Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ЗАДАЧИ В ВАРИАЦИЯХ ДЛЯ ПЛОСКИХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

А. А. Орел

(Саратов)

Рассмотрены два примера прямых задач околозвуковых течений газа в постановке Ф. И. Франкля: задача о течении через сопло Лаваля со стенками, мало отличающимися от прямолинейных и задача об обтекании симметричного клинообразного профиля звуковым потоком газа. Расчет потока в первом приближении сводится к краевой задаче для уравнения второго порядка смешанного типа. В свою очередь краевая задача приводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши. Решение уравнения ищется методом последовательных приближений.

Найдено условие, позволяющее определять расход в случае течения через сопло Лаваля или коэффициент при особом решении в случае обтекания профиля звуковым потоком газа.

Наличие нелинейного члена в уравнениях околозвуковых течений газа приводит к большим трудностям при решении прямых задач (задач о нахождении потока в области, имеющей заданные границы).

В случае плоскопараллельного потока можно преобразовать нелинейные уравнения в плоскости течения к линейным в плоскости годографа скоростей. Однако поставить краевую задачу на плоскости годографа удается лишь для ограниченного числа течений с границами, на которых заранее известна связь между компонентами скорости.

А. А. Никольским [1] был предложен метод решения краевых задач с границами, мало отличающимися от таких, для которых известно изображение на плоскости годографа. В результате получается краевая задача с линейными граничными условиями для линейного дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа.

Метод А. А. Никольского получил дальнейшее развитие в работах Ф. И. Франкля [2,3], где он был применен к решению прямой задачи сопла Лаваля. Было показано, что расход через сопло с заданными стенками по существу не определен и может быть задан произвольным образом.

В своих следующих работах [4,5] Ф. И. Франкль обнаружил неопределенный коэффициент и в задаче об обтекании профиля звуковым потоком газа. В этом случае в точке плоскости годографа, соответствующей области, бесконечно удаленной от обтекаемого тела, решение определено лишь с точностью до произвольного постоянного множителя.

В этих же работах было высказано предположение, что решение прямой задачи околозвукового течения должно удовлетворять некоторым дополнительным, физически обоснованным условиям, которые служат для нахождения неопределенных параметров задачи.

Вопросу о единственности расхода через заданное сопло Лаваля посвящена также работа [6], в которой доказывается единственность расхода при условии сохранения асимптотического типа течения в центре сопла.

§ 1. Постановка задачи. Пусть известно плоскопараллельное околозвуковое течение идеального газа в области D, имеющей границы d_1, d_2. В качестве d_1, d_2 могут быть выбраны верхняя и нижняя стенки сопла Лаваля или верхняя и нижняя границы обтекаемого профиля.

Если известно изображение кривых d_1, d_2 на плоскости годографа скоростей, то поле течения можно рассчитать путем решения соответствующей краевой задачи для уравнения Трикоми

$$\eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ψ — функция тока, θ — угол наклона вектора скорости, а η — переменная Франкля [7].

Следуя статье Ф. И. Франкля [2], сформулируем прямую задачу для определения течения в области E с границами e_1, e_2, мало отличающимися от d_1, d_2.

Пусть поток в области D определен соотношениями $x = x_0(\theta, \eta)$, $y = y_0(\theta, \eta)$, $\psi = \psi_0(\theta, \eta)$, где x, y — декартовы координаты на физической плоскости, тогда соответствующие формулы для искомого течения можно представить в виде

$$x = x_0(\theta, \eta) + \delta x(\theta, \eta), \quad y = y_0(\theta, \eta) + \delta y(\theta, \eta)$$
$$\psi = \psi_0(\theta, \eta) + \delta\psi(\theta, \eta)$$

Здесь δ — символ вариации.

Как показано в работе [2], поток в области E можно рассчитать путем решения следующей краевой задачи на плоскости (θ, η): найти решение уравнения

$$\chi_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\eta}\chi_\eta\right) = 0 \tag{1.2}$$

принимающее на границах d_1, d_2 краевые значения

$$\chi = -\rho w \delta n_1 \text{ на } d_1, \quad \chi = \rho w \delta n_2 + \delta q \text{ на } d_2 \tag{1.3}$$

Здесь ρ — плотность газа, w — модуль скорости, δn_i — расстояния между точками кривых d_i и e_i, взятые в направлениях внутренних нормалей к d_i $(i = 1, 2)$. Величина δq появляется в граничных условиях (1.3) лишь в случае соплового течения и равна разности расходов через сопла E и D.

Доказательство теоремы существования и единственности решения краевой задчи (1.2), (1.3) можно найти в работах [8,9].

Величины δx, δy, $\delta\psi$ определяются по формулам

$$\delta x = \frac{\cos\theta}{\rho w}\chi_\theta + \frac{\sin\theta}{\rho(1-M^2)}\chi_w, \qquad \delta y = \frac{\sin\theta}{\rho w}\chi_\theta - \frac{\cos\theta}{\rho(1-M^2)}\chi_w$$
$$\delta\psi = \chi - \frac{w}{1-M^2}\chi_w, \qquad M \text{ — число Маха} \tag{1.4}$$

