Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О РАЗРУШЕНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА, ПРИМЫКАЮЩИХ К ОБЛАСТИ ПОКОЯ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Рассматривается задача о движении в неподвижном газе плоского и пространственного поршней произвольной достаточно гладкой формы с нулевой нормальной начальной скоростью и ненулевым нормальным ускорением. Дано приближенное представление решений в окрестности криволинейных слабых разрывов, которые в начальный момент времени отрываются от поршня и распространяются по покоящемуся газу. Получены точные формулы для предельных времен существования гладких потенциальных течений в окрестности слабых разрывов в зависимости от геометрии поршня и величины задаваемого ускорения в предположении, что возникающие возмущения не догоняют слабый разрыв. Исследованы некоторые свойства течений в окрестности слабых разрывов.

1. Хорошо известно, что если в неподвижный однородный политропный газ, заполняющий полубесконечный прямолинейный канал ($x \geqslant 0$), начать в момент $t = 0$ вдвигать по закону $x = f(t)$ поршень с нулевой начальной скоростью и положительным начальным ускорением ($f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$), то гладкое решение между поршнем и слабым разрывом, распространяющимся со скоростью звука по неподвижному газу, будет существовать лишь ограниченное время [1]. Образующаяся волна сжатия будет являться волной Римана и при некотором $t = t^* > 0$ в течении возникнет ударная волна. Если бесконечные градиенты газодинамических величин появляются непосредственно на линии слабого разрыва (а так будет, например, в случае закона движения поршня $x = at^2$, $a > 0$ — ускорение постоянно), легко найти момент t^* разрушения соответствующей волны Римана

$$t^* = \frac{1}{(\gamma+1)a} = \frac{2}{(\gamma+1)|W_0|} \tag{1.1}$$

Здесь γ — показатель адиабаты в уравнении состояния газа, W_0 — ускорение поршня при $t = 0$.

Рассмотрим более общую задачу об определении времени t^* начала разрушения потенциального течения, наступающего непосредственно на поверхности слабого разрыва, и о построении приближенного решения в окрестности слабого разрыва для случаев вдвижения в газ поршней произвольной формы, когда возникающие течения являются двух- или трехмерными.

Пусть поверхность S_0 (достаточно гладкая) разделяет трехмерное пространство x_1, x_2, x_3 на две части, одна из которых заполнена покоящимся однородным политропным газом со скоростью звука $c \equiv 1$. С момента

$t=0$ поршень S_t начинает по некоторому закону вдвигаться в газ (поверхность S_0 соответствует начальному положению поршня),так, что при $t=0$ нормальная скорость движения V_n равна нулю, а нормальное ускорение W_n везде ненулевое. Ясно, что в невозмущенный газ начнет распространяться волна сжатия, ограниченная с одной стороны поверхностью поршня S_t, а с другой — поверхностью слабого разрыва R_t, двигающейся с единичной нормальной скоростью по покоящемуся газу, причем форма поверхности R_t будет определяться лишь геометрией поверхности S_0. До момента появления в течении сильных разрывов движение будет изэнтропическим и потенциальным.

Потенциал течения $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ будет удовлетворять в общем пространственном случае уравнению

$$\Phi_{tt}+2\sum_i \Phi_{x_i}\Phi_{x_it}+2\sum_{ik}(1-\delta_{ik})\Phi_{x_i}\Phi_{x_k}\Phi_{x_ix_k}-\sum_i(\Theta-\Phi_{x_i}{}^2)\Phi_{x_ix_i}=0 \tag{1.2}$$

где нижние индексы у Φ означают дифференцирование по соответствующим переменным, δ_{ik} — символ Кронекера, а

$$\Theta=c^2=\frac{1}{\varkappa}\left(M-\Phi_t-\frac{1}{2}\sum\Phi_{x_i}{}^2\right), \quad \varkappa=\frac{1}{\gamma-1}, \quad M=\mathrm{const} \tag{1.3}$$

Будем интересоваться поведением решения поставленной задачи в окрестности поверхности R_t, вдоль которой $\Phi_{x_i}=u_i=0$, здесь u_i — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$.

