

**ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА УДЕЛЬНОГО
СОПРОТИВЛЕНИЯ РАБОЧЕГО ВЕЩЕСТВА
В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ
(СЛУЧАЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ)**

К. А. Лурье

(Ленинград)

Рассматривается задача максимизации тока во внешней цепи канала путем выбора тензора удельного сопротивления P рабочего вещества. Задача считается плоской; тензор P симметричен и определяется главными значениями $\rho_1(x, y)$, $\rho_2(x, y)$, соответствующими главным осям α , β и углом $\gamma(x, y)$ между главной осью α и осью x . Функции $\rho_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) подчинены неравенствам $0 < \rho_{\min} \leq \rho_i(x, y) \leq \infty$.

Среди необходимых условий максимума особую роль играют необходимые условия Вейерштрасса и Якоби, порождаемые соответственно сильными локальными и слабыми глобальными вариациями управляющих функций (тензора P). Для поставленной задачи условие Вейерштрасса изучено в работе [1], где показано, что в оптимальном режиме можно положить $\rho_1(x, y) = \infty$, $\rho_2(x, y) = \rho_{\min}$; угол $\gamma(x, y)$ при этом определяется из условий стационарности, вообще говоря, не единственным образом. Правило выбора решений дается необходимым условием Якоби, которое изучается в предлагаемой работе.

Статья состоит из трех пунктов и приложения. В п. 1 уравнения оптимального режима, полученные в [1], преобразуются к форме, удобной для исследования условия Якоби. Показано, что в оптимальном режиме случай произвольной нагрузки R сводится к случаю короткого замыкания путем уменьшения величины индукции внешнего поля $B(x)$ на некоторую постоянную.

В п. 2 содержится вывод необходимого условия Якоби.

В п. 3 рассмотрен случай короткого замыкания. На примере канала, ограниченного горизонтальными электродами и вертикальными изоляторами, иллюстрируется процесс смены экстремальных решений, происходящий вследствие нарушения условия Якоби. Для этого примера приводятся данные, характеризующие выигрыш в значении функционала, связанный с переходом от экстремального решения, не удовлетворяющего условию Якоби, к экстремальному решению, удовлетворяющему этому условию.

В заключение обсуждается вопрос о возможности удовлетворительного приближения к оптимальному значению тока при помощи горизонтальных изолирующих перегородок, вводимых в канал со средой с постоянным скалярным удельным сопротивлением ρ_{\min} .

Во всем последующем сохраняются обозначения работы [1]; отклонения от этих обозначений оговариваются.

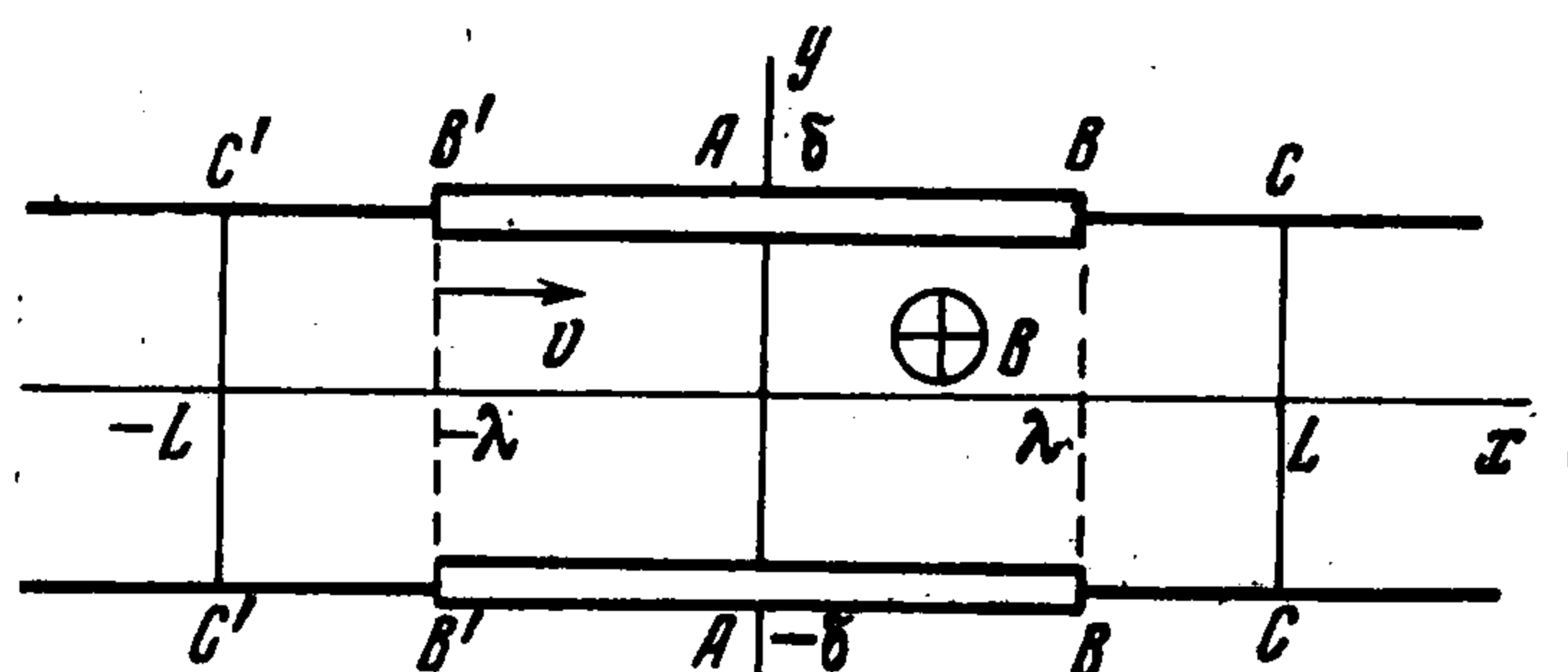
1. Постановка задачи. Рассматривается плоский канал шириной 2δ , стенки которого диэлектрические повсюду, за исключением двух участков одинаковой длины 2λ , расположенных на разных сторонах канала один против другого и изготовленных из идеально проводящего материала (фиг. 1). Проводящие участки соединены один с другим через нагрузку R .

В канале со скоростью $v (V(y), 0, 0)$ движется рабочее вещество, удельное сопротивление которого представляет симметричный тензор $P_0(x, y)$, меняющийся от точки к точке. Декартовы составляющие $\rho_{xx}, \rho_{xy}, \rho_{yy}$ тензора P_0 даются формулами

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= 1/2 [\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\gamma] \\ \rho_{yy} &= 1/2 [\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\gamma] \\ \rho_{xy} &= \rho_{yx} = 1/2 (\rho_1 - \rho_2) \sin 2\gamma \end{aligned}$$

При наложении магнитного поля $B(0, 0, -B(x))$, $B(x) = B(-x)$ в канале протекает электрический ток j (декартовы составляющие этого вектора обозначим j_x, j_y), а во внешней цепи ток I , равный

$$I = \int_{-\lambda}^{\lambda} j_y(x, \pm \delta) dx \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Уравнения, описывающие распределение тока в канале, имеют вид [1]

$$\text{div} j = 0, \quad P_0 \cdot j = -\text{grad } z^1 + \frac{1}{c} v \times B \quad (1.2)$$

Здесь z^1 означает потенциал электрического поля.

Если ввести функцию тока соотношением $j = -\text{rot } i_3 z^2$, то уравнения (1.2), (1.1) запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} z^1_x = \rho_{xx} z^2_y - \rho_{xy} z^2_x, \quad z^1_y = \rho_{yx} z^2_y - \rho_{yy} z^2_x + c^{-1} V B \\ I = z^2(\lambda, \pm \delta) - z^2(-\lambda, \pm \delta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сюда присоединяются граничные условия (фиг. 1)

$$\begin{aligned} z^1 = z^1_{\pm} = \text{const} \quad \text{на } BB', \quad z^2 = z^2_{\pm} = \text{const} \quad \text{на } B'C', C'C' \\ z^2 = z^2_{+} = \text{const} \quad \text{на } BC, CC, \quad z^1_{+} - z^1_{-} = R(z^2_{+} - z^2_{-}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если канал бесконечен в продольном направлении, то следует присоединить условие на бесконечности

$$z^2_x(\pm \infty, y) = z^2_y(\pm \infty, y) = 0 \quad (1.5)$$

В дальнейшем будем считать, что в продольном направлении канал ограничен изолирующими вертикальными стенками $|x| = L$, которые, однако, проницаемы для рабочего вещества, движущегося в продольном направлении (фиг. 1).

Для уравнений (1.3) — (1.5) ставится оптимальная задача, сформулированная во введении.

Как показано в [1], поставленная задача сводится к следующей: требуется определить функцию $\omega_1(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$2h'(\omega_1) \Delta \omega_1 + h''(\omega_1) (\text{grad } \omega_1)^2 = (c\rho_{\min})^{-1} V B_x(x) \quad (1.6)$$

и граничным условиям (фиг. 1)

$$\omega_{1y} = 0 \text{ на } BV', \quad \omega_1 = \omega_{1+} \text{ на } BC, CC, \quad \omega_1 = \omega_{1-} \text{ на } B'C', C'C' \quad (1.7)$$

при дополнительном требовании

$$\rho_{\min} \int_{-\delta}^{\delta} \omega_{1x}(0, y) dy = 1 - R(\omega_{1+} - \omega_{1-}) \quad (1.8)$$

определяющем неизвестную разность $\omega_{1+} - \omega_{1-}$ (здесь и далее символы ω_{1x} , ω_{1y} означают производные по x , y). Функция $h(\omega_1)$ неявно задается формулой

$$h'(\omega_1) = \frac{1}{1 - R(\omega_{1+} - \omega_{1-})} \{ \Psi'(\omega_1) - R[h(\omega_{1+}) - h(\omega_{1-})] \} \quad (1.9)$$

$$\Psi'(\omega_1) = c^{-1} \int_{L(\omega_1)} VB dy$$

Кроме того, должно выполняться неравенство $h'(\omega_1) \geq 0$, выражающее необходимое условие Вейерштрасса.

Интеграл в выражении для $\Psi'(\omega_1)$ берется вдоль линии уровня $L(\omega_1)$ функции ω_1 , которая одновременно есть линия тока \mathbf{j} вследствие равенства

$$z^2 = h(\omega_1) \quad (1.10)$$

Снимаемый с электродов ток равен

$$I = h(\omega_{1+}) - h(\omega_{1-}) \quad (1.11)$$

Задачу (1.6) — (1.9) удобно сформулировать в другой форме. Интегрируя (1.9) по ω_1 , получим

$$h'(\omega_1) = \frac{1}{1 - R(\omega_{1+} - \omega_{1-})} \left[\Psi'(\omega_1) - R \int_{\omega_{1-}}^{\omega_{1+}} \Psi'(\omega_1) d\omega_1 \right] \quad (1.12)$$

Пользуясь условием Вейерштрасса $h'(\omega_1) \geq 0$, введем функцию $f(\omega_1)$ уравнением

$$f'(\omega_1) = \sqrt{h'(\omega_1)} \quad (1.13)$$

Будем рассматривать функцию $f(\omega_1)$ как новую зависимую переменную; связь между f и ω_1 дается формулой (1.13), в правую часть которой следует подставить выражение (1.12) для $h'(\omega_1)$. При этом постоянным значениям ω_{1+} , ω_{1-} функции ω_1 на изоляторах соответствуют постоянные значения f_+ , f_- новой зависимой переменной.

