Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ГИДРОМЕХАНИКЕ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Кинетическое уравнение для частиц диспергированной фазы решается при помощи метода, представляющего некоторую модификацию метода Чепмена — Энскога в кинетической теории газов. Для простоты рассмотрены только монодисперсные «бесстолкновительные» системы, когда роль непосредственных столкновений в процессах обмена импульсом и энергией между частицами относительно невелика. Динамические уравнения, описывающие движение таких систем в рамках механики сплошных сред, записаны в приближениях, соответствующих приближениям Эйлера и Навье — Стокса в гидромеханике однофазных сред.

Рассматриваем ниже монодисперсную систему частиц, взвешенных в вязкой жидкости, в предположении, что взаимодействие частиц осуществляется, главным образом, через посредство случайных полей скорости и давления в жидкости, а роль прямых столкновений между частицами незначительна. Кинетическое уравнение для такой системы можно записать в виде [1]

$$\frac{Df}{Dt} + \mathbf{w}' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'}\left[\left(\mathbf{H}^* - \frac{D\langle \mathbf{w}\rangle}{Dt}\right) f\right] - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}'\right) \cdot\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \langle \mathbf{w}\rangle\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'}\right) \cdot\cdot (\mathbf{A} f) \tag{0.1}$$

$$\mathbf{a}*\mathbf{b} = \| a_i b_j \|, \quad \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B} = A_{ij}B_{ji}, \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{w}\rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

Здесь $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{w}')$ — унарная функция распределения частиц по скорости $\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \langle \mathbf{w}\rangle$, угловые скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по ансамблю, $\mathbf{A}$ — тензор диффузии в пространстве скоростей, отнесенный к массе частицы; выражение для силы $\mathbf{H}^*$ имеет вид (см. приложение 4)

$$\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H}\rangle + c\mathbf{w}' \tag{0.2}$$

$$\langle \mathbf{H}\rangle \approx \mathbf{g} + \varkappa\Big\{\beta_1\Big[K_1\langle \mathbf{u}\rangle + \frac{dK_1}{d\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{u}'\rangle + \frac{1}{2}\frac{d^2K_1}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\rho'^2\rangle\langle \mathbf{u}\rangle\Big] +$$
$$+ \beta_2\Big[K_2(\langle u\rangle\langle \mathbf{u}\rangle + \langle(\mathbf{u}_0\mathbf{u}')\mathbf{u}'\rangle + {}^1/_2\,\mathbf{u}_0\langle u'^2\rangle - {}^1/_2\langle(\mathbf{u}_0\mathbf{u}')^2\rangle) +$$
$$+ \frac{dK_2}{d\langle\rho\rangle}(\langle u\rangle\langle\rho'\mathbf{u}'\rangle + \langle\rho'(\mathbf{u}_0\mathbf{u}')\rangle\langle \mathbf{u}\rangle) + \frac{1}{2}\frac{d^2K_2}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\rho'^2\rangle\langle u\rangle\langle \mathbf{u}\rangle\Big] +$$
$$+ \frac{D}{Dt}\Big[\xi\langle \mathbf{u}\rangle + \frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{u}'\rangle + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\rho'^2\rangle\langle \mathbf{u}\rangle\Big] +$$
$$+ \Big\langle\Big(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Big)\Big(\xi\mathbf{u}' + \frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\rho'\langle \mathbf{u}\rangle\Big)\Big\rangle\Big\} - \frac{1}{d_1}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial \mathbf{r}}, \quad \varkappa = \frac{d_0}{d_1}$$

$$K_j \equiv K_j(\langle\rho\rangle), \quad \xi \equiv \xi(\langle\rho\rangle) \qquad (j = 1, 2)$$

$$\mathbf{c} = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} \approx -\varkappa(\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 \langle u \rangle)\delta_{ij} - \varkappa\beta_2 K_2 \langle u \rangle \delta_{i1}\delta_{j1} + $$
$$+ \varkappa \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\xi \langle u_i \rangle\right), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad \mathbf{u}_0 = \frac{\langle \mathbf{u} \rangle}{\langle u \rangle}$$

Здесь $\beta_j (j = 1, 2)$ — коэффициенты, зависящие от физических свойств обеих фаз, K_j и ξ—некоторые функции от $\langle \rho \rangle$ (см. п.4), g — ускорение внешнего массового поля, $\mathbf{v}$, p и ρ— локальные значения скорости жидкости, давления и объемной концентрации дисперсной системы в окрестности частицы, имеющей скорость $\mathbf{w}$, d_0 и d_1 — плотности жидкости и материала частиц соответственно; ось $x = r_1$ направлена вдоль средней скорости межфазового скольжения $\langle \mathbf{u} \rangle$.

Моментные уравнения, следующие из (0.1), описывают среднее движение диспергированной фазы как некоторой сплошной среды и имеют вид

$$\frac{D\langle \rho \rangle}{Dt} + \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle \mathbf{w} \rangle}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{0.3}$$
$$\frac{D\langle \mathbf{w} \rangle}{Dt} = -\frac{1}{\langle \rho \rangle}\frac{\partial(\langle \rho \rangle \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{h}^{(p)}, \qquad \mathbf{h}^{(p)} = \langle \mathbf{H} \rangle, \qquad \boldsymbol{\theta} = \langle \mathbf{w}' * \mathbf{w}' \rangle$$

Динамические уравнения для среднего движения жидкой фазы могут быть представлены в форме [1]

$$\frac{D\langle \rho \rangle}{Dt} = -\langle \mathbf{u} \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \mathbf{r}} + (1 - \langle \rho \rangle)\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{q} = -\langle \rho' \mathbf{v}' \rangle$$
$$\frac{D\langle \mathbf{v} \rangle}{Dt} = -\left(\langle \mathbf{u} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{d_0(1 - \langle \rho \rangle)}\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{T}^{(1)} + \frac{2\nu_0}{1 - \langle \rho \rangle}\frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{h}^{(f)}$$
$$\mathbf{T}^{(1)} = \frac{1}{1 - \langle \rho \rangle}\left\{\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle \mathbf{v} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\langle \mathbf{v} \rangle * \mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}[(1 - \langle \rho \rangle)\langle \mathbf{v}' * \mathbf{v}' \rangle]\right\} \tag{0.4}$$
$$\mathbf{T}^{(2)} = \left(S + \frac{1}{2}\frac{d^2 S}{d\langle \rho \rangle^2}\langle \rho'^2 \rangle\right)\langle \mathbf{e}_d \rangle + \frac{dS}{d\langle \rho \rangle}\langle \rho' \mathbf{e}_d' \rangle$$
$$\mathbf{h}^{(f)} = \mathbf{g} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\langle \rho \rangle}{1 - \langle \rho \rangle}(\langle \mathbf{H} \rangle - \mathbf{g}), \qquad S \equiv S(\langle \rho \rangle)$$