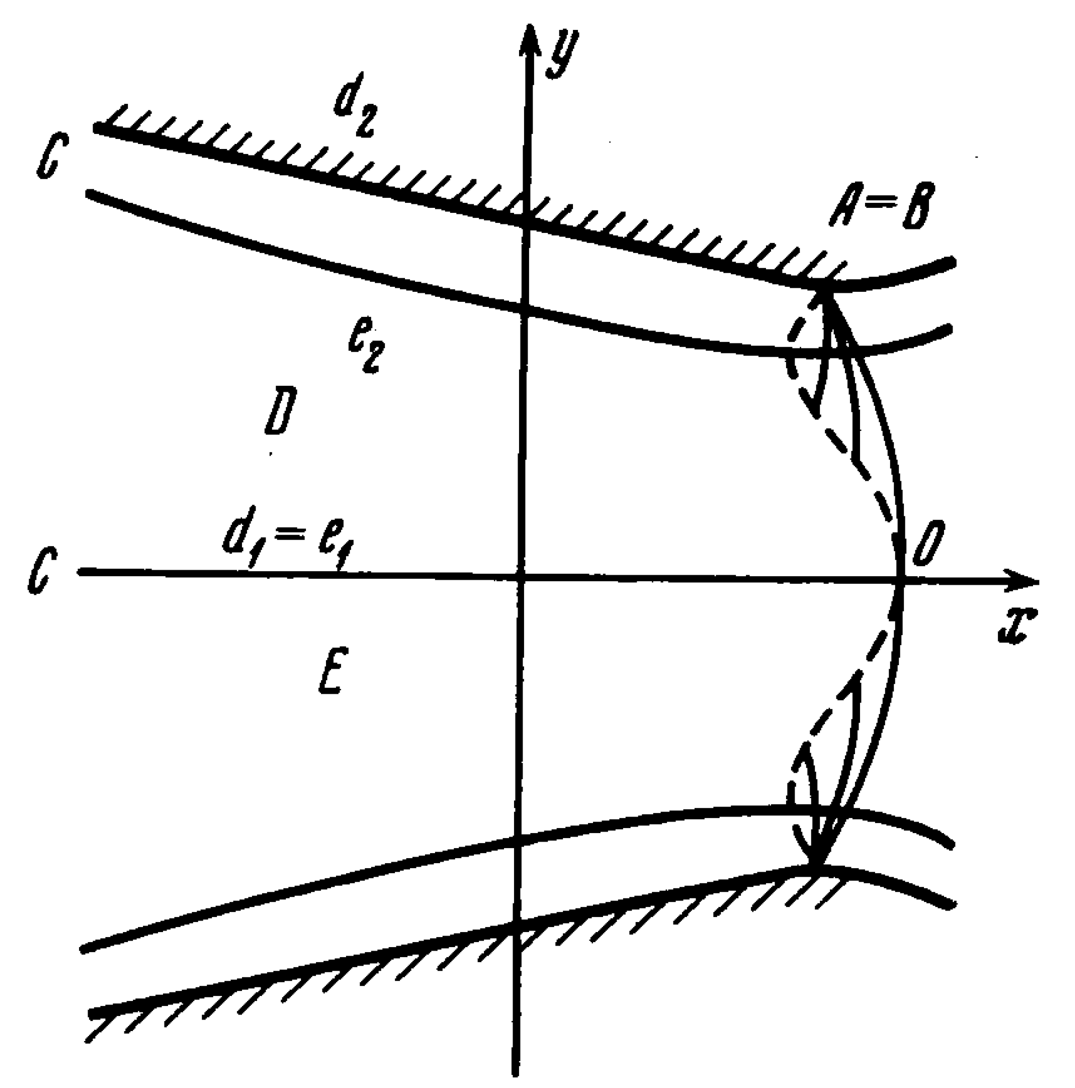
В околозвуковом приближении соотношения (1.4) упрощаются и принимают вид

$$\delta x = \rho_* a_* \chi_\theta, \quad \delta y = \rho_* a_* (\gamma+1)^{-1/3}\eta^{-1}\chi_\eta, \quad \delta\psi = (\gamma+1)^{-1/3}\eta^{-1}\chi_\eta \tag{1.5}$$

Здесь ρ_* и a_* — критические значения плотности и скорости звука, γ — показатель адиабаты.

Пусть течение в области D представляет собой истечение струи из бесконечного симметричного сосуда с прямыми стенками, образующими некоторый угол θ_0 с осью симметрии CO (фиг. 1). Эта задача рассматривалась многими авторами и является классической (см., например, [10]). Отображение области D на плоскость годографа (θ, η) представлено на фиг. 2. В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением лишь верхней половины потока.

В качестве границы d_1 выбрана линия тока, проходящая по оси CO, а в качестве d_2 — верхняя стенка сосуда. На линии OB поток достигает скорости звука. В области, заключенной между звуковой линией OB и предельной характеристикой OB, возникает течение разрежения с центром в точке $A = B$, которая изображается в виде отрезка характеристики AB на плоскости годографа.



