

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФРАКЦИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

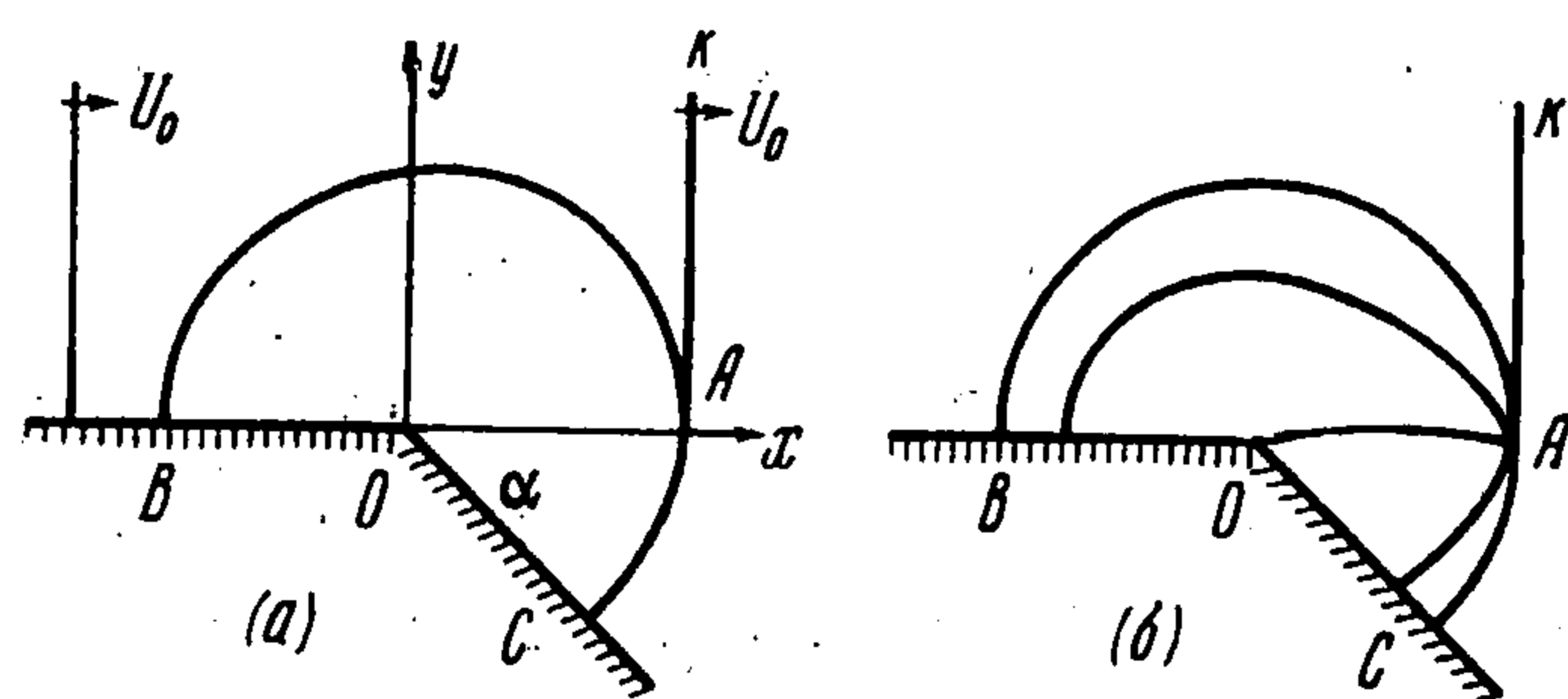
Л. И. Могилевич, Г. П. Шиндяпин

(Саратов)

Рассматривается нелинейная задача дифракции слабой ударной волны около жесткой стенки с изломом. Решение задачи в линейной постановке приводит к появлению особенности в точке пересечения иницирующего и дифракционного фронтов, которую не устраняют последующие приближения. Известная попытка Де Местра [1] устранить эту особенность приводит к значительным математическим трудностям, которые до конца не удается преодолеть.