Замечание 1.1. Задача о примыкании нестационарных плоских и пространственных течений газа через поверхность слабого разрыва к области покоя изучалась в [2, 3]. Однако в этих работах был рассмотрен лишь случай волн разрежения (выдвижение поршней), и для построения решения в окрестности слабого разрыва привлекался только класс двойных волн. Это привело к ограничениям и на форму поверхности R_t — именно, рассматривался лишь случай, когда R_t являлись развертывающимися поверхностями в любой момент времени.

Исследуем вначале случай плоскопараллельного нестационарного движения, когда в (1.2) индексы $i, k=1, 2$. Для дальнейшего удобно перейти в (1.2) к независимым переменным t, u_1, u_2 (будем предполагать, что u_1 и u_2 функционально независимы в окрестности поверхности R_t). Такой переход легко осуществить при помощи преобразования Лежандра, вводя функцию $\Psi(u_1, u_2, t)$ по формуле

$$\Psi=x_1u_1+x_2u_2-\Phi+Mt \tag{1.4}$$

Окончательно для $\Psi(u_1, u_2, t)$ получим уравнение

$$\begin{gathered}\Psi_{tt}(\Psi_{11}\Psi_{22}-\Psi_{12}{}^2)+[\Theta-(\Psi_{1t}-u_1)^2]\Psi_{22}+\\+2(\Psi_{1t}-u_1)(\Psi_{2t}-u_2)\Psi_{12}+[\Theta-(\Psi_{2t}-u_2)^2]\Psi_{11}=0\end{gathered} \tag{1.5}$$

причем

$$\Psi_{ik} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u_i \partial u_k}, \quad \Psi_{it} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u_i \partial t}, \quad \Theta = \frac{1}{\varkappa}\left[\Psi_t - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)\right], \quad x_i = \Psi_i \tag{1.6}$$

(уравнение (1.5) ранее было получено в [4]).

Так как области покоя в плоскости годографа u_1, u_2 соответствует точка $(0, 0)$, целесообразно в (1.5), (1.6) перейти к полярным координатам $u_1 = r\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\varphi$. Тогда границе примыкания возмущенного движения к области покоя будет соответствовать в переменных r, φ линия $r = 0$. Уравнение для $\Psi(r, \varphi, t)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\Psi_{tt}(-r^{-2}\Psi_{r\varphi}^2 - r^{-4}\Psi_\varphi^2 + r^{-2}\Psi_{\varphi\varphi}\Psi_{rr} + r^{-1}\Psi_r\Psi_{rr} + 2r^{-3}\Psi_{r\varphi}\Psi_\varphi) + \\ + \varkappa^{-1}(\Psi_t - {}^1/_2 r^2)[\Psi_{rr} + r^{-1}\Psi_r + r^{-2}\Psi_{\varphi\varphi}] - [r^{-2}\Psi_{rt}^2\Psi_{\varphi\varphi} + r^{-1}\Psi_{rt}^2\Psi_r] + \\ + 2r^{-2}\Psi_{rt}\Psi_{\varphi t}\Psi_{r\varphi} - 2r^{-3}\Psi_{rt}\Psi_{\varphi t}\Psi_\varphi - r^{-2}\Psi_{\varphi t}^2\Psi_{rr} + 2([r^{-1}\Psi_{rt}\Psi_{\varphi\varphi} + \\ + \Psi_{rt}\Psi_r] - r^{-1}\Psi_{\varphi t}\Psi_{r\varphi} + r^{-2}\Psi_{\varphi t}\Psi_\varphi) - \Psi_{\varphi\varphi} - r\Psi_r = 0\end{gathered} \tag{1.7}$$

Вместо (1.6) при $i = 1, 2$ соответственно будем иметь

$$x_1 = \Psi_r\cos\varphi - r^{-1}\Psi_\varphi\sin\varphi, \qquad x_2 = \Psi_r\sin\varphi + r^{-1}\Psi_\varphi\cos\varphi \tag{1.8}$$

Соотношения (1.8) должны определять при $r = 0$ движение поверхности слабого разрыва, так что должен существовать предел $\lim r^{-1}\Psi_\varphi = \Pi(\varphi, t)$ при $r \to 0$.