где $\mathbf{e}_d$ — девиатор тензора скоростей деформаций жидкости, имеющей скорость $\mathbf{v}$, а функция S описывает отклонение кажущейся вязкости жидкости [2], фильтрующейся через решетку частиц, от ее молекулярной вязкости $\mu_0 = d_0 \nu_0$.

Величины $\langle \rho \rangle$ и $\langle \mathbf{w} \rangle$ по определению могут быть выражены через функцию $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{w}')$ следующим образом:

$$\langle \rho \rangle = \sigma n = \sigma \int f\, d\mathbf{w}', \qquad \langle \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{n}\int \mathbf{w} f\, d\mathbf{w}' \tag{0.5}$$

где σ — объем частицы, а n — средняя счетная концентрация частиц.

Для полной определенности динамических уравнений (0.3), (0.4) необходимо выразить все величины вида $\langle \varphi' \psi' \rangle$, характеризующие свойства пульсационных движений (псевдотурбулентности) дисперсной системы, в виде определенных функций от динамических переменных $\langle \rho \rangle$, $\nabla \langle p \rangle$, $\langle \mathbf{v} \rangle$ и $\langle \mathbf{w} \rangle$, представляющих собой неизвестные в указанных уравнениях. Эта задача и рассмотрена ниже.

1. «Равновесная» функция распределения. Рассмотрим сначала равновесные состояния дисперсной системы, в которых динамические переменные строго постоянны. В этом случае из динамических уравнений (0.3), (0.4) следуют равенства

$$\mathbf{h}_0^{(p)} = 0, \qquad -\frac{1}{d_0(1-\langle\rho\rangle)}\nabla p + \mathbf{h}_0^{(f)} = 0 \tag{1.1}$$

а кинетическое уравнение (0.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'}(\mathbf{c}_0\mathbf{w}'f_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'}\right) \cdot\cdot (\mathbf{A}f_0) \qquad (\langle \mathbf{H}\rangle_0 = \mathbf{h}_0^{(p)} = 0) \tag{1.2}$$

Индекс «нуль» здесь и ниже использован для обозначения величин, относящихся к равновесному состоянию. Выражения для $\langle \mathbf{H}\rangle_0$ и $\mathbf{c}_0$ легко получить из (0.2) при пренебрежении в (0.2) членами, содержащими величину ξ, и замене всех средних вида $\langle\varphi'\psi'\rangle$ их равновесными значениями $\langle\varphi'\psi'\rangle_0$, причем последние могут быть выражены через динамические переменные совершенно независимым путем при помощи метода, изложенного, например, в [1] (см. также п. 5). Нетрудно видеть, что тензор $\mathbf{c}_0$ в используемой системе координат, в которой ось $x = r_1$ направлена вдоль $\mathbf{u}_0$, диагонален.

Решение уравнения (1.2) с учетом первого соотношения (1.1), удовлетворяющее условию экспоненциально быстрого затухания при стремлении модуля $\mathbf{w}'$ к бесконечности, имеет вид

$$f_0(\mathbf{w}') = n\left(\frac{1}{8\pi^3\theta_0^{(1)}\theta_0^{(2)}\theta_0^{(3)}}\right)^{1/2} \exp\left(-\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j'^2}{2\theta_0^{(j)}}\right) \tag{1.3}$$

При этом выполняются соотношения

$$A^{(j)} = -\theta_0^{(j)}c_0^{(j)}, \qquad \theta_0 = \langle\mathbf{w}'*\mathbf{w}'\rangle_0 \tag{1.4}$$

В (1.3) и (1.4) через $A^{(j)}$, $\theta_0^{(j)}$, $c_0^{(j)}$ обозначены собственные значения тензоров $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\theta}_0$, $\mathbf{c}_0$. Соотношения (1.4) полностью определяют тензор диффузии в пространстве скоростей $\mathbf{A}$, фигурирующий в кинетическом уравнении (0.1).

2. Система последовательных приближений. Пусть реальное состояние дисперсной системы отличается от равновесного, так что некоторые производные динамических переменных по координатам и времени не равны нулю. Как и в кинетической теории газов, считаем, что отклонение от равновесности мало, т. е. выполняются неравенства [3]

$$L\frac{\partial \ln\langle\varphi\rangle}{\partial r_i} \ll 1 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad T\frac{\partial \ln\langle\varphi\rangle}{\partial t} \ll 1 \tag{2.1}$$

где $\langle\varphi\rangle$ — любая динамическая переменная, а L и T — масштабы локальных пульсационных движений (псевдотурбулентности) фаз. В этом случае естественно искать решение уравнения (0.1), согласующееся с уравнениями (0.3), (0.4), в виде ряда по некоторому малому параметру ε. Для этого каждый член в указанных уравнениях нужно умножить на величины ε^m, где m в степени — порядок производной от динамического переменного, входящей в этот член (необходимо учесть при этом, что члены нулевого порядка по производным динамических переменных в (0.3), (0.4) также имеют порядок ε, как это следует из самих этих уравнений; совершенно аналогичное обстоятельство имеет место и в кинетической теории газов [3]

Параметр ε не имеет непосредственного физического смысла; как и в методе Чепмена — Энскога он вводится только для того, чтобы проследить порядок различных членов в соответствующих разложениях всех уравнений и их решений. Напротив, учет членов все более высокого порядка в разложениях по ε^m соответствует все более точному описанию неравновесности истинного состояния дисперсной системы. В конце вычислений нужно, конечно, принять $\varepsilon = 1$.