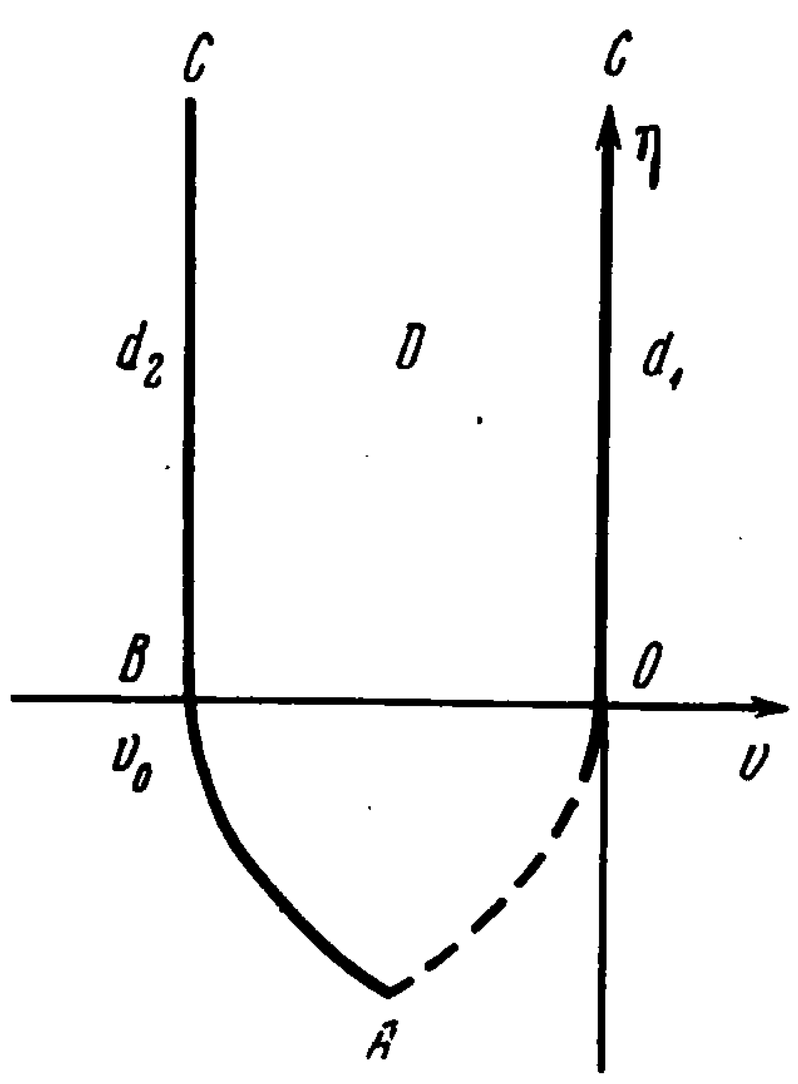
Фиг. 1

Расчет потока сводится к краевой задаче для уравнения (1.1) при граничных условиях

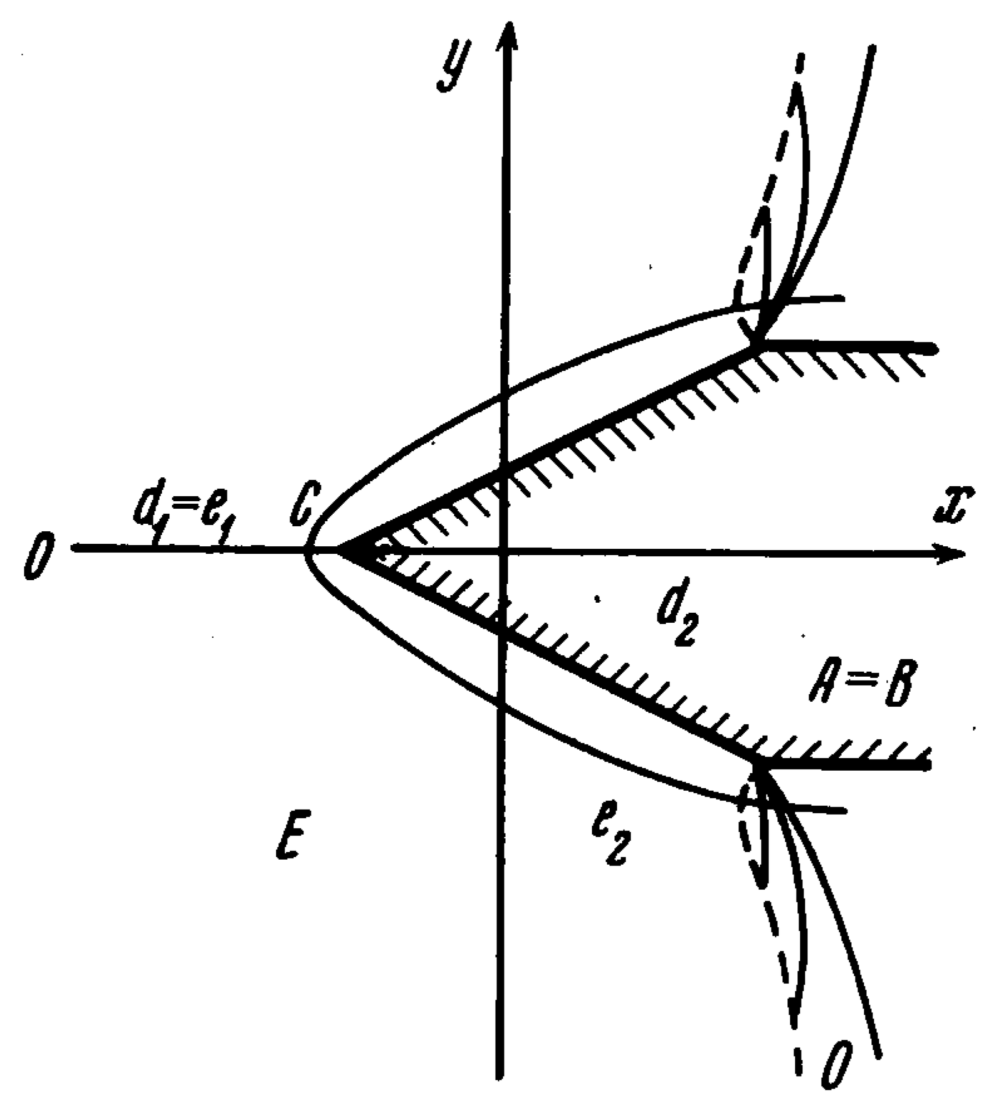
$$\psi = 0 \text{ на } d_1, \ \psi = q \text{ на } d_2$$

Рассмотрим теперь течение через симметричное сопло Лаваля E (фиг. 1). Будем считать, что граница e_1 совпадает с d_1, а e_2 задана в виде отклонений δn от d_2. В точке $A = B$ величины δn откладываются в направлении нормали к вектору скорости.

Течение в области E рассчитывается путем решения краевой задачи (1.2), (1.3), причем $\delta n_1 = 0$, $\delta n_2 = \delta n$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим задачу о симметричном обтекании клинообразного профиля звуковым потоком газа. В качестве основного течения выбрано обтекание клина под нулевым углом атаки (фиг. 3). Границы d_1, d_2 представляют собой различные участки одной линии тока, проходящей по оси симметрии CO и стороне клина. Изображение области D на плоскости годографа совпадает с уже рассмотренным на фиг. 2. Характерные точки в данном течении обозначены так же, как и в предыдущем случае. Угол полураствора клина равен θ_0.