Функция $B(x)$ четна; функцию $h(\omega_1)$ можно считать нечетной по x ; то же справедливо относительно ω_1 . Поэтому вместо области $CCS'C'$ (фиг. 1) можно рассматривать ее правую половину $СВААВС$; границу $АА$ этой новой области можно считать изолятором, вдоль которого $\omega_1 = 0$. Одновременно функцию $f(x, y)$ считаем нечетной по x и полагаем

$$f = 0 \text{ на } АА, \quad f = f_+ \text{ на } ВССВ \quad (1.14)$$

Принимая во внимание равенство

$$\Delta f = \sqrt{h'(\omega_1)} \Delta \omega_1 + \frac{h''(\omega_1)}{2 \sqrt{h'(\omega_1)}} (\text{grad } \omega_1)^2$$

представим (1.6) в форме

$$Mf \equiv \Delta f - \frac{1}{2c\rho_{\min} f'(\omega_1)} V B_x(x) = 0 \quad (1.15)$$

Функцию $f'(\omega_1)$ в правой части следует выразить через f при помощи формул (1.13), (1.12) и учитывая нечетность ω_1 относительно x . Граничное условие на электродах имеет вид $f_y = 0$; условия на изоляторах даются равенствами (1.14), где постоянная определяется из условия (1.8), которое теперь принимает вид

$$\rho_{\min} \int_{-8}^8 f_x(0, y) dy = f'(0) (1 - 2R\omega_{1+}) \quad (1.16)$$

причем необходимо учесть формулу (1.13) и замечание после этой формулы.

При исследовании поставленной задачи можно без потери общности считать $R = 0$. Действительно, вводя функцию

$$B_1(x) = B(x) - \frac{2cR}{\int_{L(\omega_1)} V dy} \int_0^{\omega_{1+}} \Psi(\omega_1) d\omega_1$$

и полагая

$$f = \sqrt{1 - 2R\omega_{1+}} f_1$$

получим для определения $f_1(x, y)$ краевую задачу, которая совпадает с задачей (1.14) — (1.16), если в этой последней заменить $B(x)$ на $B_1(x)$ и считать $R = 0$.

2. Вторая вариация и необходимое условие Якоби. Уравнение (1.6) (или (1.15)) есть уравнение Эйлера рассматриваемой оптимальной задачи. При этом, как показано в [1], оптимальный тензор P_0 характеризуется главными значениями $\rho_2 = \rho_{\min}$, $\rho_1 = \infty$. Угол $\gamma(x, y)$ дается формулой

$$\text{tg } \gamma = f_y / f_x$$

В оптимальном режиме процессы в канале описываются уравнениями [1]

$$0 = z_y^2 \cos \gamma - z_x^2 \sin \gamma \quad (2.1)$$

$$z_y^1 \cos \gamma - z_x^1 \sin \gamma = -\rho_{\min} (z_y^2 \sin \gamma + z_x^2 \cos \gamma) + c^{-1} V B \cos \gamma$$

получающимися из исходных уравнений (1.2) при $\rho_2 = \rho_{\min}$, $\rho_1 = \infty$. Уравнения (2.1) удобно представить в эквивалентной форме [2, 3]

$$\begin{aligned} z_x^1 &= \zeta^1, & z_y^1 &= u \zeta^1 - \rho_{\min} (u^2 + 1) \zeta^2 + c^{-1} V B & (u = \text{tg } \gamma) & (2.2) \\ z_x^2 &= \zeta^2, & z_y^2 &= u \zeta^2 \end{aligned}$$

Здесь обозначения ζ^1 , ζ^2 не следует путать с такими же символами статьи [1], где они имеют иной смысл.

Обычным путем [1] можно показать, что приращение δu управляющей функции по сравнению с ее оптимальным значением изменяет функционал $-I$ на величину

$$\delta(-I) = - \iint \delta H \, dx \, dy \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} -\delta H &= \frac{\delta u}{\zeta^2} \eta_1 [\rho_{\min} (\zeta^2)^2 \delta u - \zeta^2 \delta \zeta^1 + \zeta^1 \delta \zeta^2] + \rho_{\min} (\delta u)^2 \delta \zeta^2 \\ \eta_1 &= \omega_{1x}, \quad \zeta^2 = z_x^2 = h'(\omega_1) \omega_{1x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

функция ω_1 есть решение задачи (1.6) — (1.9), а $\delta \zeta^1$, $\delta \zeta^2$ означают вариации величин ζ^1 , ζ^2 , обусловленные вариацией δu управления. Интегрирование в (2.3) совершается по всей основной области.

Формулы (2.3), (2.4) точные; к сожалению, в общем случае знак приращения $\delta(-I)$ определить нельзя, так как для сколько-нибудь общей вариации δu почти ничего нельзя сказать о $\delta \zeta^1$, $\delta \zeta^2$. Сведения об этих вариациях можно получить, специализируя вариацию δu различными способами, из которых каждый порождает некоторое необходимое условие минимума. Один из этих способов — сильная вариация δu на специальных множествах («полосках») плоскости xu — исследован в [3] и приводит к необходимому условию Вейерштрасса сильного относительного минимума.

Другой способ специализации δu состоит в том, что эта вариация предполагается слабой, т. е. малой по абсолютной величине; при этом δu в общем случае отлична от нуля во всей основной области. Вариации $\delta \zeta^1$, $\delta \zeta^2$ суть величины того же порядка малости, что и δu ; они удовлетворяют уравнениям в вариациях

$$\begin{aligned} \delta z_x^1 &= \delta \zeta^1, \quad \delta z_y^1 = u \delta \zeta^1 - \rho_{\min} (u^2 + 1) \delta \zeta^2 + (\zeta^1 - 2\rho_{\min} u \zeta^2) \delta u \\ \delta z_x^2 &= \delta \zeta^2, \quad \delta z_y^2 = u \delta \zeta^2 + \zeta^2 \delta u \end{aligned} \quad (2.5)$$

получаемым варьированием уравнений (2.3). С другой стороны, точное выражение (2.3), (2.4) для приращения $\delta(-I)$ при связях (2.2) отличается слагаемым высшего порядка от половины второй вариации

$$\frac{1}{2} \delta^2(-I) = \iint \frac{\eta_1}{\zeta^2} \delta u [\rho_{\min} (\zeta^2)^2 \delta u - \zeta^2 \delta \zeta^1 + \zeta^1 \delta \zeta^2] \, dx \, dy \quad (2.6)$$

этого функционала. Чтобы функционал $-I$ был минимумом, необходима неотрицательность его второй вариации; в этом заключается необходимое условие Якоби. Приходим к присоединенной задаче о минимуме второй вариации: найти минимум функционала (2.6) при связях (2.5) и граничных условиях (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \delta z^1 &= \pm \delta z_+^1 \text{ на } AB, \quad \delta z^2 = 0 \text{ на } AA, \quad \delta z^2 = \delta z_+^2 \text{ на } BCCB \\ \delta z_+^1 &= R \delta z_+^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

получаемым варьированием условий (1.4).

Уравнения Эйлера этой задачи строятся обычным путем [2,3] при помощи множителей Лагранжа $\delta \xi_1$, $\delta \eta_1$, $\delta \xi_2$, $\delta \eta_2$, соответствующих уравне-

ниям (2.5); получаем

$$\begin{aligned} \eta_1 \delta u + \delta \xi_1 + u \delta \eta_1 &= 0 \\ -\frac{\eta_1}{\zeta^2} \zeta^1 \delta u - \rho_{\min} (u^2 + 1) \delta \eta_1 + \delta \xi_2 + u \delta \eta_2 &= 0 \\ 2\eta_1 \rho_{\min} \zeta^2 \delta u + \frac{\eta_1}{\zeta^2} (\zeta^1 \delta \zeta^2 - \zeta^2 \delta \zeta^1) - (\zeta^1 - 2\rho_{\min} u \zeta^2) \delta \eta_1 - \zeta^2 \delta \eta_2 &= 0 \\ \delta \xi_i &= -\delta \omega_{iy}, \quad \delta \eta_i = \delta \omega_{ix} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если положить

$$\delta z^2 = h_1(\omega_1) + h'(\omega_1) \delta \omega_1$$

где функция $h'(\omega_1)$ задана формулой (1.9), а $h_1(\omega_1) = \delta h(\omega_1)$ — вариация функции $h(\omega_1)$ — малая функция своего аргумента (производная $h_1'(\omega_1)$ равна вариации правой части (1.9)), то нетрудно показать, что уравнения (2.5) и (2.8) сводятся к соотношению

$$\begin{aligned} 2(h_1' + h''\delta\omega_1)\Delta\omega_1 + 2h'\Delta\delta\omega_1 + 2h''(\nabla\omega_1 \cdot \nabla\delta\omega_1) + (h_1'' + h'''\delta\omega_1) \times \\ \times (\nabla\omega_1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как и следовало ожидать, это уравнение представляет уравнение в вариациях по отношению к (1.6) (уравнение Якоби).

Граничные условия для (2.9) получаются сразу из условий (1.7), (1.8)

$$\begin{aligned} \delta\omega_{1y} = 0 \text{ на } AB, \quad \delta\omega_1 = 0 \text{ на } AA, \quad \delta\omega_1 = \delta\omega_{1+} \text{ на } BCCB \\ \rho_{\min} \delta \int_{L(\omega_1)} \omega_{1n} ds = -2R\delta\omega_{1+} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Легко видеть, что задача (2.9), (2.10) равносильна краевой задаче, получающейся варьированием уравнения (1.15) и соответствующих граничных условий для f .

3. Случай короткого замыкания. В этом случае ($R = 0$), согласно (1.9)

$$h'(\omega_1) = c^{-1} \int_{L(f)} VB dy = \Psi(f) \quad (3.1)$$

где введена новая параметризация линий уровня.

Уравнение Якоби запишется теперь так:

$$\Delta\delta f = \frac{VB_x(x)}{2c\rho_{\min}} \delta \{[\Psi(f)]^{-1/2}\} \quad (3.2)$$

Граничные условия имеют вид

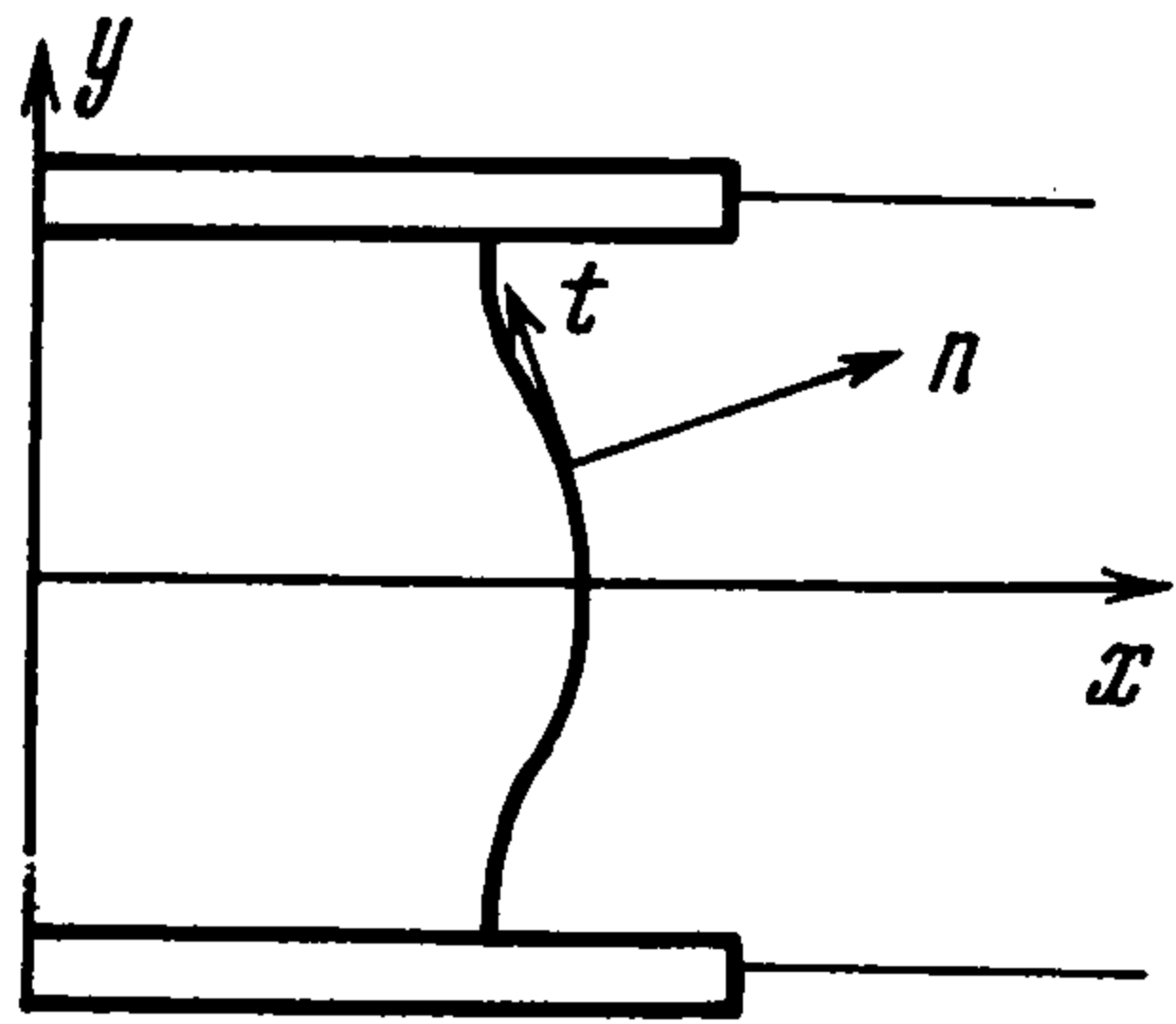
$$\begin{aligned} \delta f_y = 0 \text{ на } AB, \quad \delta f = 0 \text{ на } AA, \quad \delta f = \delta f_+ \text{ на } BCCB \\ \rho_{\min} \delta \int_{L(f)} f_n ds = \delta \{[\Psi(f)]^{1/2}\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