Рассматриваем ниже только локально-равновесные состояния дисперсной системы, которые могут быть полностью охарактеризованы значениями динамических переменных в разных точках в различные моменты времени. Это соответствует рассмотрению системы в приближении случайных фаз, используемом также и в кинетической теории газов (в последнем случае приближение случайных фаз эквивалентно допущению о молекулярном хаосе). В этом случае функция $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{w}')$ зависит от t и $\mathbf{r}$ только неявно, через динамические переменные, т. е.

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \langle\varphi\rangle} \frac{D\langle\varphi\rangle}{Dt}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \langle\varphi\rangle} \frac{\partial \langle\varphi\rangle}{\partial \mathbf{r}} \tag{2.2}$$

Ищем решение (0.1) в виде ряда

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots \tag{2.3}$$

Этому ряду соответствуют разложения

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \theta_m, \qquad \theta = \langle \mathbf{w}' * \mathbf{w}' \rangle \tag{2.4}$$

Ввиду локальной равновесности рассматриваемых состояний соотношения, связывающие локальные значения различных псевдотурбулентных средних с компонентами тензора θ в той же точке дисперсной системы

$$\langle\varphi'\psi'\rangle = R[\varphi, \psi] \operatorname{tr}\theta, \quad \langle\varphi'\boldsymbol{\psi}'\rangle = \mathbf{R}[\varphi, \boldsymbol{\psi}]\,\theta, \quad \langle\boldsymbol{\varphi}' * \boldsymbol{\psi}'\rangle = \mathbf{R}[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\,\theta \tag{2.5}$$

одинаковы как в равновесном, так и в неравновесном состояниях [1]. Поэтому тензоры $\mathbf{R}$, введенные в (2.5), могут быть вычислены из этих соотношений, записанных для равновесного состояния, по известным характеристикам псевдотурбулентности в равновесном приближении (см. п. 5). Отметим, что это свойство локально-равновесных состояний фактически уже было использовано в п. 1 при вычислении тензора $\mathbf{A}$, входящего в полное кинетическое уравнение (0.1), на основании решения «усеченного» уравнения (1.2), справедливого только в истинно равновесном состоянии.

Соотношения (2.3) — (2.5) позволяют получить разложения

$$\langle \varphi'\psi' \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \langle \varphi'\psi' \rangle_m, \qquad \langle \varphi'\psi' \rangle_m = R[\varphi, \psi] \operatorname{tr} \theta_m \tag{2.6}$$

$$\langle \varphi'\boldsymbol{\psi}' \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \langle \varphi'\boldsymbol{\psi}' \rangle_m, \qquad \langle \varphi'\boldsymbol{\psi}' \rangle_m = \mathbf{R}[\varphi, \boldsymbol{\psi}] \theta_m$$

$$\langle \boldsymbol{\varphi}'*\boldsymbol{\psi}' \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \langle \boldsymbol{\varphi}'*\boldsymbol{\psi}' \rangle_m, \qquad \langle \boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{\psi}' \rangle_m = \mathbf{R}[\varphi, \psi] \theta_m$$

В частности, отсюда и из (0.2) — (0.4) имеем

$$\mathbf{T}^{(j)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{T}_m^{(j)} \qquad (j = 1, 2)$$

$$\mathbf{T}_m^{(1)} = \frac{1}{1 - \langle \rho \rangle} \left\{ \frac{\partial \mathbf{q}_m}{\partial t} + \left(\mathbf{q}_m \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle \mathbf{v} \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\langle \mathbf{v} \rangle * \mathbf{q}_m) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [(1 - \langle \rho \rangle) \langle \mathbf{v}' * \mathbf{v}' \rangle_m] \right\}$$

$$\mathbf{T}_m^{(2)} = \left(S\delta_{0m} + \frac{1}{2} \frac{d^2 S}{d \langle \rho \rangle^2} \langle \rho'^2 \rangle_m \right) \langle \mathbf{e}_d \rangle + \frac{dS}{d \langle \rho \rangle} \langle \rho' \mathbf{e}_d' \rangle_m$$

$$\mathbf{h}^{(p)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{h}_m^{(p)}, \qquad \mathbf{h}^{(f)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \mathbf{h}_m^{(f)}$$

$$\mathbf{h}_m^{(p)} = \left[\mathbf{g} + \varkappa (\beta_1 K_1 \langle \mathbf{u} \rangle + \beta_2 K_2 \langle u \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) + \varkappa \frac{D}{Dt} (\xi \langle \mathbf{u} \rangle) - \frac{1}{d_1} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \mathbf{r}} \right] \delta_{0m} +$$
$$+ \varkappa \left\{ \beta_1 \left(\frac{dK_1}{d \langle \rho \rangle} \langle \rho' \mathbf{u}' \rangle_m + \frac{1}{2} \frac{d^2 K_1}{d \langle \rho \rangle^2} \langle \rho'^2 \rangle_m \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \beta_2 [K_2 (\langle (\mathbf{u}_0 \mathbf{u}') \mathbf{u}' \rangle_m + \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \mathbf{u}_0 \langle u'^2 - (\mathbf{u}_0 \mathbf{u}')^2 \rangle_m \Big) + \frac{dK_2}{d \langle \rho \rangle} (\langle u \rangle \langle \rho' \mathbf{u}' \rangle_m + \langle \rho' (\mathbf{u}_0 \mathbf{u}') \rangle_m \langle \mathbf{u} \rangle) +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 K_2}{d \langle \rho \rangle^2} \langle \rho'^2 \rangle_m \langle u \rangle \langle \mathbf{u} \rangle \Big] + \frac{D}{Dt} \left(\frac{d\xi}{d \langle \rho \rangle} \langle \rho' \mathbf{u}' \rangle_m + \frac{1}{2} \frac{d^2 \xi}{d \langle \rho \rangle^2} \langle \rho'^2 \rangle_m \langle \mathbf{u} \rangle \right) +$$
$$\left. + \left\langle \left(\mathbf{w}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\xi \mathbf{u}' + \frac{d\xi}{d \langle \rho \rangle} \rho' \langle \mathbf{u} \rangle \right) \right\rangle_m \right\} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{h}_m^{(f)} = \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{\langle \rho \rangle}{1 - \langle \rho \rangle} \right) \mathbf{g} \delta_{0m} - \frac{1}{\varkappa} \frac{\langle \rho \rangle}{1 - \langle \rho \rangle} \mathbf{h}_m^{(p)}$$

Для получения самосогласованной схемы последовательных приближений необходимо определить функции f_m таким образом, чтобы при пренебрежении всеми членами ряда (2.3), номер которых больше некоторого числа M, и при пренебрежении всеми соответствующими членами в разложениях (2.4), (2.6) и (2.7) на самом деле получалось M-е приближение для функции распределения и всех динамических переменных. Смысл этого требования о самосогласованности тот же, что и при решении кинетического уравнения Больцмана методом Чепмена — Энскога [3].