Будем предполагать далее, что в окрестности поверхности R_t непрерывны все четвертые производные функции $\Psi(r, \varphi, t)$, содержащие дифференцирование дважды по каждой из независимых переменных. Такое предположение о гладкости течения в окрестности R_t реализуется в ряде конкретных течений, например в одномерных течениях, если движение поршня происходит достаточно гладко [1], в классе плоских и пространственных двойных волн [2,3]. В частности, из сделанного предположения следует, что возмущения в течении типа разрывов первых производных функций u_1, u_2, c не догоняют слабый разрыв $r = 0$.

Функцию $\Psi(r, \varphi, t)$ представим в виде

$$\Psi(r, \varphi, t) = \Psi(0, \varphi, t) + \Psi_r(0, \varphi, t)\, r + {}^1/_2 r^2\, \Psi_{rr}(r_1, \varphi, t) \tag{1.9}$$
$$0 < r_1 < r$$

Полагая $\Psi_r(0, \varphi, t) = \Gamma(\varphi, t)$, при помощи сделанных предположений получим, что $\Pi(\varphi, t) = \Gamma_\varphi$ $(\Psi_\varphi(0, \varphi, t) = 0)$. Тогда движение слабого разрыва описывается уравнениями, следующими из (1.8)

$$x_1 = \Gamma\cos\varphi - \Gamma_\varphi\sin\varphi, \qquad x_2 = \Gamma\sin\varphi + \Gamma_\varphi\cos\varphi \tag{1.10}$$

Вычисляя нормальную скорость движения слабого разрыва (1.10) (по предположению равную единице), приходим к условию $\Gamma_t = 1$ (вообще говоря, получается условие $|\Gamma_t| = 1$, но, не умаляя общности, можно рассматривать лишь случай $\Gamma_t = 1$, считая, что t принимает и отрицательные значения). Таким образом

$$\Gamma(\varphi, t) = t + f(\varphi) \tag{1.11}$$

Здесь $f(\varphi)$ — произвольная функция, при помощи которой можно при $t=0$ задать произвольно форму слабого разрыва следующим образом:

$$x_1 = f(\varphi)\cos\varphi - f'(\varphi)\sin\varphi, \qquad x_2 = f(\varphi)\sin\varphi + f'(\varphi)\cos\varphi \tag{1.12}$$

Оценим теперь порядки всех слагаемых в уравнении (1.7) в окрестности $r=0$, воспользовавшись представлением (1.9) и аналогичными представлениями для первых и вторых производных функции $\Psi(r, \varphi, t)$. Для первых производных получим

$$\Psi_\varphi = rf'(\varphi) + {}^1/_2 r^2 \Psi_{\varphi rr}(r_2, \varphi, t), \qquad \Psi_r = t + f(\varphi) + r\Psi_{rr}(r_3, \varphi, t) \tag{1.13}$$
$$\Psi_t = K_1 + r + {}^1/_2 r^2 \Psi_{rrt}(r_4, \varphi, t), \qquad K_1 = \mathrm{const}$$

(тейлоровские разложения по степеням r везде кончаются слагаемыми, содержащими производные от $\Psi(r, \varphi, t)$ с двумя дифференцированиями по r, $0 < r_k < r$). Аналогичные формулы легко получить и для вторых частных производных функции $\Psi(r, \varphi, t)$ по всем переменным (для Ψ_{rr} делать разложение не нужно). Оставляя в (1.7) слагаемые порядка $O(1)$ и пренебрегая членами порядков $o(1)$, получаем приближенное соотношение

$$\Psi_{rr}(r, \varphi, t) + (\gamma+1)(t+f+f'') - 2(t+f+f'')\Psi_{rrt}(r_5, \varphi, t) \approx 0 \tag{1.14}$$

При этом вклад в (1.14) дают лишь слагаемые из (1.7), заключенные в квадратные скобки. Полагая в (1.14)

$$r = 0, \qquad \Psi_{rr}(0, \varphi, t) = T(\varphi, t)$$

получаем уже точное дифференциальное уравнение для определения структуры $T(\varphi, t)$

$$T + (\gamma+1)(t+f+f'') - 2(t+f+f'')T_t = 0 \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) легко интегрируется, и для функции $\Psi_{rr}(0, \varphi, t)$ получаем выражение

$$\Psi_{rr}(0, \varphi, t) = C(\varphi)(t+f+f')^{1/2} + (\gamma+1)(t+f+f'') \tag{1.16}$$

где $C(\varphi)$ — произвольная функция.