При исследовании этой задачи можно считать, что (см. [1]) повсюду в канале $f_n \geq 0$, где n — нормаль к линии $L(f)$, направленная как показано на фиг. 2.

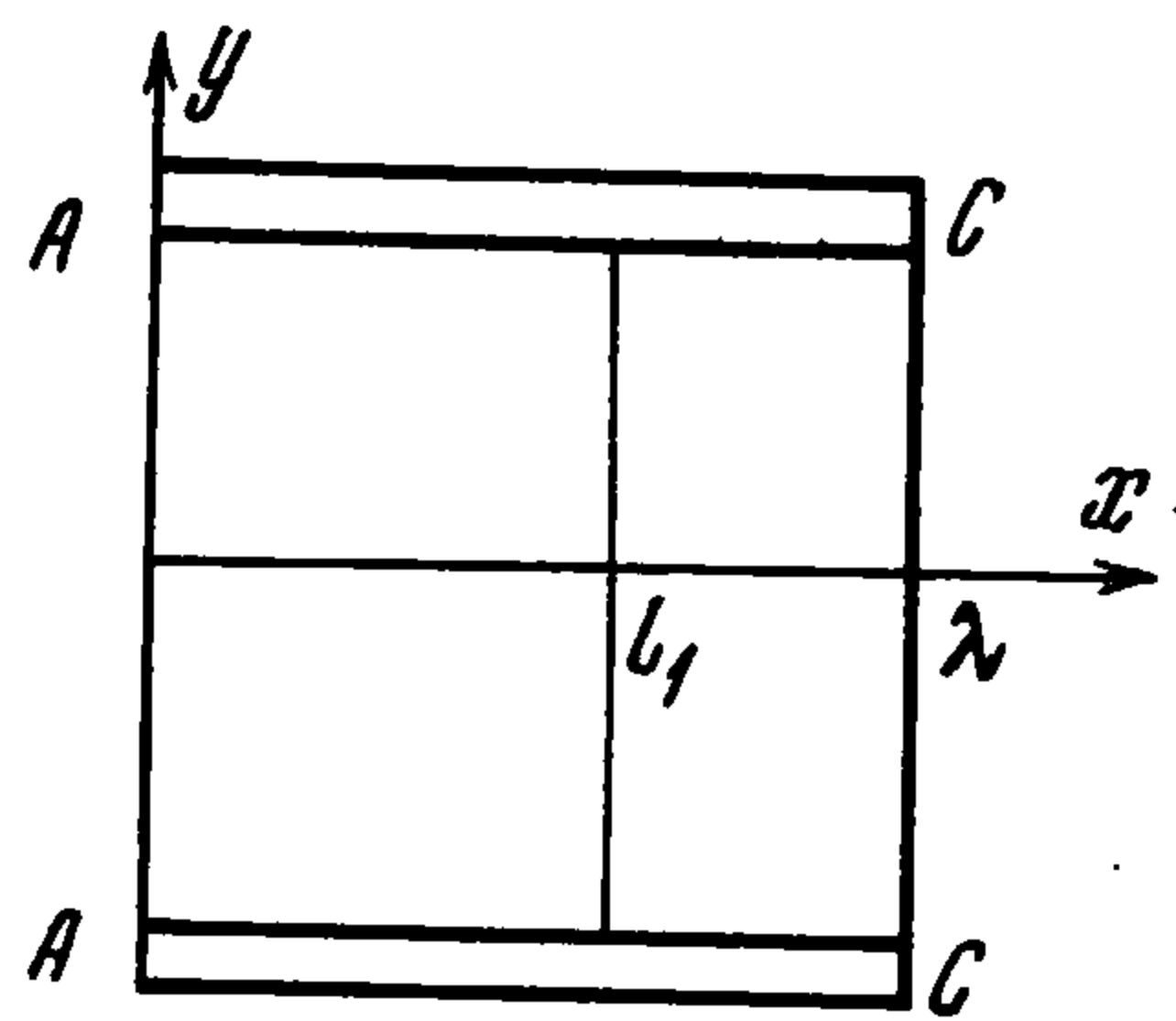
Произведя варьирование (см. приложение), представим (3.2) в виде

$$\Delta \delta f_P + \frac{VB_x(x_P)}{4c^2 \rho_{\min}} [\Psi'(f)]^{-3/2} \int_{L(f)} VB_x(x_M) \frac{\delta f_P - \delta f_M}{(f_n)_M} ds_M = 0 \quad (3.4)$$

Здесь δf_P означает вариацию δf в точке P ; интегрирование совершается по линии тока $L(f)$, проходящей через точку P (M означает точку интегрирования).



Фиг. 2



Фиг. 3

Последнее условие (3.3) представляется в форме (см. приложение)

$$\int_{L(f)} \delta f_n ds = 0 \quad (3.5)$$

В последнем равенстве интегрирование можно производить вдоль любой линии тока $L(f)$ (для доказательства достаточно проинтегрировать уравнение (3.4) по области, ограниченной двумя линиями тока $L(f)$, соединяющими электроды, и двумя отрезками электродов; при этом в интеграле от второго слагаемого (3.4) следует перейти к переменным f, s , где f — параметр линии тока $L(f)$ семейства, а s — длина дуги этой линии).

Исследуем задачу (3.3) — (3.5) для частного случая, когда горизонтальные участки изоляторов BC на фиг. 1 отсутствуют и область представляет собой прямоугольник, ограниченный электродами AC и изоляторами AA и CC (фиг. 3). Если $B(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, \lambda]$ и $V = \text{const}$, то функция

$$f_0(x) = \frac{1}{\rho_{\min}} \left(\frac{V}{2c\delta} \right)^{1/2} \int_0^x \sqrt{B(x)} dx \quad (3.6)$$

удовлетворяет уравнению (1.15), а также условиям $f_y = 0$ на электродах и (1.14) на изоляторах; условие (1.16), очевидно, также выполняется (напомним, что $R = 0$). Постоянная f_+ при этом имеет значение

$$f_+ = \frac{1}{\rho_{\min}} \left(\frac{V}{2c\delta} \right)^{1/2} \int_0^\lambda \sqrt{B(x)} dx$$

а линии $f = \text{const}$ представляют вертикальные прямые, соединяющие электроды. Условие Вейерштрасса $[f_0'(x)]^2 \geq 0$, очевидно, выполнено.

Уравнение Якоби (3.4) принимает вид

$$\Delta \delta f_P + \frac{[B_x(x)]^2}{4B^2(x)} \left(\delta f_P - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \delta f_M dy_M \right) = 0 \quad (3.7)$$

а граничное условие (3.5) записывается так:

$$\int_{-\delta}^{\delta} (\delta f)_x dy = 0 \quad (3.8)$$

Решение δf_P ищем в виде ряда

$$\delta f_P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \cos \frac{n\pi}{\delta} y \quad (3.9)$$

Это выражение удовлетворяет условиям (3.3) на электродах. Подстановка (3.9) в (3.7) приводит к следующим уравнениям для коэффициентов:

$$\frac{d^2 a_n}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{\delta} \right)^2 a_n + \frac{[B_x(x)]^2}{4B^2(x)} a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2 a_0}{dx^2} = 0 \quad (3.11)$$

Соответствующие граничные условия вытекают из (3.3) и (3.8):

$$a_n(0) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad a_0(\lambda) = \delta f_+, \quad a_n(\lambda) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

Условие (3.8) приводит к равенству

$$\frac{da_0(0)}{dx} = 0 \quad (3.13)$$

Поставленным условиям удовлетворяет лишь тривиальное решение уравнения (3.11); что касается уравнений (3.10), то некоторые из них могут в общем случае иметь нетривиальные решения. Существование таких решений зависит от функции $B(x)$ и от номера n .

Операторы p_n, q , действующие по формулам

$$p_n \varphi = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{n\pi}{\delta} \right)^2 \right] \varphi \quad (n = 1, 2, \dots), \quad q\varphi = \frac{[B_x(x)]^2}{4B^2(x)} \varphi$$

каждый в отдельности положительно определенные на функциях φ , удовлетворяющих условиям (3.12). Допустим, что положительная функция $B(x)$ такова, что всякое множество функций с ограниченной нормой энергии оператора p_n компактно в смысле нормы энергии оператора q , т. е.

$$\|\varphi\|_q = \int_0^\lambda \frac{[B_x(x)]^2}{4B^2(x)} \varphi^2 dx$$

Тогда, как известно, уравнение $p_n \varphi - \mu q \varphi = 0$ имеет бесконечное множество собственных чисел [4]

$$0 < \mu_1^{(n)} \leq \mu_2^{(n)} \leq \dots$$

При этом, очевидно,

$$\mu_i^{(k)} < \mu_i^{(k+1)}$$

так что $\mu_1^{(1)}$ наименьшее собственное число.

Если $\mu_1^{(1)} > 1$, то задача (3.10), (3.12), имеет для всех n лишь тривиальные решения, а соответствующее значение функционала (2.6) равно нулю. При $\mu_1^{(1)} = 1$ первое уравнение (3.10) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям (3.12); если $\mu_1^{(1)} < 1$, то можно указать такую функцию δf , что соответствующее значение функционала (2.8) будет отрицательно. В самом деле, при условии $\mu_1^{(1)} < 1$ существует ненулевая функция $a_{1*}(x)$, удовлетворяющая уравнению (3.10) ($n = 1$) в интервале $(0, l_1)$, $l_1 < \lambda$ и условиям $a_{1*}(0) = a_{1*}(l_1) = 0$ на концах этого интервала. Положим

$$a_1(x) = \begin{cases} a_{1*}(x) & (0 \leq x \leq l_1) \\ 0 & (l_1 \leq x \leq \lambda) \end{cases}$$

Функция

$$\delta f = a_1(x) \cos \frac{\pi y}{\delta} \quad (3.14)$$

в интервале $(0, l_1)$ по x удовлетворяет уравнению (3.7); соответствующее значение функционала (2.6) равно нулю. Последнее утверждение следует из равенства

$$\frac{1}{2} \delta^2 (-I) = - \oint \delta \omega_{1s} \delta z^1 ds - \oint \delta \omega_{2s} \delta z^2 ds$$

в котором интегрирование производится по границе прямоугольника $AC'C'A$ (фиг. 3); при этом следует учесть формулы (1.10), (1.13), (1.16), (2.5) — (2.7).