Представим конвективные производные от f и динамической переменной $\langle \varphi \rangle$ в следующем формальном виде:

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \frac{D_m f}{Dt}, \qquad \frac{D \langle \varphi \rangle}{Dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \frac{D_m \langle \varphi \rangle}{Dt} \tag{2.8}$$

Эти разложения должны быть определены таким образом, чтобы они согласовывались с законами сохранения массы и импульса, выражаемыми уравнениями (0.3), (0.4). Нетрудно видеть, что для этого необходимо определить различные члены в (2.8) следующим образом:

$$\frac{D_m\langle\rho\rangle}{Dt}=\left[-\langle\mathbf{u}\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\mathbf{r}}+(1-\langle\rho\rangle)\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial\mathbf{r}}\right]\delta_{m0}+\frac{\partial\mathbf{q}_m}{\partial\mathbf{r}}$$

$$\frac{D_m\langle\mathbf{w}\rangle}{Dt}=-\frac{1}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial(\langle\rho\rangle\,\theta_m)}{\partial\mathbf{r}}+\mathbf{h}_m^{(p)} \tag{2.9}$$

$$\frac{D_m\langle\mathbf{v}\rangle}{Dt}=-\left[\left(\langle\mathbf{u}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\mathbf{v}\rangle+\frac{1}{d_0(1-\langle\rho\rangle)}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial\mathbf{r}}\right]\delta_{m0}-\mathbf{T}_m^{(1)}+\frac{2\nu_0}{1-\langle\rho\rangle}\frac{\partial\mathbf{T}_{m-1}^{(2)}}{\partial\mathbf{r}}+\mathbf{h}_m^{(f)}$$

Кроме того, из первого уравнения (0.3) следует также

$$\frac{\partial\langle\mathbf{w}\rangle}{\partial\mathbf{r}}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\operatorname{div}_m\langle\mathbf{w}\rangle,\qquad \operatorname{div}_m\langle\mathbf{w}\rangle=-\frac{D_m\ln\langle\rho\rangle}{Dt} \tag{2.10}$$

Конвективную производную давления можно определить при помощи тривиальных равенств

$$\frac{D_0\langle p\rangle}{Dt}\equiv\frac{D\langle p\rangle}{Dt},\qquad \frac{D_m\langle p\rangle}{Dt}\equiv0\quad(m>0) \tag{2.11}$$

Используя (2.2) и (2.3), для конвективной производной от f получим представление

$$\frac{Df}{Dt}=\sum_{\varphi}\left(\sum_{m'=0}^{\infty}\varepsilon^{m'}\frac{D_{m'}\langle\varphi\rangle}{Dt}\right)\left(\sum_{m''=0}^{\infty}\varepsilon^{m''}\frac{\partial f_{m''}}{\partial\langle\varphi\rangle}\right) \tag{2.12}$$

Из (2.8) и (2.12) имеем также

$$\frac{D_0f}{Dt}=\sum_{\varphi}\frac{\partial f_0}{\partial\langle\varphi\rangle}\frac{D_0\langle\varphi\rangle}{Dt},\qquad \frac{D_1f}{Dt}=\sum_{\varphi}\left(\frac{\partial f_0}{\partial\langle\varphi\rangle}\frac{D_1\langle\varphi\rangle}{Dt}+\frac{\partial f_1}{\partial\langle\varphi\rangle}\frac{D_0\langle\varphi\rangle}{Dt}\right) \tag{2.13}$$

Удобно выбрать f_0 в равновесной форме (1.3). Тогда

$$\frac{D_0f_0}{Dt}=\frac{\partial f_0}{\partial\langle\rho\rangle}\frac{D_0\langle\rho\rangle}{Dt}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_0}{\partial\theta_0^{(j)}}\sum_{\varphi}\frac{\partial\theta_0^{(j)}}{\partial\langle\varphi\rangle}\frac{D_0\langle\varphi\rangle}{Dt} \tag{2.14}$$

причем $\theta_0^{(j)}$ рассматриваются, в соответствии со сказанным выше, как известные функции динамических переменных $\langle\varphi\rangle$.

Вводя параметр ε в уравнения (0.1.) и (0.3) и разделяя в них члены, имеющие различный порядок по ε, получим уравнения для различных коэффициентов f_m в ряде (2.3)

$$\sum_{j=1}^{3}A^{(j)}\left[\frac{\partial^2f_m}{\partial w_j'^2}+\frac{1}{\theta_0^{(j)}}\frac{\partial(w_j'f_m)}{\partial w_j'}\right]=\frac{D_{m-1}f}{Dt}+\mathbf{w}'\frac{\partial f_{m-1}}{\partial\mathbf{r}}+ \tag{2.15}$$

$$+\frac{\partial}{\partial\mathbf{w}'}(\mathbf{c}_1\mathbf{w}'f_{m-1})+\frac{1}{\langle\rho\rangle}\sum_{m'=0}^{m-1}\frac{\partial(\langle\rho\rangle\,\theta_{m'})}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial f_{m-1-m'}}{\partial\mathbf{w}'}-\left(\frac{\partial f_{m-1}}{\partial\mathbf{r}}*\mathbf{w}'\right)\cdot\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}*\langle\mathbf{w}\rangle\right)$$

При формулировке (2.15) были использованы также соотношения (1.4). Тензор $\mathbf{c}_1$ представляется в виде (см. (0.2))

$$\mathbf{c}_1 = \| c_{1,\, ij} \|, \qquad c_{1,\, ij} = \varkappa \frac{\partial}{\partial r_j} (\xi \langle u_i \rangle) \tag{2.16}$$