В данной работе, применяя метод сращиваемых асимптотических разложений [2], построено равномерно пригодное решение задачи в первом приближении. В качестве внешнего решения используется решение задачи в акустической постановке [3,4]. Внутренняя задача сводится к решению нелинейной задачи теории коротких волн [5].

1. Рассмотрим распространение плоской слабой ударной волны по покоящемуся, идеальному, политропическому газу вдоль жесткой стенки



Фиг. 1

с изломом α . Систему координат выберем как показано на фиг. 1, а. Скорость распространения ударной волны U_0 определяется ее интенсивностью

$$\varepsilon = \frac{p_1 - p_0}{\kappa p_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \left[\left(\frac{U_0}{a_0} \right)^2 - 1 \right] \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.1)$$

Здесь p , a , κ — давление, скорость звука, отношение теплоемкостей газа соответственно. Индекс 0 соответствует параметрам газа перед ударной волной, индекс 1 — за ударной волной. В момент $t = 0$ ударная волна проходит точку излома стенки O . При дальнейшем распространении ударной волны, вдоль наклонной стенки OC возникают волны понижения давления, при взаимодействии с которыми фронт ударной волны AC искривляется, а давление вдоль фронта падает от значения p_1 в точке A до значения p_0 в направлении стенки. Область дифракции (возмущений) замыкается сверху границей AB , представляющей фронт волны возмущения, возникшего в точке O в момент $t = 0$.

В области дифракции $CABC$ компоненты скорости u , v , давление p , плотность ρ , энтропия S удовлетворяют уравнениям динамики (движения, неразрывности, состояния, энергии)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, & v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y &= 0 & (1.2) \\ \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= 0, & p &= p(\rho, S), & S_t + uS_x + vS_y &= 0 \end{aligned}$$

Для слабых ударных волн изменением энтропии во всей области дифракции можно пренебречь и считать течение безвихревым до порядка ε^2 включительно. Введем потенциал скорости Φ

$$\Phi_x = u, \quad \Phi_y = v$$

и запишем уравнение состояния в виде

$$\kappa P = \frac{p - p_0}{p_0} = \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa - 1 \right] \quad (1.3)$$

Отсутствие в задаче характерных размеров длины и времени позволяет ввести безразмерные независимые и зависимые переменные

$$\begin{aligned} x &= a_0 t r \cos \theta, & y &= a_0 t r \sin \theta, & \Phi &= a_0^2 t f(r, \theta) \\ u &= a_0 u^*, & v &= a_0 v^*, & a &= a_0 a^*, & p &= \rho_0 a_0^2 p^*, & \rho &= \rho_0 \rho^*, & U_0 &= a_0 U_0^* \end{aligned} \quad (1.4)$$

Используя (1.4) из уравнений движения (1.2) и (1.3), можно получить уравнение [1,6] для потенциала f

$$\begin{aligned} (1 - r^2) f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} &= (\kappa - 1) (f - r f_r) \left(f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} \right) + \\ &+ \frac{2}{r^2} f_\theta (f_\theta - r f_{r\theta}) - 2 r f_r f_{rr} + \frac{1}{r^4} f_\theta^2 f_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} f_r f_\theta f_{r\theta} + f_r^2 f_{rr} - \\ &- \frac{1}{r^3} f_r f_\theta^2 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_\theta^2 \right) \left(f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

и уравнение Бернулли

$$a^2 = (1 + \kappa P)^{\kappa - 1/\kappa} = 1 - (\kappa - 1) \left(f - r f_r + \frac{1}{2} f_r^2 + \frac{1}{2r^2} f_\theta^2 \right) \quad (1.6)$$

Индексы над переменными опущены. Сформулируем условия на границе области дифракции. На жесткой стенке BOC

$$f_\theta = 0 \quad \text{при } \vartheta = -\alpha \text{ и } \vartheta = \pi \quad (1.7)$$

На фронте возмущения AB , положение точек которого $r = r(\vartheta)$ определяется через скорость звука a_1 и нормальную составляющую скорости газа к фронту u_{1n} равенством

$$r \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = u_{1n} + a_1, \quad u_{1n} = \left(f_{1r} - \frac{r'}{r^2} f_{1\theta} \right) \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1.8)$$