Если $\mu_1^{(1)} < 1$, то нулевое значение функционала (2.6) не является минимумом. В самом деле, функция (3.14) имеет разрывную первую производную по x ; если эта функция минимальна, то на линии разрыва $x = l_1$ должны удовлетворяться условия Вейерштрасса — Эрдманна, которые в данной задаче имеют вид

$$[\delta \omega_{1s}]_+^+ = 0, \quad [\delta \omega_{2s}]_+^+ = 0$$

$$\left\{ \frac{\eta_1}{\zeta^2} \delta u [\rho_{\min} (\zeta^2)^2 \delta u - \zeta^2 \delta \zeta^1 + \zeta^1 \delta \zeta^2] + \delta \omega_{1s} \delta z_n^1 + \delta \omega_{2s} \delta z_n^2 \right\}_+^+ = 0$$

Справа от линии разрыва выражения, стоящие в скобках, равны нулю; их значения слева вычисляются по формулам

$$\zeta^1 = 0, \quad \zeta^2 = (c \rho_{\min})^{-1} V B(x), \quad \eta_1 = (2 \rho_{\min} \delta)^{-1}, \quad u = 0$$

$$\delta u = - \frac{2 \rho_{\min} \delta}{\sqrt{2c^{-1} V B(x)} \delta} a_{1*}(x) \frac{\pi}{\delta} \sin \frac{\pi y}{\delta}$$

$$\delta \omega_{2y} = - \frac{\rho_{\min}}{\sqrt{2c^{-1} V B(x)} \delta} \left[\frac{da_{1*}(x)}{dx} - \frac{B_x(x)}{2B(x)} a_{1*}(x) \right] \cos \frac{\pi y}{\delta}$$

$$\delta \omega_{1y} = - \frac{1}{\sqrt{2c^{-1} V B(x)} \delta} a_{1*}(x) \frac{\pi}{\delta} \sin \frac{\pi y}{\delta}$$

которые легко следуют из предыдущего.

Условие Вейерштрасса — Эрдманна приводит теперь к требованию $(B(l_1) \neq 0)$

$$\left. \frac{da_{1*}(x)}{dx} \right|_{x=l_1} = 0$$

которое не может быть выполнено без тождественного обращения в нуль функции $a_{1*}(x)$ в интервале $(0, l_1)$. Поэтому существует функция δf , которая сообщает функционалу (2.6) отрицательное значение. Этим доказано, что для неотрицательности функционала (2.6) необходимо, чтобы первое собственное значение краевой задачи (3.3) — (3.5) или, что то же, задачи (3.10) — (3.12) было не меньше единицы.

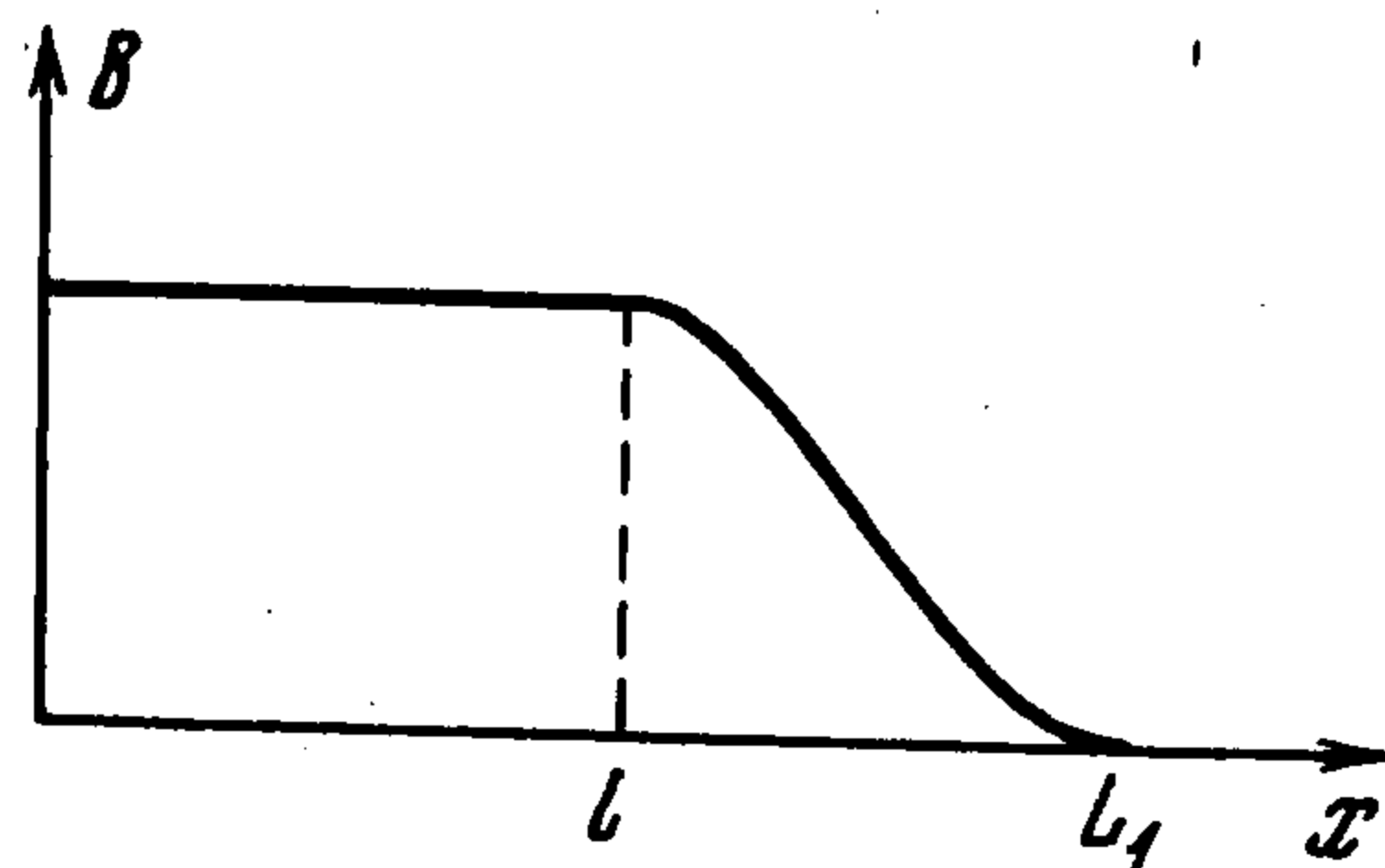
Отметим, что соответствующее значение δu отлично от нуля во всей области, так что вариация δu не является локальной вариацией (в отличие от «вариации в полоске»). Кроме того, эта вариация существенно двумерна, поскольку нетривиальные решения имеют уравнения (3.10); уравнение (3.11) имеет только нулевое решение. Иными словами, одномерное решение (3.6) удовлетворяет условию Якоби по отношению к одномерным вариациям и может не удовлетворять ему по отношению к двумерным вариациям.

При заданных λ, δ значение $\mu_1^{(1)}$ зависит от $B(x)$. Для приложений интересен случай, когда $B(x)$ задана графиком типа фиг. 4, причем $l < \lambda, L_1 > \lambda$; в частности, $L_1 = \infty$. Условие Вейерштрасса $B(x) \geq 0$ при этом выполнено; что касается условия Якоби, то его выполнение зависит от величин параметров l, λ, δ и характера убывания функции $B(x)$ при $x > l$. Так, условие Якоби выполняется, если $l = 0$ и $B(x)$ убывает по линейному закону; если же эта функция при $x > 0$ убывает по закону $B_0 e^{-\gamma x}$, где $\gamma > 0$ достаточно большая постоянная ($\gamma > \gamma_0 = 2\pi\lambda^{-1}(1 + \lambda^2\delta^{-2})^{1/2}$), то условие Якоби будет нарушено.

В первом из этих случаев степень убывания функции $B(x)$ на участке $x > l$ ограничивается условием Вейерштрасса, а именно требованием $B \geq 0$ при $x \in [0, \lambda]$. Во втором случае условие Вейерштрасса всегда выполнено ($e^{-\gamma x} > 0$ для любых x), и наибольшее возможное γ ($= \gamma_0$) определяется условием Якоби. Требуется указать оптимальные решения в условиях, когда функция $B(x)$ убывает быстрее, чем это допустимо по условиям Вейерштрасса и Якоби.

Если функция $B(x)$ нигде не возрастает и меняет знак с плюса на минус в точке $x_1, l < x_1 \leq \lambda$, то решение (3.6) оптимально лишь при условии $x_1 = \lambda$. Иными словами, там, где невозрастающая функция $B(x)$ обращается в нуль, должна располагаться изолирующая стенка.

Если при выполнении условия Вейерштрасса уравнение (3.10) при условиях (3.12) имеет $1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) собственным числом, то условие Якоби не выполнено. В описанном выше случае убывания $B(x)$ по показательному закону это имеет место при условии $\gamma > \gamma_0$.



Фиг. 4

Для $\gamma < \gamma_0$ уравнение Эйлера (1.15) имеет единственное решение (3.6), удовлетворяющее условиям (1.14), (1.16). При $\gamma = \gamma_0$ происходит «разветвление» этого решения, и для $\gamma > \gamma_0$ существует, вообще говоря, несколько решений уравнения (1.15). Поэтому возникает задача продолжения решения (3.6), оптимального при $\gamma \leq \gamma_0$, по параметру γ через значение $\gamma = \gamma_0$ таким образом, чтобы продолженное решение оставалось оптимальным, т. е. во всяком случае удовлетворяло необходимым условиям Вейерштрасса и Якоби.

Будем разыскивать «малые» решения этой задачи, т. е. локальные продолжения решения (3.6) по параметру γ , считая разность $\gamma - \gamma_0$ достаточно малой по сравнению с γ_0 , а функцию $V(x)$ равной $B_0 e^{-\gamma x}$, $x > 0$

Положим

$$f = f_0 + \varphi, \quad \gamma = \gamma_0 + k \quad (3.15)$$

и будем рассматривать задачу (1.14) — (1.16), считая $f_0(x)$ заданной формулой (3.6), $V = \text{const}$, $\varphi(x, y)$ — неизвестной функцией, а k / γ_0 — малым положительным параметром.

В новых переменных задачу можно записать так:

$$\Phi(\varphi, k) \equiv M(f_0 + \varphi, \gamma_0 + k) = 0 \quad (3.16)$$

$$\varphi = 0 \text{ на } AA, \quad \varphi = \varphi_+ \text{ на } CC, \quad \varphi_y = 0 \text{ на } AC$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_x(0, y) dy = 0 \quad (3.17)$$

Оператор (производная Гато оператора — Φ)

$$C = -\Phi_{\varphi}(0, 0) = -M_{\varphi}(f_0, \gamma_0)$$

есть оператор Фредгольма. Запишем (3.16) в форме

$$C\varphi = R(\varphi, k), \quad R(\varphi, k) = \Phi(\varphi, k) - \Phi_{\varphi}(0, 0)\varphi \quad (3.18)$$

Однородная краевая задача (3.17) для уравнения $\Phi_{\varphi}(0, 0)\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение

$$z = a(x) \cos \frac{\pi y}{\delta}$$

где $a(x)$ удовлетворяет уравнению (3.10) при $n = 1$ и соответствующим условиям (3.12). Решение z будем считать нормированным

$$\int_0^{\lambda} \int_{-\delta}^{\delta} z^2(x, y) dx dy = 1$$

Для разрешимости неоднородной краевой задачи $\Phi_{\varphi}(0, 0)\varphi = g(x, y)$ при условиях (3.17) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{\lambda} \int_{-\delta}^{\delta} gz dx dy = 0$$

поскольку соответствующая однородная задача совпадает со своей сопряженной.