Решения уравнений (2.15) должны удовлетворять условиям

$$\int f_m \, d\mathbf{w}' = 0, \quad \int \mathbf{w}' f_m \, d\mathbf{w}' = 0, \quad m > 0 \tag{2.17}$$

Динамические уравнения, соответствующие m-му приближению, представляются в виде

$$\frac{D\langle \rho \rangle}{Dt} + \langle \rho \rangle \frac{\partial \langle \mathbf{w} \rangle}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$d_1 \langle \rho \rangle \frac{D\langle \mathbf{w} \rangle}{Dt} = -d_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Big(\langle \rho \rangle \sum_{m'=0}^{m} \boldsymbol{\theta}_{m'} \Big) + d_1 \langle \rho \rangle \sum_{m'=0}^{m} \mathbf{h}_{m'}^{(p)}$$

$$\frac{D_v \langle \rho \rangle}{Dt} - (1 - \langle \rho \rangle) \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sum_{m'=0}^{m} \mathbf{q}_{m'} = 0 \tag{2.18}$$

$$d_0 (1 - \langle \rho \rangle) \frac{D_v \langle \mathbf{v} \rangle}{Dt} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \mathbf{r}} - d_0 (1 - \langle \rho \rangle) \sum_{m'=0}^{m} \mathbf{T}_{m'}^{(1)} + 2\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sum_{m'=0}^{m-1} \mathbf{T}_{m'}^{(2)} +$$

$$+ d_0 (1 - \langle \rho \rangle) \sum_{m'=0}^{m} \mathbf{h}_{m'}^{(f)}, \qquad \frac{D_v}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

Входящие сюда величины $\boldsymbol{\theta}_m$ подсчитываются стандартным путем по найденным предварительно величинам f_m

$$\boldsymbol{\theta}_m = \frac{1}{n} \int (\mathbf{w}' * \mathbf{w}') f_m \, d\mathbf{w}' \tag{2.19}$$

Различные псевдотурбулентные средние выражаются через $\boldsymbol{\theta}_m$ и динамические переменные при помощи соотношений (2.5), а величины $\mathbf{T}_m^{(1)}$, $\mathbf{T}_m^{(2)}$, $\mathbf{h}_m^{(p)}$, $\mathbf{h}_m^{(f)}$ и $\mathbf{q}_m$ вычисляются в соответствии с их определениями (2.7).

Решая последовательно уравнения (2.15), можно в принципе определить динамические уравнения (2.18) со сколь угодно высокой точностью. В действительности для большинства приложений достаточно, по-видимому, ограничиться исследованием только первых двух приближений ($m = 1, 2$), которые по аналогии с гидромеханикой однофазных сред и кинетической теорией уместно назвать приближениями Эйлера и Навье — Стокса соответственно.

В этом отношении очевидна аналогия с газовой динамикой, когда при изучении макроскопического движения газа обычно вполне достаточно использовать уравнения гидромеханики в форме Эйлера или Навье — Стокса, а необходимость обращения к уравнениям следующих приближений (например, к уравнениям Барнетта) вообще не возникает.

Отметим существенное отличие используемого здесь метода от обычного метода Чепмена — Энскога в кинетической теории. Согласно последнему методу изотропная величина $\theta = \operatorname{tr} \boldsymbol{\theta}$, характеризующая температуру газа, рассматривается как независимый параметр наряду с плотностью газа и средней скоростью его движения.

В этой же работе, напротив, средние квадраты компонент пульсационной скорости частицы в различных направлениях оказываются вполне определенными функциями от динамических переменных, в частности, от $\langle\rho\rangle$ и $\langle\mathbf{w}\rangle$. С физической точки зрения это отличие представляется вполне естественным.

Действительно, в противоположность обычному газу, представляющему собой двухпараметрическую систему (так что даже равновесное состояние газа полностью описывается только при определении двух независимых параметров, например, плотности и температуры), взвешенные частицы представляют однопараметрическую систему. Последнее легко увидеть уже из того, что равновесное состояние дисперсной системы оказывается полностью определенным, если задать единственный параметр — среднюю концентрацию частиц или среднюю скорость межфазового скольжения.

Ситуация, когда энергия пульсационных движений не зависит от свойств самого течения дисперсной системы, могла бы быть в принципе реализована лишь при введении каких-либо иных дополнительных источников возбуждения псевдотурбулентных движений частиц.

На практике ситуации такого типа могут реализоваться, по-видимому, только вблизи от границ течения. Твердые границы способствуют, очевидно, затуханию псевдотурбулентности в пристеночной области независимо от физических свойств частиц и дисперсионной среды.

Напротив, грубодисперсные решетки, проницаемые только для дисперсионной среды, могут способствовать генерации псевдотурбулентности за счет искажения решеткой потока дисперсионной среды и последующего взаимодействия возмущений этого потока (например, струек, протекающих через отдельные отверстия решетки) с частицами.

Примером границ второго рода могут служить решетки, ограничивающие снизу псевдоожиженный слой и пронизываемые потоком псевдоожижающего агента.

В связи со сказанным, рассмотрение уравнений переноса для компонент тензора $\boldsymbol{\theta}$ при решении кинетического уравнения для взвешенных частиц представляется излишним. Однако такие уравнения легко могут быть получены из (0.1) при помощи стандартных приемов. Например, уравнение переноса для первого инварианта тензора $\boldsymbol{\theta}$ имеет вид

$$\frac{D\theta}{Dt} + 2\boldsymbol{\theta}\cdot\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} * \langle\mathbf{w}\rangle\right) - 2\boldsymbol{\theta}\cdot\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A} + \frac{1}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{r}} = 0 \tag{2.20}$$

$$\theta = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{Q} = \sigma\int w'^2\mathbf{w}' f d\mathbf{w}', \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение переноса псевдотурбулентной энергии взвешенных частиц (средняя энергия пульсаций одной частицы равна, очевидно, $^1/_2\, m\theta$, где m — масса частицы); в этом смысле оно аналогично уравнению теплопроводности в кинетической теории или гидромеханике однофазных сред.

