &= \Delta P_\infty + 4Ae^{-r\tau} \\
 (4A &= \Delta P_0 - \Delta P_\infty) \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Из соотношений (5.16) получаем выражение

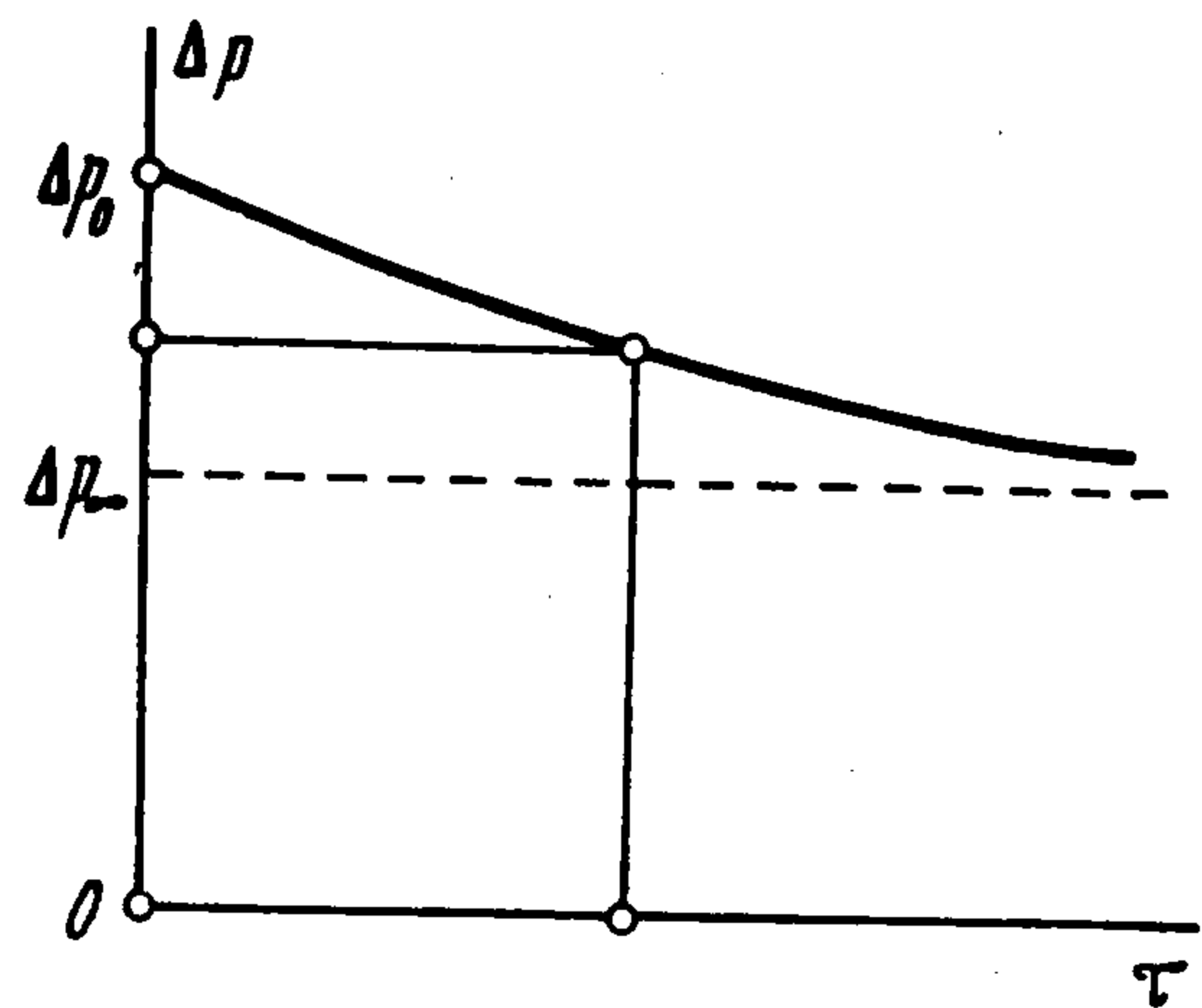
$$\begin{aligned}
 \omega(s) &= -\frac{k}{\mu} p_0 \Omega = \frac{k}{\mu} p_0 \left( \frac{\kappa\nu}{3\kappa + 4\lambda} - 2Ae^{-r\tau} \right) (3 \cos \theta + \cos 3\theta) \\
 s &= \sin \theta \quad (-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi) \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

Подстановка функции расхода  $\omega$  (5.19) в выражение  $w(z)$  (4.1) — (4.3) дает зависимость

$$\begin{aligned}
 w(z) &= Vb\zeta - \frac{kp_0}{2\mu} \left( \frac{\kappa\nu}{3\kappa + 4\lambda} - 2Ae^{-r\tau} \right) \left[ 3(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^3 \right] \quad (\zeta = z/b) \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

Комплексный потенциал  $w(z)$  (5.9) описывает внешнее поле скоростей; аргумент  $\tau$  в обозначении  $w(\dots)$  явно не указан. Очевидно, данное фильтрационное поле асимптотически стремится к установившемуся состоянию при  $\tau \rightarrow \infty$ .