имеют место условия непрерывности скорости и давления

$$f_r = f_{1r}, \quad f_\theta = f_{1\theta}, \quad P = P_1 \quad (1.9)$$

Здесь потенциал скорости f_1 и относительное избыточное давление P_1 однородного потока за фронтом ударной волны AK , согласно (1.1), имеют вид

$$f_1 = \varepsilon (c r \cos \theta - 1), \quad c = \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2} \varepsilon \right)^{-1/2}, \quad P_1 = \varepsilon \quad (1.10)$$

На фронте ударной волны AC , уравнение которого

$$r = k(\theta) \quad (1.11)$$

имеют место условия динамической совместности

$$u_n = \frac{2}{\kappa + 1} [U_0 - U_0^{-1}], \quad U_0 = k \left[1 + \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1.12)$$

$$u_\tau = 0, \quad P = \frac{P - P_0}{\kappa P_0} = \frac{2}{\kappa + 1} [U_0^2 - 1]$$

Выражая нормальную u_n и касательную u_τ компоненты скорости за фронтом ударной волны через составляющие скорости f_r и f_θ , получим из условий (1.12) дифференциальное уравнение фронта

$$\frac{2}{\kappa + 1} \left\{ k \left[1 + \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \right]^{-1} - k^{-1} \right\} = f_r \quad (1.13)$$

и условия

$$k' f_r + f_\theta = 0, \quad P = k f_r \quad (1.14)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию системы нелинейных уравнений (1.5), (1.6) с граничными условиями (1.7) — (1.9), (1.13), (1.14) и связана со значительными математическими трудностями.

2. Для слабых ударных волн при построении решения в области дифракции обычно используют [1,6] метод асимптотического разложения по малому параметру ε

$$f(r, \theta, \varepsilon) = \varepsilon f^{(1)}(r, \theta) + \varepsilon^2 f^{(2)}(r, \theta) + \dots, \quad P = \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \dots \quad (2.1)$$

получая для первых членов разложения $f^{(1)}$, $P^{(1)}$ из уравнений (1.5), (1.6) систему линейных уравнений

$$(1 - r^2) f_{rr}^{(1)} + \frac{1}{r} f_r^{(1)} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}^{(1)} = 0, \quad P^{(1)} = r f_r^{(1)} - f^{(1)} \quad (2.2)$$

В линейной постановке, рассматривая фронт ударной волны

$$r = 1 + \varepsilon k^{(1)}(\theta) + \varepsilon^2 k^{(2)}(\theta) + \dots \quad (2.3)$$

как фронт слабых возмущений ($f_r = f_\theta = 0$), получим, согласно (1.13)

$$f_r^{(1)} = \frac{4}{\kappa + 1} k^{(1)} = 0, \quad k^{(1)}(\theta) \equiv 0 \quad (2.4)$$

Граничные условия (1.7) — (1.9), (1.13), (1.14) для потенциала $f^{(1)}$ в первом приближении примут вид

$$\begin{aligned} f_\theta^{(1)} &= 0 \text{ при } 0 \leq r \leq 1, \vartheta = -\alpha, \text{ и } \vartheta = \pi \\ f_r^{(1)} &= \cos \theta, \quad f_\theta^{(1)} = -\sin \vartheta \text{ при } r = 1, 0 < \theta \leq \pi \\ f_r^{(1)} &= 0, \quad f_\theta^{(1)} = 0, \text{ при } r = 1, -\alpha \leq \theta < 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя преобразование Чаплыгина

$$\sigma = r^{-1} (1 - \sqrt{1 - r^2}) \quad (2.6)$$

и исключая $f^{(1)}$ из системы (2.2), получим уравнение Лапласа для $P^{(1)}$

$$P_{\sigma\sigma}^{(1)} + \frac{1}{\sigma} P_\sigma^{(1)} + \frac{1}{\sigma^2} P_{\theta\theta}^{(1)} = 0 \quad (2.7)$$

с граничными условиями, согласно (2.2), (2.3), (2.5)