Заметим, что в пространстве t, r, φ плоскость $r=0$ будет являться характеристической поверхностью для уравнения (1.7) и функция $\Psi_{rr}(0, \varphi, t)$ данными Коши при $r=0$ будет определяться неоднозначно. Функцию $C(\varphi)$ можно определить из условия задания величины нормального ускорения поршня при $t=0$. Действительно, находя из формул (1.8) производную $\partial r / \partial t$ при $r=0$, получим соотношение

$$\Psi_{rt} + \Psi_{rr}\frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad \text{при } r = 0$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \cos\varphi\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sin\varphi\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{1}{\Psi_{rr}(0, \varphi, t)} \tag{1.17}$$

Положим $\partial r / \partial t = -W(\varphi)$ при $r=0$, $t=0$. Из (1.17) следует, что $-W(\varphi)$ — величина нормального ускорения поршня при $t=0$, так как известно [3], что мгновенные линии тока возмущенного течения всегда ортогональны к поверхности слабого разрыва, двигающегося по области покоя, а вектор $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ортогонален к поверхности R_t. Таким образом, пользуясь (1.16), (1.17), получим

$$C(\varphi) = (f + f'')^{-1/2}(W^{-1}(\varphi) - (\gamma + 1)(f + f'')) \tag{1.18}$$

Для функции $\Psi(r, \varphi, t)$ в окрестности R_t будем иметь следующее приближенное представление ($\Psi_{rr}(r_1, \varphi, t)$ в (1.9) заменяем на $\Psi_{rr}(0, \varphi, t)$):

$$\Psi(r, \varphi, t) = K_0 + K_1 t + (t + f(\varphi))\, r + {}^1/_2\, [C(\varphi)(t + f + f'')^{1/2} + (\gamma + 1)(t + f + f'')]\, r^2 \qquad (K_0, K_1 = \text{const}) \tag{1.19}$$

Здесь $C(\varphi)$ согласно (1.18). При этом в физическом пространстве x_1, x_2, t течение восстанавливается по формулам

$$\begin{aligned} x_1 = {} & \{t + f(\varphi) + r\,[C(\varphi)(t + f + f'')^{1/2} + (\gamma + 1)(t + f + f'')]\}\cos\varphi - \\ & - \left\{f'(\varphi) + \frac{1}{2} r \left[C'(\varphi)(t + f + f'')^{1/2} + C(\varphi)\frac{f' + f'''}{2(t + f + f'')^{1/2}} + \right.\right. \\ & \left.\left. + (\gamma + 1)(f' + f''')\right]\right\}\sin\varphi \\ x_2 = {} & \{t + f(\varphi) + r\,[C(\varphi)(t + f + f'')^{1/2} + (\gamma + 1)(t + f + f'')]\}\sin\varphi + \\ & + \left\{f'(\varphi) + \frac{1}{2} r \left[C'(\varphi)(t + f + f'')^{1/2} + C(\varphi)\frac{f' + f'''}{2(t + f + f'')^{1/2}} + \right.\right. \\ & \left.\left. + (\gamma + 1)(f' + f''')\right]\right\}\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.20}$$

Отметим, что выражение $t + f + f'' = R(\varphi, t)$ представляет собой радиус кривизны поверхности R_t (некоторой кривой в плоскости $t = \text{const}$). Это сразу же следует из (1.20) при $r = 0$ (считаем, что $f + f'' > 0$).

Момент t^* начала разрушения потенциального течения непосредственно на R_t можно определить, находя минимальные по модулю корни уравнения $\Psi_{rr}(0, \varphi, t) = 0$ (тогда производная $\partial r / \partial t$ обращается в бесконечность). Для t^* окончательно получаем

для $t^* < 0,\ W(\varphi) > 0,\ W(\varphi)(f + f'') > 1 / (\gamma + 1)$

$$t^* = -\min_\varphi \left\{f + f'';\ \frac{1}{(\gamma + 1)^2 W(\varphi)}\left[2(\gamma + 1) - \frac{1}{W(\varphi)(f + f'')}\right]\right\} \tag{1.21}$$

во втором выражении в (1.21), по которому берется минимум;

для $t^* > 0,\ \ W(\varphi) < 0$

$$t^* = \min_\varphi \frac{-1}{(\gamma + 1)^2 W(\varphi)}\left[2(\gamma + 1) - \frac{1}{W(\varphi)(f + f'')}\right] \tag{1.22}$$

При помощи формул (1.21), (1.22) легко определить и место начала разрушения потенциального движения.