Расчет потока сводится к определению функции $\psi(\theta, \eta)$, удовлетворяющей уравнению (1.1) и краевым условиям $\psi = 0$ на d_1, d_2. Кроме того, в точке O ($\theta = 0$, $\eta = 0$), соответствующей бесконечности на плоскости течения, решение $\psi(\theta, \eta)$ должно обладать особенностью Франкля [10,11]. Иначе говоря, функция тока для течения в области D должна иметь вид

$$\psi(\theta, \eta) = \psi_1(\theta, \eta) - f(\theta, \eta) \tag{1.6}$$

Здесь

$$f(\theta, \eta) = r^{-5/3}[(3t-1)(t+1)^{1/3} - (3t+1)(t-1)^{1/3}]$$
$$r^2 = \theta^2 + {}^4/_9\,\eta^3, \qquad t = \theta/r$$

Функция ψ_1 будет ограниченным, непрерывным решением уравнения (1.1) и удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\psi_1 = 0 \quad \text{на } d_1, \qquad \psi_1 = f(\theta, \eta) \text{ на } d_2$$

Выберем границы e_1, e_2, как показано на фиг. 3. Функция тока для течения в области E отличается от ψ на величину $\delta\psi$, которая в соответствии с (1.6) должна иметь вид $\delta\psi = \delta\psi_1 - \varepsilon f$. Отсюда, учитывая связь между $\delta\psi$ и χ, находим

$$\chi(\theta, \eta) = \chi_1(\theta, \eta) - \delta c g(\theta, \eta)$$

Здесь

$$g(\theta, \eta) = r^{-1/3}[(t+1)^{2/3} - (t-1)^{2/3}], \qquad \delta c = \text{const}$$

Следовательно, задача сводится к определению непрерывного, ограниченного решения уравнения (1.2), удовлетворяющего граничным условиям

$$\chi_1 = 0 \text{ на } d_1, \qquad \chi_1 = \rho w \delta n + g \delta c \text{ на } d_2$$

Постоянная δc так же, как в предыдущем случае δq, будет неопределенным параметром задачи. В конце работы найдем условие, позволяющее по заданным δn определять δc или δq.

§ 2. Сведение к одной краевой задаче для обобщенного уравнения. В уравнении (1.2) перейдем к новым переменным $x = 2\theta$, $y = \eta^2 \operatorname{sgn} \eta$, $Z(x, y) = \chi(\theta, \eta)$

Тогда оно примет форму

$$\operatorname{sgn} y\, |y|^{-1/2} Z_{xx} + Z_{yy} = 0 \tag{2.1}$$

Будем рассматривать, однако, уравнение более общего вида

$$\operatorname{sgn} y\, |y|^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0 \qquad (-1 < m < +\infty) \tag{2.2}$$

В частном случае при $m = 1$ имеем уравнение Трикоми (1.1); при $m = -{}^1/_2$ уравнение (2.2) совпадает с (2.1).

Таким образом, рассмотренные примеры прямых задач околозвуковых течений могут быть без ограничения общности сведены к следующей задаче: найти непрерывное, ограниченное решение уравнения (2.2), удовлетворяющее граничным условиям

$$Z(0, y) = \varphi_1(s)$$

$$Z(1, y) = \varphi_2(s) \qquad \left(s = \frac{2}{m+2} y^{1/2(m+2)}\right) \quad \text{при } y \geqslant 0 \tag{2.3}$$

$Z(x, y) = \psi(\mu)$ на характеристике $\lambda = 0$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Здесь $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\psi(\mu)$ — заданные функции; λ, μ — характеристические координаты

$$\lambda = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{1/2(m+2)}, \qquad \mu = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{1/2(m+2)}$$

В дальнейшем, для облегчения выкладок, будем считать, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \psi(0) = 0$. Такое предположение не ограничивает общности рассуждений, поскольку вместо $Z(x, y)$ можно рассматривать решение вида

$$Z(x, y) - [Z(1, 0) - Z(0, 0)]\, x - Z(0, 0)$$

При переходе через линию параболичности $y = 0$ должно выполняться условие

$$Z_y(x, +0) = \operatorname{sgn} m\, Z_y(x, -0) \tag{2.4}$$

В случае $m = -1/2$ соотношение (2.4) вытекает из непрерывности величины $\delta\psi$, при переходе через звуковую линию, а при $m = 1$ представляет собой обычное условие Трикоми [12].

Кроме того, производная $Z_y(x, y)$ должна быть ограничена в области решения, поскольку $\delta\psi$ ограничена в D.

§ 3. Решение в эллиптической области. Пусть значение производной $Z_y(x, 0) = \nu(x)$ известно. Поставим следующую краевую задачу в эллиптической плоскости: найти решение уравнения (2.2), принимающее в полуполосе D^+ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0)$ краевые значения

$$Z(0, y) = \varphi_1(s), \quad Z(1, y) = \varphi_2(s), \quad Z_y(x, 0) = \nu(x) \tag{3.1}$$

Для построения функции $Z(x, y)$ воспользуемся частными решениями уравнения (2.2) вида

$$s^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(s)\, e^{\pm x}, \qquad (x^2 + s^2)^{-\beta} \qquad \left(\beta = \frac{m}{2(m+2)}\right)$$

Здесь $J_\nu(s)$ — функция Бесселя порядка ν.

Рассмотрим выражение

$$Z(x, y) = s^{1/2-\beta} \int_0^\infty J_{\beta-1/2}(ts)\, [a_1(t)\, e^{tx} + a_2(t)\, e^{-tx}]\, dt + \int_0^1 b(t)\, V(x, y; t)\, dt \tag{3.2}$$

$$V(x, y; t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{[(2n + x - t)^2 + s^2]^{-\beta} - [(2n - x - t)^2 + s^2]^{-\beta}\}$$

Функция $Z(x, y)$ будет решением уравнения (2.2) при любых $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$ и удовлетворяет условиям

$$Z(0, y) = s^{1/2-\beta} \int_0^\infty J_{\beta-1/2}(ts)\,[a_1(t) + a_2(t)]\,dt$$

$$Z(1, y) = s^{1/2-\beta} \int_0^\infty J_{\beta-1/2}(ts)\,[a_1(t)\,e^t + a_2(t)\,e^{-t}]\,dt \tag{3.3}$$

$$Z_y(x, 0) = -\frac{b(x)}{k}, \qquad k = [2(1-2\beta)]^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{4\pi\Gamma(2\beta)}$$