Различные члены в левой части (2.20) описывают соответственно конвективное изменение θ, интенсификацию псевдотурбулентности за счет диссипации энергии среднего движения диспергированной фазы псевдотурбулентными напряжениями, фигурирующими во втором уравнении (2.18), регулярное вырождение пульсационных движений, обусловленное силами межфазового взаимодействия, «броуновскую» генерацию пульсаций случайными мелкомасштабными возмущениями и, наконец, перенос θ псевдотурбулентными пульсациями частиц.

Заметим, что нетрудно сформулировать также уравнения для величин $\theta_m = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\theta}_m$, где тензоры $\boldsymbol{\theta}_m$ определены в (2.19), соответствующие уравнению (2.20).

Таким образом, метод, использованный выше, несколько отличается от метода Чепмена — Энскога, в котором величина θ, пропорциональная температуре газа, рассматривается как независимый параметр, и уравнение для нее используется при решении кинетического уравнения Больцмана наряду с уравнениями сохранения массы и импульса [3].

3. Приближения Эйлера и Навье — Стокса. Выберем в качестве первого члена ряда (2.3) функцию f_0 из (1.3). Соответствующие динамические уравнения получаются из (2.7) и (2.18) при $m = 0$, т. е. после замены реальных характеристик псевдотурбулентности их равновесными значениями. Как уже указывалось выше, последние определяются независимым путем (см. [1] и п. 5 этой работы) и могут рассматриваться как известные функции динамических переменных. Последнее позволяет полностью замкнуть систему динамических уравнений, описывающих среднее движение фаз дисперсной системы в рассматриваемом «нулевом» приближении, которое уместно назвать приближением Эйлера в гидромеханике дисперсных систем.

В системе координат, ось $x = r_1$ которой направлена вдоль $\mathbf{u}_0$, выполняется соотношение $\mathbf{q}_0 = \{q_0, 0, 0\}$, а тензоры θ_0 и $\mathbf{T}_0^{(1)}$ диагональны. Поэтому в приближении Эйлера учитываются фактически лишь нормальные псевдотурбулентные напряжения в обеих фазах и компонента пульсационного потока жидкой фазы в направлении средней скорости межфазового скольжения.

Нормальные псевдотурбулентные напряжения аналогичны по смыслу давлению газа в кинетической теории, а пульсационный поток — дополнительному потоку сжимаемой жидкости, обусловленному турбулентными пульсациями ее плотности и скорости. Уравнение переноса для θ_0 имеет форму (2.20), но поток Q_0, как нетрудно видеть, тождественно равен нулю.

Рассмотрим теперь следующее приближение по параметру ε, т. е. по отклонению истинного состояния дисперсной системы от равновесного. Введем новую неизвестную функцию g_1:

$$f_1 = f_0 g_1 \tag{3.1}$$

Уравнение (2.15) при $m = 1$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} A^{(j)} \left(\frac{\partial^2}{\partial w_j'^2} - \frac{w_j'}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial}{\partial w_j'}\right) g_1 = \frac{1}{f_0} \left[\frac{D_0 f}{Dt} + \mathbf{w}' \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} (\mathbf{c}_1 \mathbf{w}' f_0) + \right.\\ + \frac{1}{\langle\rho\rangle} \frac{\partial(\langle\rho\rangle\theta_0)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}'} - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}'\right) \cdot\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \langle \mathbf{w}\rangle - \mathbf{C}\right) - \\ \left. - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}'\right) \cdot\cdot \mathbf{C}\right], \quad \mathbf{C} = \| C_{ij} \|, \quad C_{ij} = \frac{\partial \langle w_i \rangle}{\partial r_i} \delta_{ij}\end{aligned} \tag{3.2}$$

Преобразуя члены в правой части этого уравнения при помощи соотношений (1.3) и (2.9) — (2.14), получим следующие представления:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_0} \frac{D_0 f}{Dt} &= -\operatorname{div}_0 \langle \mathbf{w} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}} - 1\right) \frac{D_0 \ln \theta_0^{(j)}}{Dt} \\ \frac{\mathbf{w}'}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} &= \mathbf{w}' \frac{\partial \ln \langle\rho\rangle}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}} - 1\right) \mathbf{w}' \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial r} \\ \frac{1}{f_0 \langle\rho\rangle} \frac{\partial (\langle\rho\rangle \theta_0)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}'} &= -\mathbf{w}' \frac{\partial \ln \langle\rho\rangle}{\partial \mathbf{r}} - \sum_{j=1}^{3} w_j' \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial r_j} \\ \frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}'} (\mathbf{c}_1 \mathbf{w}' f_0) &= -\sum_{j=1}^{3} c_1^{(j)} \left(\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}} - 1\right) - \sum_{i,j=1}^{3} \Gamma_{ij}' w_i' w_j'\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$-\frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}'\right) \cdot\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \langle \mathbf{w} \rangle - \mathbf{C}\right) = \sum_{i,\, j=1}^{3} \Gamma_{ij}'' w_i' w_j'$$

$$-\frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{w}'} * \mathbf{w}'\right) \cdot\cdot \mathbf{C} = \sum_{j=1}^{3} \frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_j}$$

Здесь введены симметричные тензоры Γ' и Γ''

$$\Gamma' = \|\Gamma_{ij}'\|, \qquad \Gamma'' = \|\Gamma''_{ij}\|$$

$$\Gamma_{ij}' = -\frac{1}{2}\left(\frac{c_{1,\, ij}}{\theta_0^{(j)}} + \frac{c_{1,\, ji}}{\theta_0^{(i)}}\right) + \frac{c_1^{(j)}}{\theta_0^{(j)}} \delta_{ij} \tag{3.4}$$

$$\Gamma_{ij}'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_i} + \frac{1}{\theta_0^{(i)}} \frac{\partial \langle w_i \rangle}{\partial r_j}\right) - \frac{1}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_j} \delta_{ij}$$

Подставляя соотношения (3.3) и (3.4) в уравнение (3.2), приходим к уравнению

$$\sum_{j=1}^{3} A^{(j)} \left(\frac{\partial^2}{\partial w_j^2} - \frac{w_j'}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial}{\partial w_j'}\right) g_1 = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}} - 1\right)\left(\frac{D_0 \ln \theta_0^{(j)}}{2Dt} - c_1^{(j)} + \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_j}\right) +$$

$$+ \sum_{i,\, j=1}^{3} \Gamma_{ij} w_i' w_j' + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{3} \left(\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}} - 1\right) \mathbf{w}' \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial \mathbf{r}} \tag{3.5}$$