Если минимальное t^* достигается согласно (1.21) при $t^* = -\min_\varphi (f + f'')$, это соответствует обращению в нуль радиуса кривизны в некоторой точке R_t (в одномерном случае это отвечает фокусированию слабого разрыва на оси симметрии).

Рассмотрим более подробно частный случай цилиндрического поршня радиуса R_0, который начинает вдвигаться в газ с постоянным ускорением $W_0 > 0$. В соответствии с формулами (1.21), (1.22) получим:

для случая, когда газ находился внутри бесконечной цилиндрической трубы, стенки которой начинают вдвигаться в газ

$$|t^*| = \left[2(\gamma+1) - \frac{1}{W_0 R_0}\right] \frac{1}{W_0(\gamma+1)^2} \quad \text{при } W_0 R_0 > \frac{1}{\gamma+1}$$
$$|t^*| = R_0 \quad \text{при } W_0 R_0 \leqslant \frac{1}{\gamma+1} \tag{1.23}$$

для случая вдвижения цилиндрического поршня в газ, находящийся вне цилиндрической трубы радиуса R_0

$$t^* = \left[2(\gamma+1) + \frac{1}{W_0 R_0}\right] \frac{1}{W_0(\gamma+1)^2} \tag{1.24}$$

Переходя в (1.23), (1.24) к пределу при фиксированном W_0 и $R_0 \to \infty$ (это соответствует случаю, когда при $t = 0$ поверхность поршня является плоскостью), получим

$$\lim_{R_0 \to \infty} t^* = \frac{2}{(\gamma+1) W_0}$$

что согласуется с (1.1). Прибавление или вычитание в (1.23), (1.24) слагаемого $W_0^{-2} R_0^{-1} (\gamma+1)^{-2}$ дает количественную поправку в t^* на эффект цилиндричности соответственно для указанных выше случаев.

Замечание 1.2. Проделанные оценки порядков слагаемых в уравнении (1.7) позволяют получить упрощенные модельные уравнения, справедливые в окрестности поверхности R_t, в частности уравнение вида

$$r\Psi_{rr} - 2(\Psi_{\varphi\varphi} + r\Psi_r)\Psi_{rrt} \pm (\gamma+1)(\Psi_{\varphi\varphi} + r\Psi_r) = 0$$

Такие уравнения могут быть использованы как для построения приближенных решений, так и при анализе корректности постановок различных краевых задач для уравнения (1.7) с данными на R_t.

Замечание 1.3. В одномерном случае ($f(\varphi) = \text{const}$, $W(\varphi) = \text{const}$) при t, близких к t^*, область применения построенных приближенных решений (1.19) (1.20) (окрестность поверхности R_t в плоскости x_1x_2) сужается и при $t = t^*$, как это следует из (1.20), вырождается в линию. Это естественно, так как при построении приближенного решения (1.20) использовались лишь такие динамические характеристики движения поршня, как скорость и ускорение.

Для правильной передачи профилей распределения скоростей в окрестности R_t и при t, близких к t^*, необходимо учитывать динамические характеристики более высокого порядка, чем ускорение, т. е. необходимо в выражении для $\Psi(r, \varphi, t)$ учитывать член порядка $O(r^3)$. Вычислить его можно по аналогии с проделанным, предположив достаточную гладкость течения в окрестности R_t. В общем двумерном случае такое же сужение области применимости формул (1.20) происходит при t, близких к t^*, в окрестности точки плоскости x_1x_2, соответствующей точке (φ^*, t^*), в которой $\partial r/\partial t$ обращается в бесконечность.