Сравнивая выражения (3.1), (3.3) и используя формулу обращения для интегрального преобразования Ганкеля, находим

$$a_1(t)\,e^{tx} + a_2(t)\,e^{-tx} = \frac{t\,\mathrm{sh}\,t(1-x)}{\mathrm{sh}\,t}\int_0^\infty \varphi_1(\lambda)\,\lambda^{\beta+1/2} J_{\beta-1/2}(t\lambda)\,d\lambda +$$

$$+\frac{t\,\mathrm{sh}\,tx}{\mathrm{sh}\,t}\int_0^\infty \varphi_2(\lambda)\,\lambda^{\beta+1/2} J_{\beta-1/2}(t\lambda)\,d\lambda, \qquad b(t) = -k\nu(t) \tag{3.4}$$

Подставляя соотношения (3.4) в (3.2) и изменяя порядок интегрирования, получим

$$Z(x, y) = \int_0^\infty [\varphi_1(t)\,U(x, y; t) + \varphi_2(t)\,U(1-x, y; t)]\,dt - k\int_0^1 \nu(t)\,V(x, y; t)\,dt \tag{3.5}$$

$$U(x, y; t) = s^{1/2-\beta}\,t^{\beta+1/2}\int_0^\infty \frac{\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda(1-x)}{\mathrm{sh}\,\lambda} J_{\beta-1/2}(\lambda t)\,J_{\beta-1/2}(\lambda s)\,d\lambda \tag{3.6}$$

Пусть $Z(x, 0) = \tau(x)$, тогда из формулы (3.5) имеем

$$\tau(x) = -k\int_0^1 \nu(t)\,V(x, 0; t)\,dt + \Phi(x) \tag{3.7}$$

$$\Phi(x) = \int_0^\infty [\varphi_1(t)\,U(x, 0; t) + \varphi_2(t)\,U(1-x, 0; t)]\,dt \tag{3.8}$$

Доопределим $\nu(x)$ как нечетную периодическую функцию в интервале $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$, тогда соотношение (3.7) можно представить в виде

$$\tau(x) = -k\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(t)\,|x-t|^{-2\beta} + \Phi(x) \tag{3.9}$$

В дальнейшем потребуется значение производной $\Phi'(0)$. Из формул (3.8), (3.6) получаем

$$\Phi'(0) = \int_0^\infty [\varphi_1(t)\,U_1(t) - \varphi_2(t)\,U_2(t)]\,dt \tag{3.10}$$

$$U_1(t) = \lim_{x\to 0} U_x(x, 0; t) = -\frac{2^{1/2-\beta}\,t^{1/2+\beta}}{\Gamma(\beta+1/2)}\int_0^\infty \lambda^{\beta+3/2}\,\mathrm{cth}\,\lambda J_{\beta-1/2}(\lambda t)\,d\lambda$$

$$U_2(t) = \lim_{x\to 1} U_x(x, 0; t) = -\frac{2^{1/2-\beta}\,t^{1/2+\beta}}{\Gamma(\beta+1/2)}\int_0^\infty \frac{\lambda^{\beta+3/2}}{\mathrm{sh}\,\lambda} J_{\beta-1/2}(\lambda t)\,d\lambda$$

§ 4. Решение в гиперболической области. Рассмотрим следующую задачу на гиперболической полуплоскости: найти решение уравнения (2.2), справедливое в характеристическом треугольнике D^- ($\lambda = 0$, $\lambda = \mu$, $\mu = 1$) и удовлетворяющее условиям

$$Z(0, \mu) = \psi(\mu), \quad Z(0, 0) = 0, \quad \lim_{y \to 0} Z_y(\lambda, \mu) = \nu(x)$$

Удобная форма такого решения найдена в работе [13] (см. гл. 5, формулы (4.15), (4.16), (4.25))

$$Z(\lambda, \mu) = 2k \sin \pi\beta \int_0^\lambda \frac{\nu(\tau)\, d\tau}{[(\mu - \tau)(\lambda - \tau)]^\beta} + \frac{2\cos \pi\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\lambda \frac{\Psi(\tau)\, d\tau}{[(\mu - \tau)(\lambda - \tau)]^\beta} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_\lambda^\mu \frac{\Psi(\tau)\, d\tau}{[(\mu - \tau)(\tau - \lambda)]^\beta}, \qquad \Psi(\tau) = \tau^\beta D^{1-\beta} \psi(\tau) \tag{4.1}$$

Здесь $D^\alpha f(x)$ — интеграл дробного порядка α от $f(x)$, если $\alpha < 0$

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{1+\alpha}}$$

или производная дробного порядка α от $f(x)$, если $\alpha > 0$

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} D^{\alpha - n} f(x) \qquad (n - 1 < \alpha < n)$$

Формула (4.1) была получена [13] для случая $-1/2 < m < 0$, но она справедлива и при $m > 0$.

На основании (4.1) можно вычислить величину

$$Z_y(\lambda, \mu) = [2(1 - 2\beta)]^{-2\beta} (\mu - \lambda)^{2\beta} (Z_\lambda - Z_\mu)$$

Введем операторы

$$I_1[\lambda, \mu; f(\tau)] = (\mu - \lambda)^{1+2\beta} \int_0^\lambda \frac{f(\tau)\, d\tau}{[(\mu - \tau)(\lambda - \tau)]^{1+\beta}} \tag{4.2}$$

$$I_2[\lambda, \mu; f(\tau)] = (\mu - \lambda)^{1+2\beta} \int_\lambda^\mu \frac{f(\tau)\, d\tau}{[(\mu - \tau)(\tau - \lambda)]^{1+\beta}}$$