Малые решения уравнения (3.18) будем разыскивать по методу Ляпунова — Шмидта, изложенному в монографии [5]. Представим (3.18) в форме

$$C_1 \varphi = F_{01} k + \sum_{i+j \geq 2} F_{ij} \varphi^i k^j + \xi z, \quad \xi = \int_0^\lambda \int_{-\delta}^\delta \varphi z \, dx \, dy \quad (3.19)$$

$$F_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} R(0, 0)}{\partial \varphi^i \partial k^j}$$

Здесь F_{ij} — степенной оператор порядка $i + j$ (см. [5]), а ξ — коэффициент, подлежащий определению. При этом учтено, что функция $z = a(x) \cos(\pi y / \delta)$ является простым нулем оператора C (см. (3.18)).

Решение $\varphi(x, y)$ уравнения (3.19) ищем в виде ряда

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i0} \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij} k^j$$

сходящегося [5] при достаточно малых $|\xi|$ и k . Подстановка этого ряда в (3.19) приводит к соотношению

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i0} \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} k^j = 0, \quad L_{ij} = \int_0^\lambda \int_{-\delta}^\delta \varphi_{ij} z \, dx \, dy \quad (3.20)$$

Функции φ_{ij} определяются из рекуррентной системы

$$\begin{aligned} C_1 \varphi_{01} &= F_{01}, & C_1 \varphi_{02} &= F_{02} + 2F_{11} \varphi_{01} + F_{20} \varphi_{01}^2 \\ C_1 \varphi_{03} &= F_{03} + 3F_{12} \varphi_{01} + 3F_{21} \varphi_{01}^2 + F_{30} \varphi_{01}^3 + 2F_{11} \varphi_{02} + 2F_{20} \varphi_{01} \varphi_{02} \\ C_1 \varphi_{10} &= z, & C_1 \varphi_{30} &= 2F_{20} \varphi_{10} \varphi_{20} + F_{30} \varphi_{10}^3 \\ C_1 \varphi_{20} &= F_{20} \varphi_{10}^2, & C_1 \varphi_{11} &= 2F_{11} \varphi_{10} + 2F_{20} \varphi_{10} \varphi_{01} \\ C_1 \varphi_{21} &= 2F_{11} \varphi_{20} + 2F_{20} \varphi_{01} \varphi_{02} + 3F_{21} \varphi_{10}^2 + 3F_{30} \varphi_{01} \varphi_{10}^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

при граничных условиях (3.17). Найдя эти функции и подставив их в (3.20), придем к формулам, определяющим постоянные L_{ij}

$$(u, z) = \int_0^\lambda \int_{-\delta}^\delta uz \, dx \, dy, \quad \Gamma = C_1^{-1}$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} L_{01} &= (F_{01}, z), & L_{02} &= (F_{02} + 2F_{11} (\Gamma F_{01}) + F_{20} (\Gamma F_{01})^2, z) \\ L_{03} &= (F_{03} + 3F_{12} (\Gamma F_{01}) + 3F_{21} (\Gamma F_{01})^2 + F_{30} (\Gamma F_{01})^3, z) + ([2F_{11} + \\ &+ 2F_{20} (\Gamma F_{01})] \Gamma [F_{02} + 2F_{11} (\Gamma F_{01}) + F_{20} (\Gamma F_{01})^2], z) \\ L_{20} &= (F_{20} z^2, z), & L_{30} &= (2F_{20} z (\Gamma F_{20} z^2) + F_{30} z^3, z), \\ L_{11} &= (2F_{11} z + 2F_{20} z (\Gamma F_{01}), z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

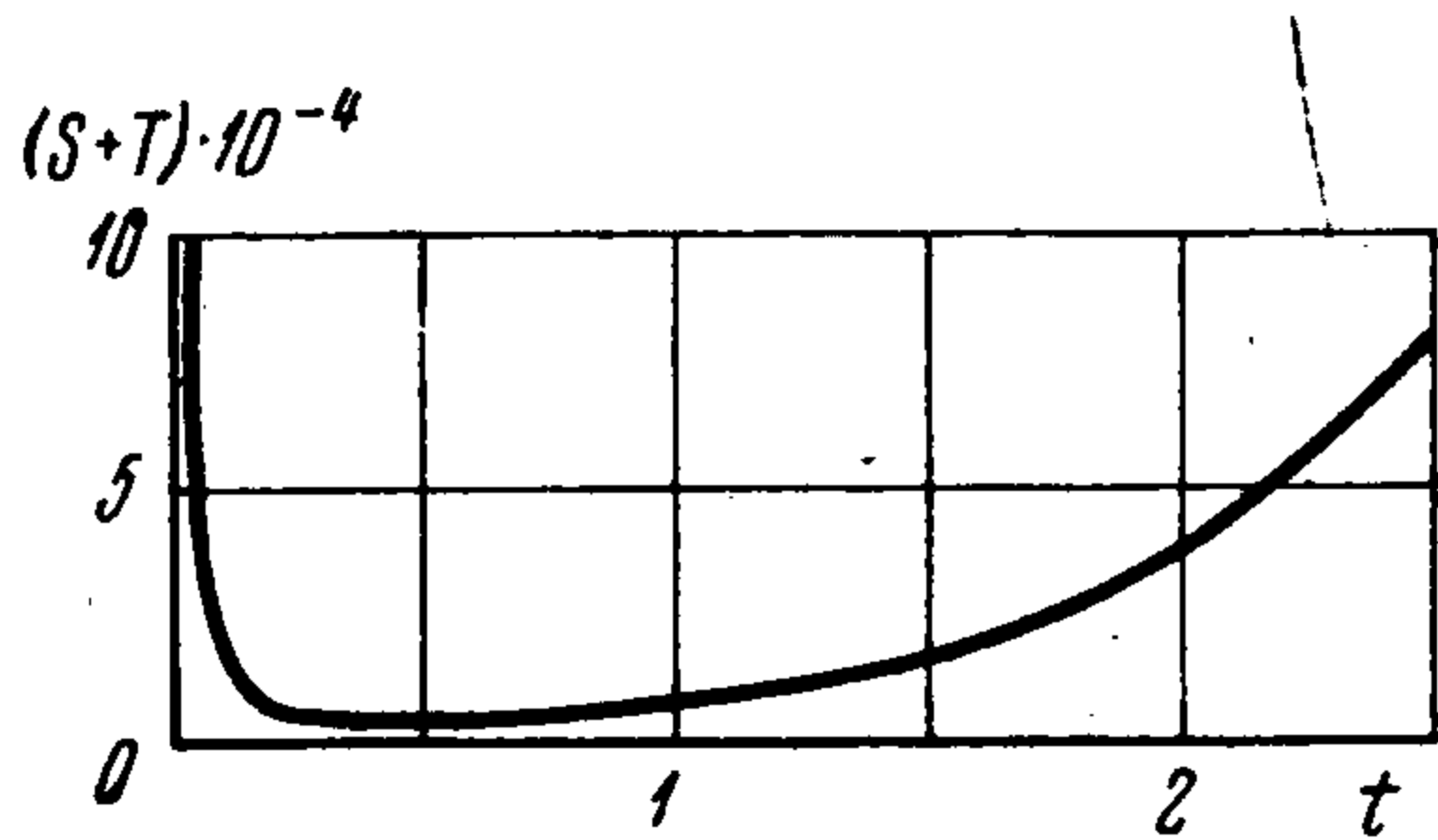
В приложении показано, что справедливы формулы

$$F_{01} = \left(\frac{VB_0}{2c\delta} \right)^{1/2} \frac{e^{-1/2 \gamma_0 x}}{2\rho_{\min}} \left(1 - \frac{\gamma_0 x}{2} \right), \quad F_{02} = - \left(\frac{VB_0}{2c\delta} \right)^{1/2} \frac{e^{-1/2 \gamma_0 x}}{8\rho_{\min}} x \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{2} \right)$$

$$F_{11} \varphi k = \frac{\gamma_0 k}{2} \left[\varphi - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^\delta \varphi_M(x, y_M) \, dy_M \right]$$

$$F_{20}uv = \frac{\gamma_0^2 \rho_{\min}}{8} \left(\frac{c}{2VB_0\delta} \right)^{1/2} e^{1/2 \gamma_0 x} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} [(u - u_M)(v_M)_x + (v - v_M)(u_M)_x] dy_M + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_0}{4} \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M)(v - v_M) dy_M - \frac{3}{8} \frac{\gamma_0}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M) dy_M \int_{-\delta}^{\delta} (v - v_M) dy_M \right\} \quad (3.23)$$

$$\frac{4VB_0}{\gamma_0^2 \rho_{\min}^2 c} e^{-\gamma_0 x} F_{30}u^3 = \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M)(u_M)_{xx}^2 dy_M - \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M)^2 (u_M)_{xx} dy_M + \\ + \frac{\gamma_0}{4} \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M)^2 (u_M)_x dy_M - \frac{3}{4} \frac{\gamma_0}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M) dy_M \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M)(u_M)_x dy_M - \\ - \frac{3}{16} \frac{\gamma_0^2}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M) dy_M \int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M)^2 dy_M + \frac{5}{32} \frac{\gamma_0^2}{\delta^2} \left[\int_{-\delta}^{\delta} (u - u_M) dy_M \right]^3$$



Фиг. 5

Эти соотношения вместе с (3.22) показывают, что $L_{0i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots$); кроме того, можно проверить, что $L_{20} = 0$. Поэтому уравнение разветвления (3.20) приводит к следующему определяющему уравнению [5]:

$$L_{30}\xi^2 + L_{11}k = 0$$

Оба корня $\xi_{1,2} = \pm (-kL_{11} / L_{30})^{1/2}$ этого уравнения действительны, так как можно показать (вывод опускаем за недостатком места), что

$$\xi_{1,2} = \pm \frac{2\lambda^2}{\pi} \left\{ \frac{1/2 \pi \sqrt{1+t} + 2}{(1+t)[S(t)+T(t)]} \frac{VB_0}{c\rho_{\min}^2} k \right\}^{1/2}, \quad t = \frac{\lambda^2}{\delta^2}$$

$$S(t) = \frac{1}{\pi^2(2+t)(5+t)} \left\{ \left[\frac{35}{8} \pi^2(1+t) - 1 + t + \frac{21}{64}(1-t^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{4} \pi^2(5+t)^2 + 8\pi^2 \frac{5+t}{1+t}(2+t) \right] (e^{2\pi \sqrt{1+t}} - 1) - \right. \\ \left. - 72\pi^2(2+t)(e^{\pi \sqrt{1+t}} - 1) \right\}$$

$$T(t) = \frac{1+t}{16(1-t)} \left\{ - \frac{e^{2\pi \sqrt{1+t}} - 1}{2+t} + \left(\frac{1}{5+t} + \frac{1}{1-t} \right) \frac{2}{5+t} \times \right. \\ \times \left(5t + 1 - 3 \frac{e^{\pi \sqrt{1+t}} - \cos \pi \sqrt{1-3t}}{\sin \pi \sqrt{1-3t}} \sqrt{(1+t)(1-3t)} \right) (e^{\pi \sqrt{1+t}} \times \\ \times \cos \pi \sqrt{1-3t} - 1) + \\ \left. + \left[3 \sqrt{(1+t)(1-3t)} + (5t+1) \frac{e^{\pi \sqrt{1+t}} - \cos \pi \sqrt{1-3t}}{\sin \pi \sqrt{1-3t}} \right] \times \right. \\ \left. \times e^{\pi \sqrt{1+t}} \sin \pi \sqrt{1-3t} \right\} \quad (3.24)$$

График функции $S(t) + T(t)$ приведен на фиг. 5; как видим, $S(t) + T(t) > 0$ для всех $t \geq 0$.