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= 0 \quad \text{при } 0 \leq \sigma \leq 1, \theta = -\alpha \text{ и } \theta = \pi \\ P^{(1)} &= 1 \quad \text{при } \sigma = 1, 0 < \theta \leq \pi \\ P^{(1)} &= 0 \quad \text{при } \sigma = 1, -\alpha \leq \theta < 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.7) с граничными условиями (2.8) рассматривалось в ряде работ [3,4] и может быть представлено в виде [1,4]

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1-\sigma^\lambda}{1+\sigma^\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \theta \right\} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1-\sigma^\lambda}{1+\sigma^\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} (\theta + 2\alpha) \right\} \quad \lambda = \frac{\pi}{\pi + \alpha} \end{aligned} \quad (2.9)$$

При отрицательных значениях аргумента значения для арктангенсов в (2.9) берутся на другой ветви по формуле

$$\operatorname{arctg} \eta = \pi - \operatorname{arctg} (-\eta) \quad (2.10)$$

На фиг. 1, б показано качественно поле давления в области дифракции согласно решению (2.9).

В точке A ($r = 1, \theta = 0$) решение (2.9) имеет особенность: давление $P^{(1)}$ меняется скачком от значения $P^{(1)} = 0$ на AC до $P^{(1)} = 1$ на AB . Эта особенность является следствием физического дефекта акустической постановки, когда давление вдоль дифракционного фронта AC постоянно, а сам фронт представляет звуковую окружность $r = 1$.

Построение второго приближения, как показано в [1], не устраняет указанной особенности, что приводит к необходимости рассматривать задачу дифракции как задачу особых возмущений [2] для разложения (2.1).

3. Для построения решения, устраняющего особенность акустической теории в окрестности точки A , перейдем к внутренним переменным [2]

$$r = 1 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)\varepsilon^\gamma \delta, \quad \theta = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa + 1)}\varepsilon^\omega Y \quad (3.1)$$

и представим потенциал f и давление P в виде

$$f = \varepsilon^\alpha \frac{\kappa + 1}{2} F^{(1)}(\delta, Y) + \dots, \quad P = \varepsilon^\beta P^{(1)} + \dots \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1), (3.2) в систему (1.5), (1.6) и условия (1.8), (1.9), (1.13), (1.14), сравнивая порядки старших членов левой и правой частей уравнений (1.5), (1.6), получим

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \omega = \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

Для первых членов разложения (3.2) (одночленное внутреннее разложение), вводя обозначения

$$F_\delta^{(1)} = \mu, \quad F_Y^{(1)} = \nu$$

получим, согласно (1.5), (1.6), систему нелинейных уравнений

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + \nu_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = \nu_\delta, \quad P^{(1)} = \mu \quad (3.4)$$

Условия (1.8), (1.9) на границе области дифракции примут вид (фиг. 2, а)

$$\mu = 1, \nu = -Y, P^{(1)} = 1 \text{ при } \delta = 1 \quad (3.5)$$

Из (1.13), (1.14) получим уравнение фронта ударной волны $A'C'$

$$d\delta/dY = \sqrt{2\delta - \mu} \quad (3.6)$$

и условия на фронте

$$\mu = P^{(1)}, \quad \mu d\delta/dY + \nu = 0 \quad (3.7)$$

Условие Гюгонио на фронте $\mu = P^{(1)}$ выполняется автоматически, согласно третьему уравнению (3.4).

В точке A' пересечения фронта $A'C'$ с линией $A'B$, используя (3.5) — (3.7), получим

$$\mu = 1, \nu = -1, \text{ при } \delta = 1, Y = 1 \quad (3.8)$$

Отметим, что условие на стенке BOC

$$\nu = 0 \text{ при } Y = -\frac{\alpha}{V^{1/2}(\kappa + 1)\varepsilon} \text{ и } Y = \frac{\pi}{V^{1/2}(\kappa + 1)\varepsilon} \quad (3.9)$$

при значениях $\alpha \gg \varepsilon^{1/2}$ должно быть отброшено как внешнее.

Система уравнений (3.4) представляет известную систему уравнений коротких волн [5,7].