Здесь введен тензор Γ (см. (2.16) и (3.4))

$$\Gamma = \|\Gamma_{ij}\| = \Gamma'' - \Gamma', \qquad \mathrm{W} = \langle \mathbf{w} \rangle + \varkappa \xi \langle \mathbf{u} \rangle \tag{3.6}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial W_j}{\partial r_i} + \frac{1}{\theta_0^{(i)}} \frac{\partial W_i}{\partial r_j}\right) - \frac{1}{\theta_0^{(i)}} \frac{\partial W_j}{\partial r_j} \delta_{ij}$$

Ищем решение уравнения (3.5) в виде

$$g_1 = K + \sum_{j=1}^{3} L_j w_j' + \sum_{i,\, j=1}^{3} (M_{ij} + N_{ij} w_j') w_i' w_j' \tag{3.7}$$

где K, L_j, M_{ij}, N_{ij} — некие величины, которые не зависят от компонент $\mathbf{w}'$. Подставляя (3.7) в уравнение (3.5) и приравнивая члены с одинаковыми степенями w_i' в разных частях этого уравнения, получим следующие выражения для указанных величин:

$$N_{jj} = -\frac{1}{6A^{(j)}} \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial r_j}, \quad N_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2A^{(j)}}{\theta_0^{(j)}} + \frac{A^{(i)}}{\theta_0^{(i)}}\right)^{-1} \frac{1}{\theta_0^{(j)}} \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial r_i}, \quad i \neq j$$

$$M_{jj} = -\frac{1}{2A^{(j)}} \left(\frac{D_0 \ln \theta_0^{(j)}}{2Dt} - c_1^{(j)} + \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_j}\right)$$

$$M_{ij} = -\left(\frac{A^{(j)}}{\theta_0^{(j)}} + \frac{A^{(i)}}{\theta_0^{(i)}}\right)^{-1} \Gamma_{ij}, \quad i \neq j \tag{3.8}$$

$$L_j = \frac{\theta_0^{(j)}}{A^{(j)}} \left(6A^{(j)} N_{jj} + 2 \sum_{i=1,\, i\neq j}^{3} N_{ji} A^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1,\, i\neq j}^{3} \frac{\partial \ln \theta_0^{(i)}}{\partial r_j} + \frac{3}{2} \frac{\partial \ln \theta^{(j)}}{\partial r_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1,\, i\neq j}^{3} \left(\frac{2A^{(i)}}{\theta_0^{(i)}} + \frac{A^{(j)}}{\theta_0^{(j)}}\right)^{-1} \frac{\partial \ln \theta_0^{(i)}}{\partial r_j} + \frac{1}{2} \frac{\theta_0^{(j)}}{A^{(j)}} \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial r_j}$$

Проверим выполнение условий (2.17). Имеем

$$\int f_1 d\mathbf{w}' = \int g_1 f_0 d\mathbf{w}' = \int \Big(K + \sum_{j=1}^{3} M_{jj} w_j'^2\Big) f_0 d\mathbf{w}' =$$
$$= n\left[K - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{\theta_0^{(j)}}{A^{(j)}}\left(\frac{D_0 \ln \theta_0^{(j)}}{2Dt} - c_1^{(j)} + \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_j}\right)\right] \tag{3.9}$$

Приравнивая выражение (3.9) нулю, получим представление для величины K, входящей в соотношение (3.7)

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{\theta_0^{(j)}}{A^{(j)}}\left(\frac{D_0 \ln \theta_0^{(j)}}{2Dt} - c_1^{(j)} + \frac{\partial \langle w_j \rangle}{\partial r_j}\right) \tag{3.10}$$

Величины, стоящие в круглых скобках в (3.8) и (3.10), легко представить в форме определенных функций от динамических переменных. Для этого достаточно раскрыть конвективные производные от $\theta_0^{(j)}$ при помощи равенств

$$\frac{D_0 \ln \theta_0^{(j)}}{Dt} = \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial \langle \rho \rangle}\frac{D_0 \langle \rho \rangle}{Dt} + \frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial \langle u \rangle}\frac{D_0 \langle u \rangle}{Dt} \tag{3.11}$$

(величины $\theta_0^{(j)}$ не зависят от $\langle p \rangle$, как это следует из [1] и п. 5), а затем использовать соотношения (2.9) и известные представления характеристик равновесной псевдотурбулентности $\langle \varphi' \psi' \rangle_0$ через динамические переменные.

Второе условие (2.17) выполняется тождественно. Действительно, имеем

$$\int w_j' f_1 d\mathbf{w}' = \int w_j' g_1 f_0 d\mathbf{w}' = \int w_j' \Big(L_j w_j' + \sum_{i=1}^{3} N_{ji} w_j' w_i'^2\Big) f_0 d\mathbf{w}' =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1, i\neq j}^{3} \left(\frac{2A^{(i)}}{\theta_0^{(i)}} + \frac{A^{(j)}}{\theta_0^{(j)}}\right)^{-1} \frac{\partial \ln \theta_0^{(i)}}{\partial r_j} \int w_j'^2 \left(1 - \frac{w_i'^2}{\theta_0^{(i)}}\right) f_0 dw' + \tag{3.12}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\theta_0^{(j)}}{A^{(j)}}\frac{\partial \ln \theta_0^{(j)}}{\partial r_j}\int w_j'^2 \left(1 - \frac{w_j'^2}{3\theta_0^{(j)}}\right) d\mathbf{w}' \equiv 0$$

Таким образом, решение (3.1), (3.7) уравнения (2.15) при $m = 1$ удовлетворяет обоим условиям (2.17).