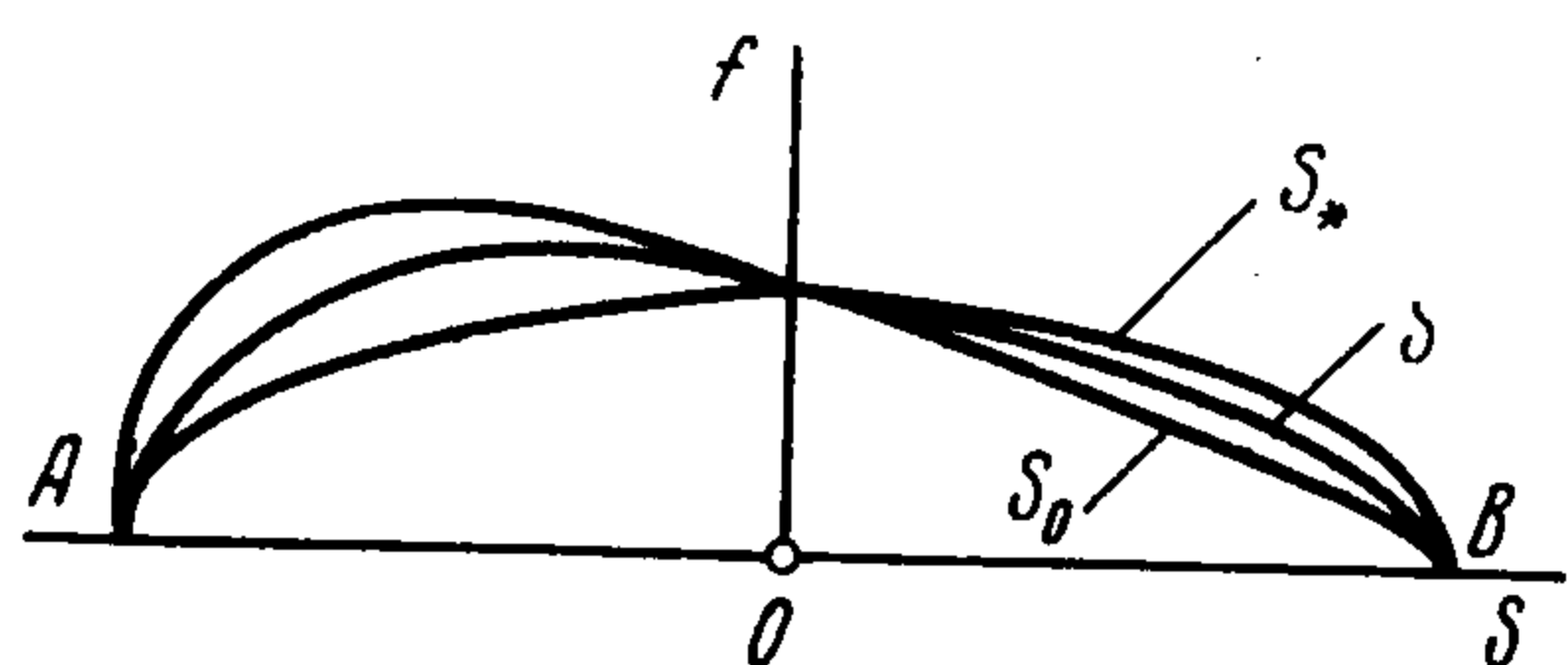
На фиг. 4 показан начальный ( $S_0$ ), текущий ( $S$ ) и конечный ( $S_*$ ) профиль трещины, а также изображены соответствующие эпюры ( $R_0, R, R_*$ ) давления вдоль трещины  $AB$ . На фиг. 5 очевидно, что начальная асимметрия трещины  $AB$  асимптотически аннулируется, а профиль трещины при  $\tau \rightarrow \infty$  становится симметричным (эллиптическим) относительно срединного сечения  $O$ , при этом кривая давления ( $R$ ) становится более пологой, поэтому левая половина трещины принимает меньшую нагрузку, чем правая половина трещины. Гидродинамическое давление жидкости в правой половине трещины с течением времени возрастает, поэтому профиль правой половины трещины  $OB$  с течением времени поднимается, а профиль левой по-