2. Перейдем к рассмотрению движения в окрестности поверхности R_t для случая трехмерного пространства. Так же как и в плоском случае, вводя функцию Ψ (u_1, u_2, u_3, t) по формуле

$$\Psi = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 - \Phi + Mt \tag{2.1}$$

получим для Ψ уравнения

$$\Psi_{tt}\,\Delta + \sum_{ik}[2u_k\Psi_{ti} - 2u_iu_k\,(1-\delta_{ik}) + (c^2 - u_k{}^2)\,\delta_{ik} - \Psi_{ti}\Psi_{tk}]\,\Delta_{ik} = 0 \tag{2.2}$$

$$x_i = \Psi_i \tag{2.3}$$

$$\left(c^2 = \varkappa^{-1}\left[\Psi_t - \frac{1}{2}(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2)\right]\right) \tag{2.4}$$

$$\Delta = \det\|\Psi_{\mu\nu}\| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad \Delta_{ik} = (-1)^{i+k}\begin{vmatrix}\Psi_{mp} & \Psi_{np}\\ \Psi_{mq} & \Psi_{nq}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m, n \neq k; & m < n\\ p, q \neq i; & p < q\end{pmatrix}$$

Вводя полярные координаты

$$u_1 = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad u_2 = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad u_3 = r\cos\theta$$

уравнения (2.3) запишем в виде

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Psi_r\cos\varphi\sin\theta - \Psi_\varphi\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} + \Psi_\theta\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r}\\
x_2 &= \Psi_r\sin\varphi\sin\theta + \Psi_\varphi\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} + \Psi_\theta\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}\\
x_3 &= \Psi_r\cos\theta - \Psi_\theta\frac{\sin\theta}{r}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Чтобы уравнения (2.5) при $r = 0$ определяли движение поверхности слабого разрыва R_t, так же как и в плоском случае, должны существовать пределы

$$\lim_{r\to 0} r^{-1}\Psi_\varphi = \Gamma_\varphi(\varphi, \theta, t), \qquad \lim_{r\to 0} r^{-1}\Psi_\theta = \Gamma_\theta(\varphi, \theta, t)$$

где

$$\Gamma(\varphi, \theta, t) = \Psi_r(0, \varphi, \theta, t)$$

Сделав далее предположение о непрерывности всех четвертых производных функции Ψ (r, φ, θ, t), содержащих дифференцирование дважды по любому аргументу, по аналогии с п. 1, получим, что $\Gamma_t = 1$, $\Gamma = t + P(\varphi, \theta)$ где $P(\varphi, \theta)$ — произвольная функция, определяющая при $t = 0$ форму поверхности S_0

$$\Psi(r, \varphi, \theta, t) = \Psi(0, \varphi, \theta, t) + r\Gamma + \frac{r^2}{2}\Psi_{rr}(r^\circ, \varphi, \theta, t) \tag{2.6}$$

$$(0 < r^\circ < r)$$

Движение поверхности R_t определяется из уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 &= (t + P(\varphi, \theta))\cos\varphi\sin\theta - P_\varphi\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + P_\theta\cos\varphi\cos\theta\\
x_2 &= (t + P(\varphi, \theta))\sin\varphi\sin\theta + P_\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + P_\theta\sin\varphi\cos\theta\\
x_3 &= (t + P(\varphi, \theta))\cos\theta - P_\theta\sin\theta
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Для построения приближенного решения в окрестности R_t и нахождения $\Psi_{rr}(0, \varphi, \theta, t)$ можно было бы действовать точно так же, как и в п. 1, однако этот путь весьма громоздок. Оказывается, что функцию $\Psi_{rr}(0, \varphi, \theta, t)$ легко найти, используя результаты [3], относящиеся к исследованию распространения величины слабого разрыва вдоль бихарактеристик, покрывающих характеристическую поверхность R_t.

Для скачков выводящих производных функций u_i, c на поверхности R_t справедливо соотношение [3]

$$-\left(\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial u_2}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial u_3}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial c}{\partial t}\right]\right) = \sigma \mathbf{l} \tag{2.8}$$

где $\mathbf{l}$ — правый нуль-вектор характеристической матрицы системы уравнений газовой динамики, символ $[\partial f / \partial t]$ означает разность предельных значений производных $\partial f / \partial t$ по обе стороны R_t, а σ — некоторая скалярная функция, которая вдоль фиксированной бихарактеристики определяется из обыкновенного дифференциального уравнения «переноса» скачков выводящих производных.

Как показано в [3], бихарактеристики в случае движения R_t по области покоя являются прямыми, вдоль фиксированной бихарактеристики ($\varphi =$ $=$ const, $\theta =$ const) σ имеет вид

$$\sigma = \{\sqrt{t + C_1}\sqrt{t + C_2}\,[(\gamma + 1)\ln(\sqrt{t + C_1} + \sqrt{t + C_2}) + C_3]\}^{-1} \tag{2.9}$$

за параметр на бихарактеристике выбрано время).