Малые решения уравнения (1.15) имеют вид

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= f_0 + \xi_{1,2} \left(\frac{2}{\lambda \delta} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi x}{\lambda} \cos \frac{\pi y}{\delta} + O(k) = \\ &= \frac{2}{\gamma \rho_{\min}} \left(\frac{V B_0}{2c\delta} \right)^{1/2} (1 - e^{-1/2 \gamma x}) \pm \frac{4\lambda}{\pi \rho_{\min}} \left\{ \frac{V B_0}{2c\delta} \frac{1/2 \pi \sqrt{1+t} + 2}{(1+t)[S(t)+T(t)]} k \lambda \right\}^{1/2} \times \\ &\times \sin \frac{\pi x}{\lambda} \cos \frac{\pi y}{\delta} + O(k) = f_0 \pm \omega k^{1/2} + O(k) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Непосредственная проверка условия Якоби представляется затруднительной; значительно проще вычислить приращение полного тока, обусловленное переходом к малому решению (3.25).

Одномерному решению (3.6) соответствует следующее значение тока:

$$I = \frac{2V B_0}{\gamma c \rho_{\min}} (1 - e^{-\gamma \lambda}) \quad (3.26)$$

Составляющая j_y вектора \mathbf{j} дается формулой (см. (1.10), (1.13))

$$j_y = [\Psi(f)]^{1/2} f_x, \quad \Psi(f) = c^{-1} V \int_{L(f)} B dy$$

Справедливы следующие соотношения (см. приложение):

$$\begin{aligned} [\Psi(f)]^{1/2} &= [\Psi(f_0)]^{1/2} + \frac{V}{2c} [\Psi(f_0)]^{-1/2} \left\{ \pm \rho_{\min} \left(\frac{2kc\delta}{V B_0} \right)^{1/2} \int_{-\delta}^{\delta} B_x(x) e^{1/2 \gamma_0 x} (\omega - \right. \\ &\quad \left. - \omega_M) dy_M + \rho_{\min} k \left(\frac{2c\delta}{V B_0} \right)^{1/2} \int_{-\delta}^{\delta} B_x(x) e^{1/2 \gamma_0 x} (\chi - \chi_M) dy_M - \right. \\ &\quad \left. - \rho_{\min}^2 \frac{2c\delta}{V B_0} k \int_{-\delta}^{\delta} B_x(x) e^{\gamma_0 x} (\omega - \omega_M) (\omega_M)_x dy_M + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{\min}^2 \frac{2c\delta}{V B_0} \frac{\gamma_0 k}{4} \int_{-\delta}^{\delta} B_x(x) e^{\gamma_0 x} (\omega - \omega_M)^2 dy_M + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \rho_{\min}^2 \frac{2c\delta}{V B_0} k \int_{-\delta}^{\delta} B_{xx}(x) e^{\gamma_0 x} (\omega - \omega_M)^2 dy_M \right\} - \\ &\quad - \frac{\rho_{\min}^2 V^2}{8c^2} \frac{2c\delta}{V B_0} k [\Psi(f_0)]^{-3/2} \left[\int_{-\delta}^{\delta} B_x(x) e^{1/2 \gamma_0 x} (\omega - \omega_M) dy_M \right]^2 + o(k) = \\ &= [\Psi(f_0)]^{1/2} \pm p k^{1/2} + q k + o(k) \\ &\quad B = B_0 e^{-\gamma_0 x} \end{aligned} \quad (3.27)$$

В последней формуле отброшено приращение k показателя γ ; это можно сделать, вычисляя приращение полного тока, обусловленное двумерным характером решения (3.25).

Приращение δf запишем в виде

$$\delta f = \pm \omega k^{1/2} + \chi k, \quad \chi = b \sin \frac{\pi x}{\lambda} \cos \frac{\pi y}{\delta}$$

Первое слагаемое справа определяется формулой (3.25); коэффициент b неизвестен, но должен быть сохранен для необходимой точности вычислений; далее будет показано, что в знании его нет необходимости.

Теперь, пользуясь формулой $f_x = (f_0)_x \pm \omega_x k^{1/2} + \chi_x k$, найдем приращение составляющей j_y вектора \mathbf{j}

$$\begin{aligned} \delta j_y &= [\Psi(f)]^{1/2} f_x - [\Psi(f_0)] (f_0)_x = \pm \{[\Psi(f_0)]^{1/2} \omega_x + p(f_{00})_x\} k^{1/2} + \\ &+ \{[\Psi(f_0)]^{1/2} \chi_x + p\omega_x + q(f_{00})_x\} k + o(k) \\ f_{00} &= \frac{2}{\gamma_0 \rho_{\min}} \left(\frac{VB_0}{2c\delta} \right)^{1/2} (1 - e^{-1/2 \gamma_0 x}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Имеем

$$p = - \frac{\gamma_0 \rho_{\min} V}{2c} [\Psi(f_0)]^{-1/2} \left(\frac{2c\delta}{VB_0} \right)^{1/2} B(x) e^{1/2 \gamma_0 x} \int_{-\delta}^{\delta} (\omega - \omega_M) dy_M = - \gamma_0 \rho_{\min} \omega \delta$$

Отсюда следует выражение для коэффициента при $\pm k^{1/2}$ в (3.28)

$$\left(\frac{2VB_0\delta}{c} \right)^{1/2} e^{-1/2 \gamma_0 x} \left(\omega_x - \frac{\gamma_0}{2} \omega \right) \quad (3.29)$$

Интегрируя это выражение (взятое при $y = \delta$) по x от нуля до λ , получаем нуль; приращение полного тока определяется поэтому линейным по k слагаемым в (3.28).

В выражении для $q(f_{00})_x$ (см. (3.27), (3.28)) выделим слагаемое

$$q_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{2B_0 c \delta} \right)^{1/2} \int_{-\delta}^{\delta} B_x(x) e^{1/2 \gamma_0 x} (\chi - \chi_M) dy_M$$

складываясь с $[\Psi(f_0)]^{1/2} \chi_x$ (см. (3.28)), это слагаемое даст в сумме выражение, отличающееся от (3.29) постоянным множителем, поэтому соответствующий вклад в величину полного тока будет равен нулю. Остается вычислить интеграл

$$2k \int_0^{\lambda} (q - q_1) |_{y=\delta} (f_{00})_x dx$$

Имеем

$$\begin{aligned} q - q_1 &= \frac{8\lambda^2}{\pi} \frac{1/2 \pi \sqrt{1+t} + 2}{\sqrt{1+t} [S(t) + T(t)]} \left(\frac{VB_0\delta}{2c} \right)^{1/2} e^{1/2 \gamma_0 x} \left(\frac{\gamma_0}{4} - \frac{\gamma_0}{4} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$2k \int_0^{\lambda} (q - q_1) |_{y=\delta} (f_{00})_x dx = 4\lambda^2 k \frac{VB_0}{c\rho_{\min}} \frac{1/2 \pi \sqrt{1+t} + 2}{S(t) + T(t)}$$

Приращение полного тока оказывается равным

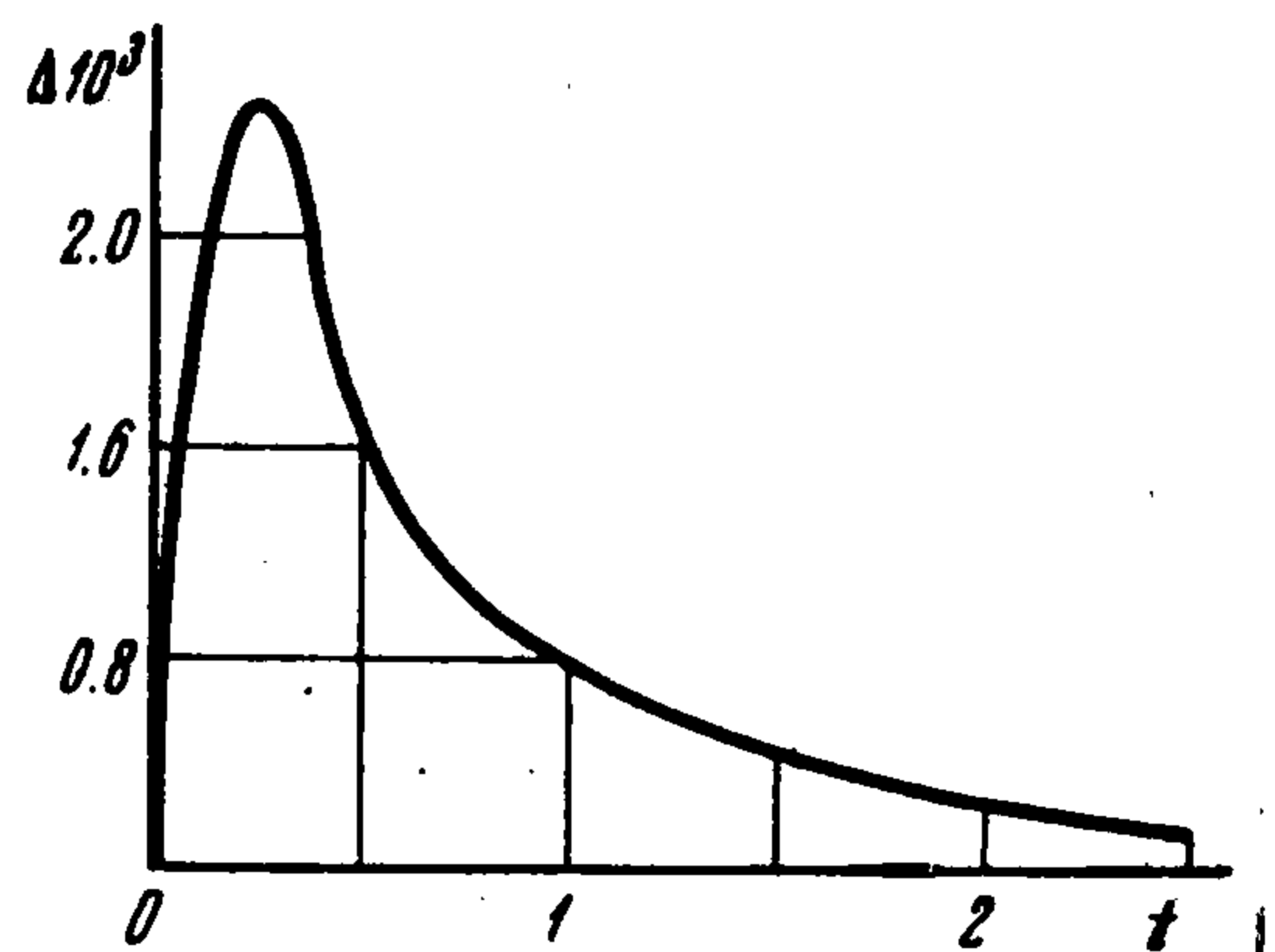
$$\delta I = 4\lambda^2 k \frac{VB_0}{c\rho_{\min}} \frac{1/2 \pi \sqrt{1+t} + 2}{S(t) + T(t)}$$

На фиг. 6 дан график функции $\Delta(t) = (\delta I / Ik\lambda) 10^2$.

Как видно из фигуры, переход к малому решению связан с увеличением снимаемого с электродов тока до 5% при $k\lambda = 2 < 2\pi < \gamma_0\lambda$.