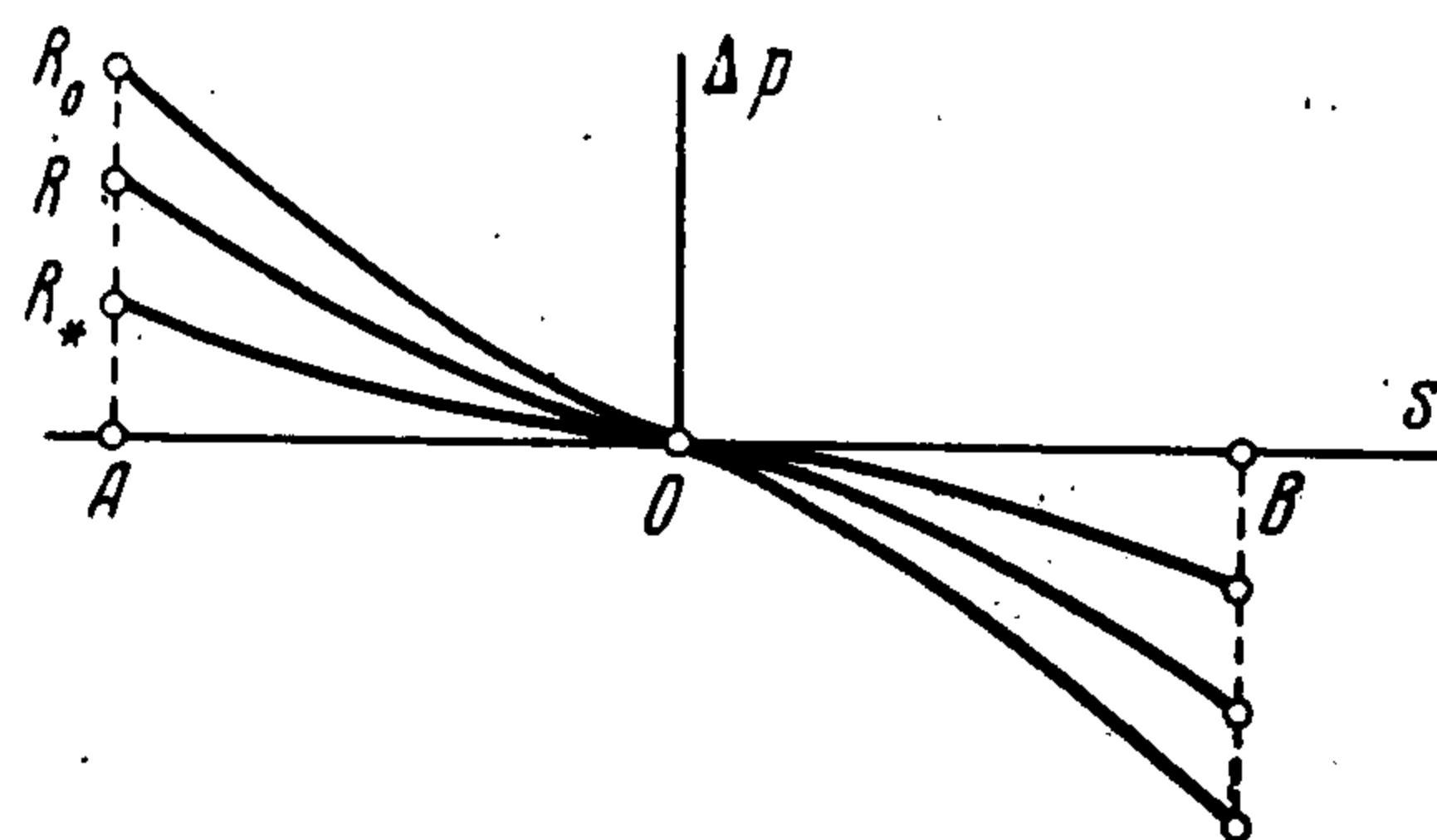
Фиг. 3

ловины трещины  $AO$  опускается относительно установившегося (эллиптического) профиля трещины. Таким образом, начальный (грушевидный) профиль трещины вырождается в конечный (эллиптический) профиль. Все это, очевидно, с качественной точки зрения правильно описывает процесс деформации профиля трещины при фильтрации пластовой жидкости вдоль трещины.

Подробный количественный анализ деформации трещины в зависимости от фильтрационных эффектов на основе предложенной здесь теории выходит за рамки данной статьи. Аналогичным путем может быть изучено



Фиг. 4



Фиг. 5

поведение трещин с заостренными окончаниями. С этой целью придется усложнить исходные выражения (5.10) и (5.12), в остальном изложенный здесь подход к решению задачи сохраняет свое значение.

Поступила 16 II 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П и л а т о в с к и й В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
2. П и л а т о в с к и й В. П. Уравнения фильтрации однородной жидкости в тонком макротрещиноватом пласте. Ежегодник «Теория и практика добычи нефти», М., «Недра», 1968.
3. А б д у р а х м а н о в И. М. О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
4. П е ш л ь Т. Сопротивление материалов. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. Л о м и з е Г. М. Фильтрация в трещиноватых породах. М.—Л., Энергоиздат, 1951.
6. П и л а т о в с к и й В. П. Об уравнениях фильтрации в трещиноватых горных породах. Научно-техн. сб. по добыче нефти, 1960, вып. 10.
7. М а г н а р а д з е Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета. Сообщ. АН ГрузССР, 1942, т. 3, № 6.
8. В е к у а И. Н. Об интеграло-дифференциальном уравнении Прандтля. ПММ, 1945, т. 9, вып. 2.
9. Ш е р м а н Д. И. К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 5.
10. Г о л у б е в В. В. Теория крыла аэроплана конечного размаха. Тр. ЦАГИ, 1931, вып. 108.
11. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, изд. 4. М., Физматгиз, 1963.