Тогда

$$Z_y(\lambda, \mu) = k_1 I_1[\lambda, \mu; \nu(\tau)] + k_2 \{2\cos \pi\beta I_1[\lambda, \mu; \Psi(\tau)] - I_2[\lambda, \mu; \Psi(\tau)]\}$$

$$k_1 = -\frac{\beta\Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma(2\beta)} \sin \pi\beta, \qquad k_2 = \frac{k_1 \Gamma(\beta)}{2\pi k} \tag{4.3}$$

Если $f(\tau) = \tau^\alpha$, то интегралы (4.2) будут гипергеометрическими. Выполнив подстановку $\tau = \lambda t$ и соответственно $\tau = \mu - (\mu - \lambda) t$, найдем

$$I_1[\lambda, \mu; \tau^\alpha] = B(1 + \alpha, -\beta) \mu^\beta \lambda^{\alpha - \beta} F(-\beta, \alpha - 2\beta; 1 - \beta + \alpha; \lambda/\mu)$$

$$\begin{aligned} I_2[\lambda, \mu; \tau^\alpha] &= B(-\beta, -\beta) \mu^\alpha F(-\alpha, -\beta; -2\beta; 1 - \lambda/\mu) = \\ &= B(\beta - \alpha, -\beta) \mu^\beta \lambda^{\alpha - \beta} F(-\beta, \alpha - 2\beta; 1 - \beta + \alpha; \lambda/\mu) + \\ &+ B(\alpha - \beta, -\beta) \mu^\alpha F(-\beta, -\alpha; 1 + \beta - \alpha; \lambda/\mu) = \\ &= \sin \pi\alpha \csc[\pi(\alpha - \beta)] I_1[\lambda, \mu; \tau^\alpha] + B(\alpha - \beta, -\beta) \mu^\alpha [1 + O(\lambda/\mu)] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Пусть $\psi''(\tau)$ ограничена и интегрируема в интервале (0, 1), тогда при $-\frac{1}{2} < \beta < 0$ после несложных преобразований получаем

$$\Psi(\tau) = \tau^\beta \frac{d^2}{d\tau^2} D^{-1-\beta}\psi(\tau) = \frac{\psi'(0)\,\tau^{2\beta}}{\Gamma(1+\beta)} + \tau^\beta D^{-1-\beta}\psi''(\tau) = c\tau^{2\beta} + O(\tau^{1+2\beta}) \quad (4.5)$$

Соотношения (4.4), (4.5) показывают, что $I_i[\lambda, \mu; \Psi(\tau)]$ ($i = 1, 2$) непрерывны и ограничены в области D^-, за исключением характеристики $\lambda = 0$, где они обращаются в бесконечность, как λ^β. При $\alpha = 2\beta$ имеем

$$\sin \pi\alpha \csc [\pi(\alpha - \beta)] = 2 \cos \pi\beta$$

Поэтому выражение, стоящее в фигурных скобках равенства (4.4), не содержит членов с отрицательными степенями λ и является непрерывной, ограниченной функцией во всей области D^-.

Таким образом, если $\nu(x)$ непрерывная, ограниченная функция в интервале [0, 1], то $Z_y(\lambda, \mu)$ непрерывна и ограничена в D^-, включая границы.

Пусть $y = 0$ ($\lambda = \mu = x$), $Z(\lambda, \mu) = \tau(x)$. Тогда формула (4.1) принимает вид

$$\tau(x) = k_3 D^{2\beta-1}\nu(x) + G(x) \quad (4.6)$$

$$k_3 = 2k \sin \pi\beta\Gamma(1-2\beta), \qquad G(x) = \frac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} D^{2\beta-1}\Psi(x)$$

§ 5. Сведение краевой задачи к сингулярному интегральному уравнению. Сравнивая выражения для $\tau(x)$ из формул (4.6) и (3.9), а также учитывая условие (2.4), получим уравнение для определения $\nu(x)$

$$D^{2\beta-1}\nu(x) + k_4 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(t)\,|x-t|^{-2\beta}\,dt = k_5\varphi(x) \quad (5.1)$$

$$k_4 = \frac{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta}{\pi\,\mathrm{sgn}\,\beta}, \qquad k_5 = \frac{k_4}{k}, \qquad \varphi(x) = \Phi(x) - G(x)$$

Применим к соотношению (5.1) оператор $D^{1-2\beta}$. Учитывая, что $D^\alpha D^{-\alpha} f(x) = f(x)$ и вычисляя выражение (см. [13], гл. V, § 6)

$$D^{1-2\beta}\int_a^b f(t)\,|x-t|^{-2\beta}\,dt = \frac{\pi \operatorname{tg}\pi\beta}{\Gamma(2\beta)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_a^b \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta} \frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

получим

$$\nu(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta} \frac{\nu(t)\,dt}{t-x} = g(x) \quad (5.2)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\cos\pi\beta}{\pi(\mathrm{sgn}\,\beta + \sin\pi\beta)}, \qquad g(x) = \mu D^{1-2\beta}\varphi(x), \qquad \mu = \frac{\lambda\Gamma(2\beta)}{k}$$

Положим $\nu(x) = x^{2\beta}\chi(x)$, $g(x) = x^{2\beta}f(x)$, тогда в силу периодичности функции $\nu(x)$ получим из (5.2)

$$\chi(x) + \lambda \int_0^1 \chi(t) K(x, t)\, dt = f(x) \tag{5.3}$$

$$K(x, t) = \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{t}{2n+t}\right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x}\right) - \left(\frac{t}{2n-t}\right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n-t+x} + \frac{1}{2n-t-x}\right) \right]$$

Таким образом, решение краевой задачи (2.2), (2.3), (2.5) будет построено, если удастся найти функцию $\chi(x)$, удовлетворяющую сингулярному интегральному уравнению (5.3), с ядром типа Коши.

Уравнение (5.3) будем решать способом, предложенным в работе [14] для случая, когда (2.2) является уравнением Трикоми ($\beta = {}^1/_6$).