Решение для уравнения (3.4) с граничными условиями (3.5) — (3.7) будем отыскивать в виде [5]

$$\delta = -1/2 Y^2 \operatorname{tg}^2(b\mu + c) + B \sin^2(b\mu + c) + 1/2 b^{-1} \sin 2(b\mu + c) + \mu \quad (3.10)$$

$$\nu = [b^{-1} \operatorname{tg}(b\mu + c) - \mu] Y, \quad b, c, B = \text{const}$$

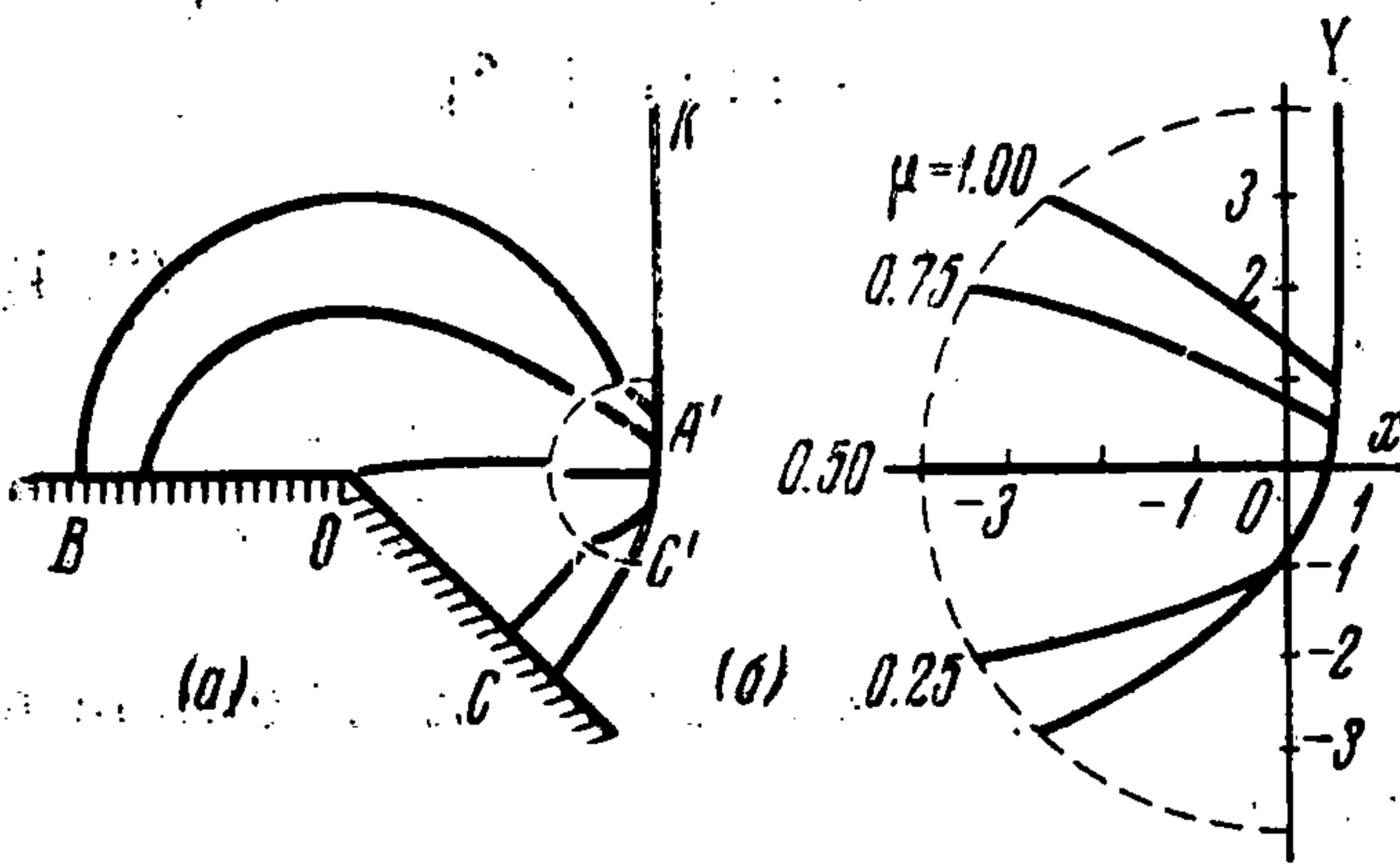
Удовлетворяя условию (3.5), получим $c = -b$.