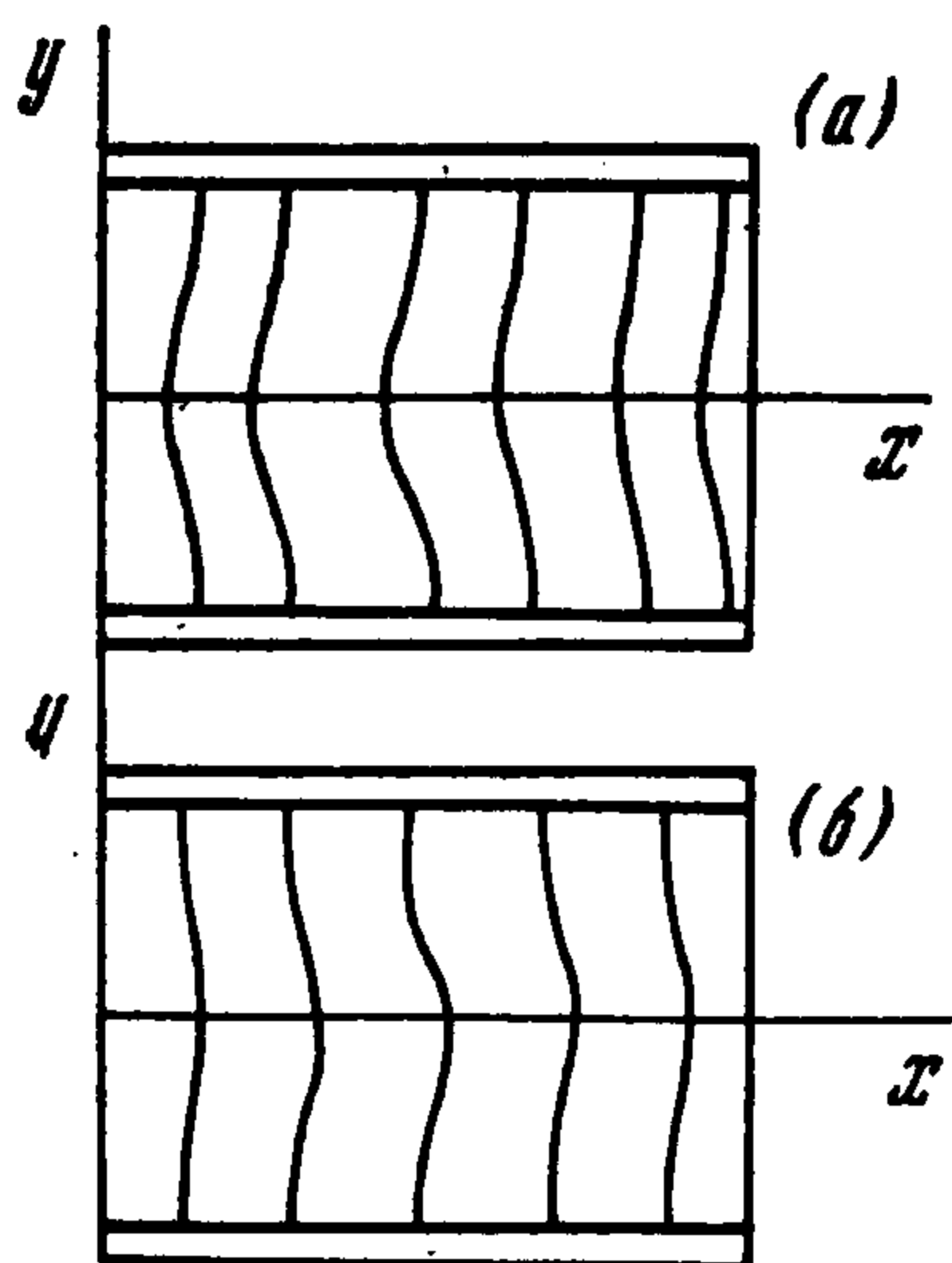
Приращение тока оказывается в главной части не зависящим от выбора малого решения (от выбора знака в формуле (3.25)). Различие между этими решениями может сказаться в слагаемых более высокого порядка по k в выражении для плотности тока.

Физическая причина роста тока при переходе к двумерному решению состоит в том, что при достаточно быстром убывании поля $B(x)$ оказывается выгодным в меньшей степени использовать область малых значений $B(x)$, одновременно уменьшая эффективное сопротивление канала токам, генерируемым в средней части канала, где поле достаточно велико. Именно такие условия перетекания токов создаются решением (3.25), линии уровня которого (линии тока) изображены на фиг. 7, причем фиг. 7, а соответствует верхнему знаку в (3.25), а фиг. 7, б — нижнему знаку.



Фиг. 6

Тензорное распределение удельного сопротивления, характеризуемое равенствами $\rho_1 = \infty$, $\rho_2 = \rho_{\min}$, может быть приближенно реализовано путем введения в поток изотропно проводящей среды с удельным сопротивлением $\rho = \rho_{\min}$ системы тонких изолирующих перегородок, проницаемых



Фиг. 7

для жидкости и следующих достаточно часто одна за другой. Оптимальная форма перегородок и их расположение в потоке рабочего тела диктуются конфигурацией линий тока в оптимальном режиме тензорного удельного сопротивления. Если заданы геометрические параметры канала и функции $V(y)$, $B(x)$, то оптимальный режим может быть построен при помощи методов, изложенных в [1] и в данной работе.

С другой стороны, известны решения [6,7] иллюстрирующие возможность выигрыша в значении тока путем введения в канал непроводящих перегородок, параллельных горизонтальной оси канала (только при таком расположении перегородок задача о распределении токов может быть решена при помощи стандартных аналитических средств).

Горизонтальное расположение перегородок не является оптимальным; вопрос о том, в какой степени можно таким путем приблизиться к оптимальному значению тока, решается при помощи изложенных выше методов.

Горизонтальное расположение перегородок не является оптимальным; вопрос о том, в какой степени можно таким путем приблизиться к оптимальному значению тока, решается при помощи изложенных выше методов.

Предположим, что функция $B(x)$ задана графиком типа фиг. 4, и примем режим однородного изотропного удельного сопротивления $\rho = \rho_{\min} = \text{const}$ за исходный неоптимальный режим 1; канал будем считать ограниченным с торцов непроводящими стенками CC и $C'C'$ (фиг. 1). Пусть I_1 будет величина снимаемого при этом тока; через I_2 обозначим ток, снимаемый в оптимальном тензорном режиме 2 при прочих равных условиях.

Разность $I_2 - I_1$ обусловлена тем, что в режиме 1 нарушены, вообще говоря, необходимые условия Вейерштрасса и Якоби. Оптимизирующее действие перегородок определяется тем, в какой мере они восстанавливают нарушенные необходимые условия.

Условие Вейерштрасса носит локальный характер и может быть восстановлено с той или иной степенью точности локальным изменением удельного сопротивления, в частности, путем введения горизонтальных перегородок в зоны спадания поля. Перегородки препятствуют образованию токовых вихрей в этих зонах; оптимальное распределение токов (режим 2) вовсе лишено вихрей [1]. Векторные линии \mathbf{j} , соответствующие каналу с перегородками, тем ближе к линиям \mathbf{j} в режиме 2, чем больше отношение длины зоны спадания поля к ширине канала. В тех случаях, когда это отношение велико, следует ожидать удовлетворительного выполнения условия Вейерштрасса в канале с перегородками; это условие будет выполняться хуже для каналов с короткими зонами спадания поля.

Если достигнутое путем введения перегородок распределение токов с достаточной точностью удовлетворяет помимо условия Вейерштрасса еще и условию Якоби, то можно считать, что получено удовлетворительное приближение по величине тока к значению I_2 .

В ряде случаев, однако, условие Вейерштрасса удовлетворяется уже в исходном режиме 1; если условие Якоби при этом не выполнено, то локальными изменениями удельного сопротивления (в том числе и горизонтальными перегородками) не удастся удовлетворить этому условию даже приближенно.

Иллюстрацией этого может служить пример этого пункта. Если канал ограничен горизонтальными электродами и вертикальными изоляторами, то при $B(x) \geq 0$ решение (3.6) удовлетворяет условию Вейерштрасса повсюду в таком канале независимо от его длины. При этом, если $B = B_0 e^{-\gamma x}$, то при $\gamma \lambda > 2\pi (1 + \lambda^2 \delta^{-2})^{1/2}$ решение (3.6) не удовлетворяет условию Якоби; этому условию удовлетворяет решение (3.25), переход к которому сопровождается увеличением снимаемого тока.

С другой стороны, введение в канал, заполненный однородно проводящей средой (фиг. 3), одной или нескольких непроводящих перегородок (горизонтальных или нет), либо уменьшение скалярной электропроводности в какой-либо части канала только уменьшает снимаемый с электродов ток

Рост тока, связанный с решениями (3.25), обусловлен действием всей зоны тензорного удельного сопротивления. При замене этой зоны последовательностью перегородок (форма которых определяется фиг. 7, а, б) ток увеличивается благодаря взаимодействию выделяющихся на перегородках зарядов.

Приложение. Вычисление первых коэффициентов разложения (3.19). До варьирования через произвольную точку P основной области проходит линия тока $L(f)$; после варьирования через эту точку проходит линия тока $L_1(F)$ (фиг. 8). Эти линии предполагаются близкими в пространстве S_1 .

Положение любой точки Q в окрестности линии $L(f)$ задаем координатами s, ζ , где s — длина дуги линии $L(f)$ от точки N до точки q — основания перпендикуляра,

опущенного из Q на линию $L(f)$, ζ — проекция вектора qQ на нормаль n к кривой $L(f)$ в точке q . Направления единичных векторов t и n касательной и нормали к кривой $L(f)$ даются формулами

$$t = (x_s, y_s), \quad n = (y_s, -x_s)$$

Вектор-радиус R точки Q связан с вектор-радиусом r точки q соотношением

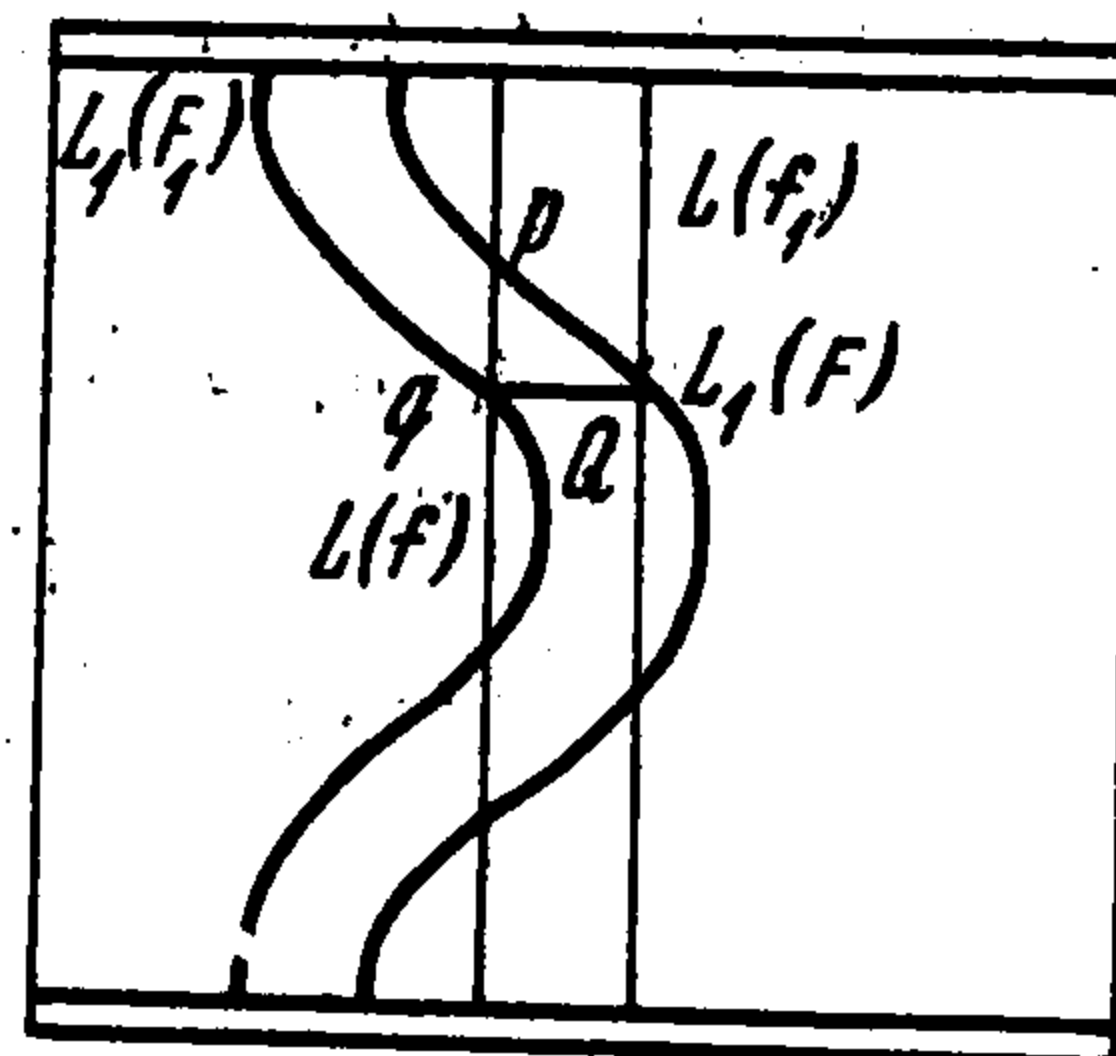
$$R = r + n\zeta$$

Используя формулу Френе

$$\frac{dn}{ds} = \frac{t}{\rho}$$

где ρ обозначает радиус кривизны кривой $L(f)$ в точке q , получим связь между дифференциалами

$$dR = t \left(1 + \frac{\zeta}{\rho} \right) ds + n d\zeta$$



Фиг. 8

Отсюда вытекают следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$h_s = 1 + \zeta / \rho, \quad h_\zeta = 1$$

Если точка Q перемещается вдоль кривой $L_1(F)$ ($F = \text{const}$), то вдоль этой кривой

$$d\zeta = - (F_s / F_\zeta) ds$$

Одновременно получаем

$$dR = [(1 + \zeta/\rho) t - (F_s / F_\zeta) n] ds = T dS$$

Здесь T означает единичный вектор касательной к $L_1(F)$, а dS — дифференциал дуги этой кривой.]