Здесь $t + C_1$, $t + C_2$ являются радиусами кривизны главных нормальных сечений поверхности R_t, а C_3 — произвольная постоянная. В качестве $\mathbf{l}$ можно взять

$$\mathbf{l} = (\cos\varphi \sin\theta,\ \sin\varphi \sin\theta,\ \cos\theta,\ {}^1/_2\,(\gamma - 1)) \tag{2.10}$$

Находя при помощи (2.8), (2.10) производную $\partial r/\partial t$ при $r = 0$ в возмущенном течении, получим

$$\partial r/\partial t = -\sigma \quad \text{при} \quad r = 0 \tag{2.11}$$

С другой стороны, находя $\partial r / \partial t\,(r = 0)$ из (2.5) при помощи сделанных предположений относительно функции Ψ, получим

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{1}{\Psi_{rr}(0, \varphi, \theta, t)} \tag{2.12}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\Psi_{rr}(0, \varphi, \theta, t) = \sqrt{t + R_1(\varphi, \theta)}\sqrt{t + R_2(\varphi, \theta)}\,[(\gamma + 1)\times \\ \times \ln(\sqrt{t + R_1(\varphi, \theta)} + \sqrt{t + R_2(\varphi, \theta)}) + C_3(\varphi, \theta)]\end{aligned} \tag{2.13}$$

где $R_1(\varphi, \theta)$ и $R_2(\varphi, \theta)$ — радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности S_0, которые легко найти, если задана функция $P(\varphi, \theta)$, а $C_3(\varphi, \theta)$ — произвольная функция. Так же как и в п. 1, ее можно выразить через величину нормального ускорения $W(\varphi, \theta)$ поверхности S_0 при $t = 0$.

Окончательно получим следующее приближенное представление для функции Ψ в окрестности R_t:

$$\Psi(r, \varphi, \theta, t) = K_0 + K_1 t + (t + P(\varphi, \theta)) r + {}^1/_2 r^2 \sqrt{t + R_1(\varphi, \theta)} \times$$
$$\times \sqrt{t + R_2(\varphi, \theta)} \left[(\gamma + 1) \ln\left(\sqrt{t + R_1(\varphi, \theta)} + \sqrt{t + R_2(\varphi, \theta)}\right) + C(\varphi, \theta)\right] \tag{2.14}$$

Формулы для перехода к переменным x_i, t таковы

$$x_1 = (t + P + rL)\cos\varphi\sin\theta - (\Phi_\varphi + {}^1/_2 rL_\varphi)\sin\varphi/\sin\theta +$$
$$+ (\Phi_\theta + {}^1/_2 rL_\theta)\cos\varphi\cos\theta$$
$$x_2 = (t + P + rL)\sin\varphi\sin\theta + (\Phi_\varphi + {}^1/_2 rL_\varphi)\cos\varphi/\sin\theta +$$
$$+ (\Phi_\theta + {}^1/_2 rL_\theta)\sin\varphi\cos\theta \tag{2.15}$$
$$x_3 = (t + P + rL)\cos\theta - (\Phi_\theta + {}^1/_2 rL_\theta)\sin\theta$$

где

$$L(t, \varphi, \theta) = \Psi_{rr}(0, \varphi, \theta, t), \qquad C(\varphi, \theta) = \frac{1}{W\sqrt{R_1 R_2}} - (\gamma+1)\ln\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right) \tag{2.16}$$

Находя минимальные корни уравнения $L(t^*, \varphi, \theta) = 0$, для t^* получим

$$t^* = -\min_{\varphi,\theta}\{R_1(\varphi, \theta), R_2(\varphi, \theta), -Q(\varphi, \theta)\} \tag{2.17}$$

$$Q(\varphi, \theta) = \frac{2}{K^2}\operatorname{sh}\frac{K}{(\gamma+1)W}\left[H\operatorname{sh}\frac{K}{(\gamma+1)W} - K\operatorname{ch}\frac{K}{(\gamma+1)W}\right] \tag{2.18}$$

для $t^* < 0$, $W(\varphi, \theta) > 0$, при этом $K = 1/\sqrt{R_1 R_2}$, $H = \frac{1}{2}(1/R_1 + 1/R_2)$