Произвольную постоянную b определим при сращивании внешнего разложения (2.9) с внутренним разложением (3.10). Постоянная B определится при удовлетворении условия сохранения касательной составляющей (3.7) на фронте $A'C'$.

4. Следуя методу сращиваемых асимптотических разложений [2], записывая внешнее решение (2.9) во внутренних переменных (3.1) и оставляя первый член в разложении по ε (одночленное внутреннее разложение), с учетом (2.10), получим

$$P^{(1)} = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y} \quad (4.1)$$

Записывая внутреннее решение (3.10) во внешних переменных r, θ (3.1) и оставляя первый член в разложении по ε (одночленное внешнее разложе-



Фиг. 2

ние), получим, переписывая результат во внутренних переменных δ , Y , выражение

$$\mu = P^{(1)} = 1 + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y} \quad (4.2)$$

Сравнивая (4.1), (4.2), определим значение постоянной

$$b = -\pi \quad (4.3)$$

5. Дифференциальное уравнение фронта ударной волны, согласно (3.6), (3.10) (4.3), имеет вид

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{YL^2M + M \sqrt{(2BL^2 - 2\pi^{-1}LM + \mu)M^2 - Y^2L^2M^2}}{\pi Y^2L + M^3(M^2 - L^2 + 1 - 2\pi BLM)} \quad (5.1)$$

$$L = \sin \pi (1 - \mu), \quad M = \cos \pi (1 - \mu) \\ B = \text{const}$$

Интегрируя уравнение (5.1) и выстраивая фронт ударной волны от точки A' , где $\mu = 1$, $Y = 1$, получим для постоянной B , удовлетворяя условию сохранения касательной составляющей (3.7), в точке с координатой $Y = 0$, где, согласно (3.10), $\mu = 1/2$ значение $B = 0.45$.

На фиг. 2, а показана качественная картина распределения давления в области дифракции. Линии постоянного значения [давления (скорости)] вблизи фронта $A'C'$, согласно решению (3.10), построены на фиг. 2, б в