Запишем уравнение (5.3) в форме

$$\chi(x) + \lambda \int_0^1 \chi(t) K_0(x, t)\, dt = r(x) \tag{5.4}$$

$$r(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 \chi(t)\, \Delta K(x, t)\, dt, \qquad \Delta K(x, t) = K(x, t) - K_0(x, t)$$

$$K_0(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x}\right)$$

Используя разложение $\operatorname{ctg} x$ на элементарные дроби, представим $K_0(x, t)$ как

$$K_0(x, t) = {}^1/_2\pi \left[\operatorname{ctg} {}^1/_2\pi (t-x) + \operatorname{ctg} {}^1/_2\pi (t+x)\right] =$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} x\right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} t\right)$$

Замена переменных

$$y = \sin^2 \frac{\pi}{2} x, \qquad \tau = \sin^2 \frac{\pi}{2} t, \qquad \chi(x) = \mu(y), \qquad r(x) = \psi(y) \tag{5.5}$$

позволяет свести (5.4) к характеристическому уравнению

$$\mu(y) + \lambda \int_0^1 \frac{\mu(\tau)\, d\tau}{\tau - y} = \psi(y) \tag{5.6}$$

Применяя теорию сингулярных интегральных уравнений [15], запишем решение уравнения (5.6):

$$\mu(y) = \cos^2 \pi\theta \left\{ \psi(y) - \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-y)\tau}{(1-\tau) y}\right]^{\theta} \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{\tau - y} \right\} + A y^{-1-\theta} (1-y)^{\theta} \tag{5.7}$$

$$\theta = -\pi^{-1} \operatorname{arctg} \pi\lambda = {}^1/_4 (2\beta - \operatorname{sgn} \beta), \qquad A = \mathrm{const}$$

Возвращаясь к прежним переменным (5.5), получим

$$\chi(x) = N[r(x)] = \cos^2 \pi\theta \left[r(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi t}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi x}\right)^{2\theta} K_0(x, t)\, r(t)\, dt \right] \tag{5.8}$$

Постоянная A из формулы (5.7) здесь выбрана равной нулю, чтобы $\nu(x)$ была интегрируема в интервале [0, 1]

Введем оператор

$$P[\chi(x)] = f(x) - \lambda \int_0^1 \chi(t)\, \Delta K(x, t)\, dt \tag{5.9}$$

Тогда соотношение (5.8) запишется в виде

$$\chi(x) = N[P[\chi(x)]] \tag{5.10}$$

Из (5.10) можно получить уравнение Фредгольма второго рода для $\chi(x)$

$$\begin{gathered}\chi(x) + \lambda \int_0^1 \chi(t)\, \Gamma(x, t)\, dt = N[f(x)] \\ \Gamma(x, t) = N[\Delta K(x, t)] = \\ = \cos^2 \pi\theta \left[\Delta K(x, t) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2\, \pi\tau}{\operatorname{tg} {}^1/_2\, \pi x}\right)^{2\theta} K_0(x, \tau)\, \Delta K(\tau, t)\, d\tau\right]\end{gathered} \tag{5.11}$$

Ядро $\Gamma(x, t)$ имеет сложную структуру, поэтому для определения $\chi(x)$ применим метод последовательных приближений.

Определим последовательность функций

$$\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \qquad (\chi_n(x) \in L_2(0, 1))$$

при помощи соотношений [14]

$$\chi_1(x) = N[P[0]] = N[f(x)], \quad \chi_n(x) = N[P[\chi_{n-1}(x)]] \quad (n = 2, 3 \ldots) \tag{5.12}$$

Можно показать, что последовательность (5.12) сходится к решению уравнения (5.11).

Из функционального анализа [16] известно, что для сходимости последовательности $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n, m \to \infty} \|\chi_n(x) - \chi_m(x)\| = 0$$

Здесь $\|f(x)\|$ — норма функции $f(x)$

$$\|f(x)\| = \left[\int_0^1 f^2(t)\, dt\right]^{1/2}$$

Составим выражение

$$\begin{gathered}\chi_n(x) - \chi_{n-1}(x) = -\lambda \int_0^1 [\chi_{n-1}(t) - \chi_{n-2}(t)]\, \Gamma(x, t)\, dt = \\ = -\lambda N \int_0^1 [\chi_{n-1}(t) - \chi_{n-2}(t)]\, \Delta K(x, t)\, dt\end{gathered}$$

Отсюда

$$\|\chi_n(x) - \chi_{n-1}(x)\| \leqslant a \|\chi_{n-1}(x) - \chi_{n-2}(x)\| \leqslant a^{n-1} \|\chi_1(x)\| \tag{5.13}$$

где

$$a = |\lambda|\, \|N[1]\| \max_{0 \leqslant x,\, t \leqslant 1} |\Delta K(x, t)| \tag{5.14}$$

Считая для определенности, что $n > m$, найдем

$$\|\chi_n - \chi_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} (\chi_k - \chi_{k-1}) \right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|\chi_k - \chi_{k-1}\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \|\chi_k - \chi_{k-1}\| \quad (5.15)$$

Используя (5.14), (5.13), можно получить оценку

$$\|\chi_n(x) - \chi_{n-1}(x)\| \leqslant \frac{a^m}{1-a} \|\chi_1(x)\|$$

Таким образом, сходимость последовательности $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будет доказана, если показать, что $a < 1$.