Через точку Q проходит кривая $L(f_1)$ основного (старого) семейства (фиг. 8); вариации

$$\Phi_P = F - f, \quad \Phi_Q = F - f_1$$

в точках P и Q связаны соотношением

$$\Phi_P = \Phi_Q + f_\zeta \zeta + 1/2 f_{\zeta\zeta} \zeta^2 + 1/6 f_{\zeta\zeta\zeta} \zeta^3 + o(\zeta^3) \tag{П.1}$$

производные $f_\zeta, f_{\zeta\zeta}, f_{\zeta\zeta\zeta}$ в правой части последнего равенства вычисляются в точке q (фиг. 8). Далее, считая $\zeta, \Phi_P, \Phi_Q, \Phi_q, (\Phi_q)_\zeta, (\Phi_q)_{\zeta\zeta}$ величинами одного порядка, напишем разложение

$$\Phi_Q = \Phi_q + (\Phi_q)_\zeta \zeta + 1/2 (\Phi_q)_{\zeta\zeta} \zeta^2 + o(\zeta^3)$$

Подстановка этого разложения в (П.1) приводит к уравнению относительно ζ (в дальнейшем будем для краткости писать Φ вместо Φ_q)

$$\Phi_P - \Phi = (f_\zeta + \Phi_\zeta) \zeta + 1/2 (f_{\zeta\zeta} + \Phi_{\zeta\zeta}) \zeta^2 + 1/6 f_{\zeta\zeta\zeta} \zeta^3 + o(\zeta^3) \tag{П.2}$$

Будем разыскивать корень этого уравнения, мало отличающийся от $(\Phi_P - \Phi) / f_\zeta$. Для этого положим $\zeta = (\Phi_P - \Phi) / f_\zeta + \varepsilon$, где $\varepsilon = o(\Phi)$. Подставляя в (П.2) и отбрасывая члены выше третьего порядка, придем к равенству

$$0 = \varepsilon \left(f_\zeta + \Phi_\zeta + f_{\zeta\zeta} \frac{\Phi_P - \Phi}{f_\zeta} \right) + \frac{\Phi_P - \Phi}{f_\zeta} \left\{ \Phi_\zeta + \frac{1}{2} \frac{\Phi_P - \Phi}{f_\zeta} \left[f_{\zeta\zeta} + \Phi_{\zeta\zeta} + \frac{1}{3} \frac{f_{\zeta\zeta\zeta}}{f_\zeta} (\Phi_P - \Phi) \right] \right\}$$

Разрешая это уравнение относительно ε , найдем

$$\zeta = \frac{\varphi_P - \varphi}{f_\zeta} - \frac{\varphi_P - \varphi}{f_\zeta^2} \left(\varphi_\zeta + \frac{1}{2} f_{\zeta\zeta} \frac{\varphi_P - \varphi}{f_\zeta} \right) - \frac{\varphi_P - \varphi}{f_\zeta^3} \left[-\varphi_\zeta^2 + \frac{1}{2} \varphi_{\zeta\zeta} (\varphi_P - \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{f_{\zeta\zeta}}{f_\zeta} \varphi_\zeta (\varphi_P - \varphi) + \frac{1}{6} \frac{f_{\zeta\zeta\zeta}}{f_\zeta} (\varphi_P - \varphi)^2 - \frac{1}{2} \frac{f_{\zeta\zeta}^2}{f_\zeta^2} (\varphi_P - \varphi)^2 \right] \quad (\text{П.3})$$

Оператор $\Phi(\varphi, k)$ (см. (3.16)) задается равенством ($V = \text{const}$)

$$\Phi(\varphi, k) \equiv \Delta F - \frac{VB_x(x)}{2c\rho_{\min}} [\Psi(F)]^{-1/2} = \Delta f - \frac{VB_x(x)}{2c\rho_{\min}} [\Psi(f)]^{-1/2} + \\ + \Delta\varphi_P - \frac{VB_x(x)}{4c\rho_{\min}} \left\{ -[\Psi(f)]^{-3/2} \delta\Psi + \frac{3}{4} [\Psi(f)]^{-1/2} (\delta\Psi)^2 - \right. \\ \left. - \frac{5}{8} [\Psi(f)]^{-1/2} (\delta\Psi)^3 + o[(\delta\Psi)^3] \right\} \quad (\text{П.4})$$

при этом, вычисляя вариацию

$$\delta\Psi = \frac{V}{c} \int_{L_1(F)} B dy - \frac{V}{c} \int_{L(f)} B dy$$

следует удерживать слагаемые до третьего порядка по ζ включительно.

На кривой $L_1(F)$

$$dy|_{L_1(F)} = (1 + \zeta/\rho) dy - \zeta dx$$

Здесь dx, dy — проекции tds на оси x и y ; ζ — координата точки кривой $L_1(F)$, а $\zeta = d\zeta/ds = -F_s/F_\zeta$; дифференциалы dx, dy связаны уравнением кривой $L(f)$: $f_x dx + f_y dy = 0$.

В дальнейшем будем считать, что $f = f(x)$, так что семейство состоит из вертикальных прямых. В этом случае на кривой $L_1(F)$ $dy|_{L_1(F)} = dy$, откуда следует

$$\int_{L_1(F)} B dy - \int_{L(f)} B dy = \int_{-\delta}^{\delta} \left(B_x \zeta + \frac{1}{2} B_{xx} \zeta^2 + \frac{1}{6} B_{xxx} \zeta^3 + \dots \right) dy$$

Для оператора $\Phi(\varphi, k)$ после несложных преобразований получаем выражение

$$\Phi(\varphi, k) = \Delta\varphi_P - \frac{B_x(x)}{8\rho_{\min} B \delta} \left(\frac{V}{2Bc\delta} \right)^{1/2} \left[B_x(x) \int_{-\delta}^{\delta} \zeta dy + \frac{1}{2} B_{xx} \int_{-\delta}^{\delta} \zeta^2 dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} B_{xxx} \int_{-\delta}^{\delta} \zeta^3 dy - \frac{3}{8} \frac{B_x^2(x)}{B\delta} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \zeta dy \right)^2 - \frac{3}{8} \frac{B_x(x) B_{xx}(x)}{B\delta} \times \right. \\ \left. \times \left(\int_{-\delta}^{\delta} \zeta dy \right) \left(\int_{-\delta}^{\delta} \zeta dy \right) + \frac{5}{32} \frac{B_x^3(x)}{B^2\delta^2} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \zeta dy \right)^3 \right] + o(\zeta^3)$$

Для функции $f = f_0(x)$, заданной формулой (3.6), строим выражение (П.3)

$$\zeta = \rho_{\min} \left(\frac{2c\delta}{VB_0} \right)^{1/2} e^{1/2\gamma x} \left\{ (\varphi_P - \varphi) - \rho_{\min} \left(\frac{2c\delta}{VB_0} \right)^{1/2} e^{1/2\gamma x} (\varphi_P - \varphi) \left[\varphi_\zeta - \frac{\gamma}{4} (\varphi_P - \varphi) \right] - \right. \\ \left. - \rho_{\min}^2 \frac{2c\delta}{VB_0} e^{\gamma x} (\varphi_P - \varphi) \left[-\varphi_\zeta^2 + \frac{1}{2} \varphi_{\zeta\zeta} (\varphi_P - \varphi) + \frac{3}{4} \gamma \varphi_\zeta (\varphi_P - \varphi) - \frac{\gamma^2}{12} (\varphi_P - \varphi)^2 \right] \right\}$$

Подставляя этот результат в (П.4), приходим к формуле

$$\begin{aligned}
 -\Delta\varphi_P - \frac{\gamma_0^2}{4} \left(\varphi_P - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi dy \right) &= \frac{k}{4} (2\gamma_0 + k) \left(\varphi_P - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi dy \right) - \frac{\gamma_0^2 \rho_{\min}}{8\delta} \left(\frac{2c\delta}{VB_0} \right)^{1/2} \times \\
 &\times e^{1/2\gamma_0 x} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_{\zeta} (\varphi_P - \varphi) dy + \frac{\gamma_0}{4} \int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi)^2 dy - \frac{3}{8} \frac{\gamma_0}{\delta} \left[\int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi) dy \right]^2 \right\} - \\
 &- \frac{\gamma_0^2 \rho_{\min}^2 c}{4VB_0} e^{\gamma_0 x} \left\{ - \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_{\zeta}^2 (\varphi_P - \varphi) dy + \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_{\zeta} (\varphi_P - \varphi)^2 dy - \right. \\
 &- \frac{\gamma_0}{4} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_{\zeta} (\varphi_P - \varphi)^2 dy + \frac{3}{4} \frac{\gamma_0}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi) dy \int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi) \varphi_{\zeta} dy + \\
 &+ \frac{3}{16} \frac{\gamma_0^2}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi) dy \int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi)^2 dy - \frac{5}{8} \frac{\gamma_0^2}{4\delta^2} \left[\int_{-\delta}^{\delta} (\varphi_P - \varphi) dy \right]^3 \left. \right\} + \dots + \\
 &+ \frac{1}{2\rho_{\min}} \left(\frac{VB_0}{2c\delta} \right)^{1/2} e^{-1/2\gamma_0 x} \left(1 - \frac{\gamma_0 x}{2} \right) k - \frac{1}{8\rho_{\min}} \left(\frac{VB_0}{2c\delta} \right)^{1/2} x e^{-1/2\gamma_0 x} \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{2} \right) k^2
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекают равенства (3.23) для F_{ij} .

Определение величин L_{ij} (см. (3.20)) связано с вычислениями по формулам (3.22); эти вычисления весьма громоздки и поэтому здесь не приводятся.

Поступила 8 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А. Об оптимальном распределении тензора удельного сопротивления рабочего вещества в магнитогидродинамическом канале. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
2. Лурье К. А. Оптимальное управление проводимостью жидкости, движущейся по каналу в магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Лурье К. А. Задача Майера — Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
6. Sutton G. W. Design considerations of a magnetohydrodynamic electrical power generator. Vista Astronautics, 1960, vol. 3, pp. 53—64 (N.-Y. Soc. Automat. Engrs).
7. Ватажин А. Б., Немкова Н. Г. Некоторые двумерные задачи о распределении электрического тока в канале магнитогидродинамического генератора с непроводящими перегородками. ПМТФ, 1964, № 2.