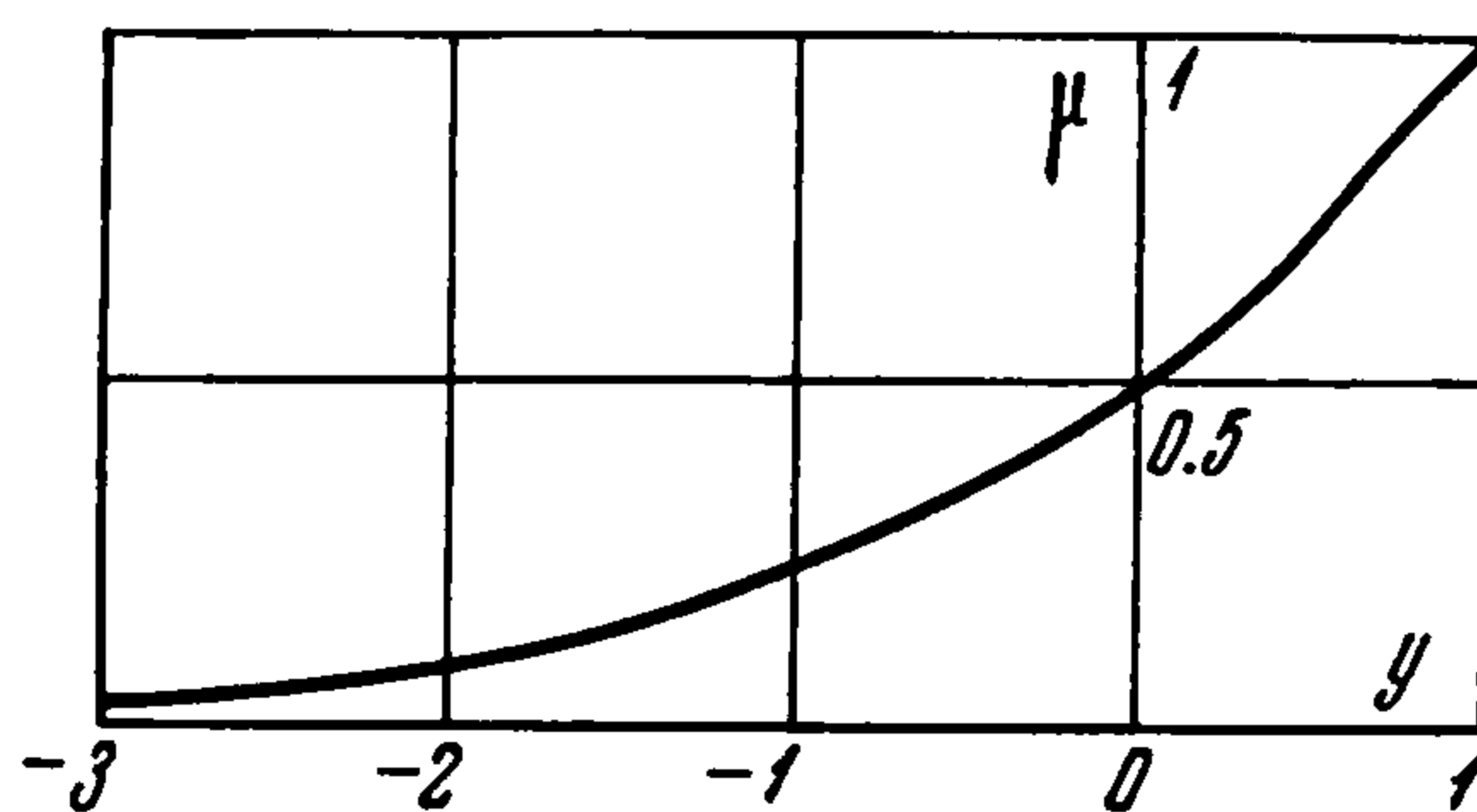
системе координат $Y = Y$, $X = \delta - 1/2 Y^2$ [7]. Распределение давления вблизи (фиг. 2, б) и вдоль фронта (фиг. 3) ударной волны $A'C'$ согласуется с распределением давления во внешней области, где течение описывается решением (2.9) и, при условии $\alpha \gg \varepsilon^{1/2}$, не зависит от угла излома стенки.

При углах $\alpha \sim 0$ ($\varepsilon^{1/2}$), когда условие $\alpha \gg \varepsilon^{1/2}$ не выполняется, решения (2.9), (3.10) не могут быть использованы. В этом случае давление вдоль фронта $A'C'$ падает до значения на стенке $p_c \geq p_0$ и граничное условие на стенке (3.9) $v = 0$ при $Y = -\alpha/\sqrt{1/2}(\kappa + 1)$ ε должно удовлетворяться уже при решении внутренней задачи (3.4) — (3.7).

В заключение заметим, что решение вида (3.10) использовалось в [8] для построения течения вблизи фронта отраженной волны в задаче об отражении ударной волны от твердой стенки с изломом. В связи со сделанными выше замечаниями авторам представляется, однако, неоправданным использование решения (3.10) в задаче об отражении [8] при малых углах излома стенки.

Авторы приносят благодарность С. В. Фальковичу за советы при обсуждении работы.

Поступила 10 XII 1970



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. De Mestre N. J. Non-linear weak shock diffraction. J. Austral. Math. Soc., 1968, vol. 8, pt. 4, p. 737—754.
 2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
 3. Соболев С. Л. Теория дифракции плоских волн. Тр. Сейсмол. ин-та, 1934, № 41.
 4. Сагомоян А. А. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. М., Изд-во Моск. ун-та, 1962.
 5. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
 6. Lighthill M. J. The shock strength in Supersonic «Conical fields». Philos. Mag., 1949, vol. 40, No 311, p. 1202—1223.
 7. Шиндяпин Г. П. О регулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
 8. Багдоев А. Г., Гургенян А. А. О двух нелинейных задачах по определению окрестностей ударных волн в жидкости. Изв. АН АрмССР, «Механика», 1968, № 4.
-