Здесь K — гауссова кривизна, H — средняя кривизна поверхности S_0. Предполагается, что, когда по (2.17) вычисляется минимум, переменные R_1, R_2 и W в Q удовлетворяют соотношению

$$\left|\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}\right| \exp\frac{K}{(\gamma+1)W} - \left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)\exp\frac{-K}{(\gamma+1)W} \leqslant 0 \tag{2.19}$$

Для $t^* > 0$, $W < 0$ получаем

$$t^* = \min_{\varphi,\theta} Q(\varphi, \theta) \tag{2.20}$$

Если в (2.17) минимум достигается при $|t^*| = R_i$, то имеет место эффект фокусирования слабого разрыва в плоскости одного из главных нормальных сечений поверхности R_t. Формулы (2.17), (2.20) позволяют найти и место на R_{t^*}, в котором начинается разрушение потенциального течения.

В одномерном сферическом случае, когда

$$R_1 = R_2 = 1/K = 1/H = R = \text{const}, \qquad W = \text{const}$$

из (2.17), (2.20) будем иметь

$$t^* = -R\left(1 - \exp\frac{-2}{(\gamma+1)WR}\right), \quad t^* < 0, \quad W > 0 \tag{2.21}$$

$$t^* = R\left(\exp\frac{2}{(\gamma+1)|W|R} - 1\right), \quad t^* > 0, \quad W < 0 \tag{2.22}$$

Случай (2.21) соответствует сжатию газа, находящегося в начальный момент времени внутри сферы радиусом R (движение поршня внутрь сферы), а (2.22) — сжатию газа расширяющимся с постоянным ускорением сферическим поршнем.

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (2.21), (2.22) (случай плоского одномерного течения), получаем (1.1). Если в (2.17), (2.19), (2.20) перейти к пределу, устремив одно из R_i к бесконечности (это соответствует развертывающимся поверхностям S_0), то в результате получим для t^* формулы (1.21), (1.22), т. е. выражение t^* для случая развертывающейся поверхности S_0 по форме совпадает с выражением t^* для случая плоскопараллельного движения (разница в величине t^* может быть из-за различий радиусов кривизны в плоском и пространственном случаях).

Замечание 2.1. Проделанное построение, использующее решение уравнения переноса на бихарактеристиках, не позволяет, к сожалению, получить простые модельные уравнения в окрестности R_t, подобно тому как это было сделано в п. 1. Получение членов порядков $o(r^2)$ в выражении для $\Psi(r, \varphi, \theta, t)$ на этом пути также затруднительно, а такую возможность полезно иметь, так как основные утверждения замечания 1.3 имеют место и в пространственном случае.

Замечание 2.2. Подставляя $t = t^*$ из (1.21), (1.22) и (2.17), (2.20) в приближенные выражения для Ψ_t и пользуясь формулой (2.4) для c^2, для определения плотности ρ в возмущенном течении получим представление

$$\rho = \rho_0\left(1 + r + \frac{3-\gamma}{4} r^2 + \cdots\right), \qquad \rho_0 = \mathrm{const}$$

одно и то же как в плоском, так и в пространственном случаях. Точно такое же представление для ρ (с точностью до членов $o(r^2)$) получается как из условий Гюгонио на слабых ударных волнах, так и в одномерных плоских течениях типа волны Римана [1]. Это обстоятельство может оказаться весьма существенным для приближенного исследования распространения пространственных слабых ударных волн, образующихся после разрушения потенциального течения в рассмотренной задаче о поршне, в предположении, что течение за слабой ударной волной остается потенциальным (в одномерном случае в [1] для исследования распространения плоских слабых ударных волн использовались простые волны).

Замечание 2.3. Построенные приближенные формулы для функции Ψ (1.19), (2.14) могут быть использованы в окрестности R_t и в случае выдвижения из газа поршня, когда разрушения потенциального течения на R_t не происходит. Следует лишь рассматривать при $W < 0$ $t < 0$, и при $W > 0$, $t > 0$ (до моментов фокусировок).

Поступила 31 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Сидоров А. Ф. О течениях газа в окрестности слабого разрыва. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 1.
3. Сидоров А. Ф. О некоторых пространственных течениях газа, примыкающих к области покоя. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.