Из формулы (5.8) имеем

$$N[1] = \cos^2 \pi\theta \left[1 - \lambda \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi t}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi x}\right)^{2\theta} K_0(x, t)\, dt\right] =$$

$$= \cos^2 \pi\theta \left\{1 - \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-y)\tau}{(1-\tau)y}\right]^{\theta} \frac{d\tau}{\tau - y}\right\} = \frac{\cos \pi\theta}{(\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi x)^{2\theta}}$$

Сингулярный интеграл в последнем выражении является табличным (см. [17], формула 3.228.1). Зная функцию $N[1]$, вычислим ее норму

$$\|N[1]\| = \cos \pi\theta \left[\int_0^1 \frac{dt}{(\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi t)^{4\theta}}\right]^{1/2} = \frac{\cos \pi\theta}{(\cos 2\pi\theta)^{1/2}} \quad (5.16)$$

Рассмотрим выражение

$$\Delta K(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{(2n-t)^{1-2\beta}[(2n-t)^{2\beta} - t^{2\beta}]}{(2n-t)^2 - x^2} - \frac{(2n+t)^{1-2\beta}[(2n+t)^{2\beta} - t^{2\beta}]}{(2n+t)^2 - x^2}\right\}$$

Нетрудно убедиться, что $\Delta K(x, t)$ — непрерывная, ограниченная функция в квадрате $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$, причем $\Delta K(x, 0) = \Delta K(x, 1) = 0$, $|\Delta K(x, t)|$ достигает своего максимума на линии $x = 1$ в точке $t = 1$

$$\max_{0 \leqslant x, t \leqslant 1} |\Delta K(x, t)| = \lim_{t \to 1} |\Delta K(1, t)| = 4|\beta|, \qquad 0 \leqslant x, t \leqslant 1 \quad (5.17)$$

Формулы (5.15), (5.16), (5.17) позволяют вычислить величину a

$$a = 4|\lambda\beta| \frac{\cos \pi\theta}{(\cos 2\pi\theta)^{1/2}} = 2(1 - 4\theta) \frac{\sin \pi\theta}{\pi (\cos 2\pi\theta)^{1/2}}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant {}^1/_4$$

Из последнего соотношения легко проверить, что $a < 1$. Следовательно, последовательность (5.12) сходится к решению уравнения (5.11).

В первом приближении для $\nu(x)$ имеем выражение

$$\nu_1(x) = \cos^2 \pi\theta \left\{g(x) - \frac{\lambda\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta} \left(\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi t}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi x}\right)^{\alpha} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}(t - x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}(t + x)\right] g(t)\, dt\right\} \qquad \alpha = \beta - {}^1/_2 \operatorname{sgn} \beta \quad (5.18)$$

При $0 > \beta > {}^1/_2$ функция $\nu_1(x)$ обращается в бесконечность порядка ${}^1/_2 - \beta$ в точке $x = 1$. В случае $-{}^1/_2 < \beta < 0$ имеем

$$g(x) = \mu D^{1-2\beta}\varphi(x) = \mu D^{1-2\beta}[\Phi(x) - G(x)] = \mu\left[D^{1-2\beta}\Phi(x) - \frac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}\Psi(x)\right]$$

Используя формулу

$$D^{1-2\beta}\Phi(x) = \frac{\Phi'(0)}{\Gamma(1+2\beta)}x^{2\beta} + D^{-1-2\beta}\Phi''(x)$$

и соотношение (4.5), получим

$$g(x) = \frac{\mu}{\Gamma(1+2\beta)}[\Phi'(0) - 2\psi'(0)]x^{2\beta} + O(x^{1+2\beta}) \qquad (5.19)$$

Отсюда, для того чтобы $g(x)$ была ограничена в точке $x = 0$, должно выполняться условие

$$\Phi'(0) - 2\psi'(0) = 0 \qquad (5.20)$$

Величина $\Phi'(0)$ определена формулой (3.10). Сингулярный интеграл из (5.18) при $-{}^1/_2 < \beta < 0$ можно представить в виде

$$2x^{\beta-{}^1/_2}\int_0^1 t^{-2\beta}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t\right)^{\beta-{}^1/_2} g(t)\,dt + O(x^{{}^1/_2+\beta})$$

Он будет ограничен в точке $x = 0$, если

$$\int_0^1 t^{-2\beta}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t\right)^{\beta-{}^1/_2} g(t)\,dt = 0 \qquad (5.21)$$

Таким образом, если краевые значения (2.3) удовлетворяют условиям (5.20), (5.21), то $\nu(x) \in C[0, 1]$. Из формулы (4.3) следует, что в этом случае функция $Z_y(x, y)$ ограничена в области решения задачи.

Следовательно, величина $\delta\psi$ будет непрерывна и ограничена в области течения.

Соотношения (5.20), (5.21) служат для определения величины δq или δc. В то же время они не накладывают ограничений на форму границы e_2, поскольку последняя определена с точностью до сдвига относительно d_2 в направлении оси x. Иначе говоря, $\delta n = \delta n(x + \varepsilon)$. Постоянная ε определяется наряду с δq, δc из условий (5.20), (5.21).

Автор благодарит С. В. Фальковича за руководство и постоянное внимание.

Поступила 1 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений. В сб. теор. работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.
2. Франкль Ф. И. О прямой задаче теории сопла Лаваля. Уч. зап. Кабард.-Балкарск. ун-та, 1959, вып. 3.
3. Франкль Ф. И. Обобщение задачи Трикоми и применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля. Уч. зап. Кабард.-Балкарск. ун-та, 1959, вып. 3.
4. Франкль Ф. И. Некоторые вопросы существования и единственности теории околозвуковых течений. Изв. вузов. Матем., 1960, № 5.

5. Франкль Ф. И. О существовании слабого решения прямой задачи теории обтекания профиля звуковым потоком в первом приближении. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 4.
6. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О вариации расхода газа в расчетном режиме работы сопла Лаваля. Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 2.
7. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР. Матем., 1945, т. 9, № 5.
8. Франкль Ф. И. Теорема единственности решения одной краевой задачи для уравнения $u_{xx} + \partial/\partial y\,(u_y/y) = 0$. Изв. вузов. Матем., 1959, № 1.
9. Франкль Ф. И. Теорема существования слабого решения прямой задачи теории плоскопараллельного сопла Лаваля в первом приближении. Изв. вузов. Матем, 1959, № 6.
10. Гудерлей Г. Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
11. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
12. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
13. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., «Наука», 1970.
14. Севостьянов Г. Д. Плоские околозвуковые течения газа, приводящие к краевой задаче Трикоми для полуполосы. Сб. «Трансзвуковые течения газа». Саратов, Изд-во Сарат. ун-та, 1964.
15. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. изд. 2, М., Физматгиз, 1962.
16. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4, М., Физматгиз, 1962.