Компоненты тензора θ_1 равны

$$\theta_{1,ij} = \frac{1}{n}\int w_i' w_j' f_1 d\mathbf{w}' = \frac{1}{n}\int w_i' w_j' g_1 f_0 d\mathbf{w}' =$$
$$= \sum_{k=1}^{3} (1 + \delta_{ik}) \frac{\theta_0^{(k)}}{A^{(k)}} \left(\frac{D_0 \ln \theta_0^{(k)}}{2Dt} - c_1^{(k)} + \frac{\partial \langle w_k \rangle}{\partial x_i}\right) \theta_0^{(i)} \delta_{ij} -$$
$$- \theta_0^{(i)} \theta_0^{(j)} \left(\frac{A^{(i)}}{\theta_0^{(i)}} + \frac{A^{(j)}}{\theta_0^{(j)}}\right)^{-1} \Gamma_{ij} \tag{3.13}$$

Динамические уравнения получаются из уравнений (2.18) при $m = 1$ после подстановки в последние уравнения соотношений (2.6), (2.7) и (3.6), (3.13). Отметим новые члены, появляющиеся в динамических уравнениях рассматриваемого приближения (которое уместно назвать приближением Навье — Стокса в гидромеханике дисперсных систем) и отличающие их от соответствующих уравнений в приближении Эйлера.

Прежде всего, наряду с компонентой q_1 пульсационного потока $\mathbf{q}$ появляются также поперечные компоненты, ориентированные нормально к вектору $\mathbf{u}_0$.

Далее псевдотурбулентные нормальные напряжения, действующие в обеих фазах, рассматриваемых как сплошные среды, несколько изменяются и, что особенно важно, появляются касательные псевдотурбулентные напряжения, аналогичные по смыслу вязким напряжениям в однофазной среде, либо же напряжениям, обусловленным турбулентной вязкостью.

Наконец, несколько изменяются силы $\mathbf{h}^{(p)}$ и $\mathbf{h}^{(f)}$, входящие в уравнения сохранения импульсов фаз в (2.18).

Выражения для касательных псевдотурбулентных напряжений существенно отличаются от соответствующих выражений, постулируемых в рамках различных феноменологических моделей дисперсных систем. В частности, в общем случае затруднительно выделить в тензорах псевдотурбулентных напряжений обеих фаз тензоры вязкости и средних скоростей деформации; ввести скалярные коэффициенты турбулентной вязкости удается, как легко видеть, лишь для простейших (например, одномерных) течений, причем значения этих коэффициентов существенно зависят от типа, ориентации течения и т. п.

Нетрудно видеть, что в уравнении переноса для θ_1, следующем из (2.4) и (2.20), поток $Q = Q_1$ отличен от нуля. Выражение для этого потока нетрудно подсчитать, исходя из (2.19) и (3.1).

Уравнения (2.18) при $m = 0$ или $m = 1$ оказываются значительно сложнее обычных уравнений Эйлера или Навье — Стокса. В первую очередь это связано с тем, что в этих уравнениях помимо нелинейных инерционных членов появляются дополнительные сильные нелинейности, обусловленные сложной зависимостью псевдотурбулентных напряжений и других величин, зависящих от интенсивности псевдотурбулентных пульсаций и входящих в указанные уравнения, от динамических переменных и их производных. Очевидно, эти нелинейности существенны лишь в случаях, когда псевдотурбулентность достаточно сильно развита.

Простые оценки показывают, что псевдотурбулентными членами можно пренебречь лишь при исследовании весьма разреженных дисперсных систем ($\langle\rho\rangle \leqslant 0.01$—$0.1$), а также суспензий весьма мелких частиц (с радиусом $\sim 10^{-4}$ — 10^{-3} см), взвешенных в достаточно вязкой жидкости. В остальных случаях псевдотурбулентные члены в динамических уравнениях сравнимы по величине или даже превосходят регулярные. Но даже в случаях, когда псевдотурбулентные члены малы, их учет представляется необходимым с принципиальной точки зрения.

Действительно, при полном пренебрежении псевдотурбулентными членами в динамических уравнениях система этих уравнений оказывается, вообще, говоря, незамкнутой, так что для одновременного определения величин $\langle\rho\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle\mathbf{v}\rangle$ и $\langle\mathbf{w}\rangle$ в течении необходимо в общем случае постулировать некое дополнительное уравнение, играющее роль уравнения состояния дисперсной системы и связывающее ее концентрацию с другими динамическими переменными.

Хорошим примером может служить течение суспензии в круглой трубе, рассматривавшееся в [4]. Учет псевдотурбулентных членов, как бы малы они не были, в динамических уравнениях позволяет ликвидировать это затруднение вполне естественным путем.

При решении конкретных задач необходимо учитывать, что граничные условия, налагаемые на решения уравнений (2.18), в общем случае значительно отличаются от условий, налагаемых на решения уравнений гидромеханики однофазных сред.

Подробное обсуждение вида граничных условий определенно выходит за рамки этой работы; поэтому здесь рассмотрим лишь условия, которые необходимо задавать на твердых границах течения. Нормальные компоненты скоростей $\langle \mathbf{v} \rangle$ и $\langle \mathbf{w} \rangle$ должны, конечно, обращаться в нуль на твердых границах. Однако это утверждение несправедливо, вообще говоря, для тангенциальных компонент $\langle \mathbf{v} \rangle$ и $\langle \mathbf{w} \rangle$.

Действительно, твердые частицы способны проскальзывать вблизи границы и увлекать за собой также прилегающие объемы жидкости, в результате чего средние скорости движения окажутся отличными от нуля.

Условие прилипания выполняется, конечно, для жидкости, протекающей в тонкой прослойке, отделяющей границу течения от области, занятой дисперсной системой, но оно совсем не обязательно для жидкой фазы этой системы на границе с прослойкой. Введение указанной прослойки и обсуждение условий непрерывности скоростей фаз и напряжений на ее границе с дисперсной системой было проведено в [4].

Примером задачи, требующей граничных условий совершенно иного типа, может служить задача о распределении взвешенного материала и внутренней циркуляции фаз в псевдоожиженном слое. Слой ограничен снизу решеткой, проницаемой только для дисперсионной среды, поток которой Q ориентирован нормально к решетке. Первая пара граничных условий на решетке, имеет, очевидно, форму

$$\langle v_n \rangle = Q/1 - \langle \rho \rangle, \qquad \langle w_n \rangle = 0, \qquad x_n = 0 \tag{3.14}$$

В качестве второй пары граничных условий целесообразно, по-видимому, использовать условия, определяющие пульсации жидкости, пронизывающей решетку, т. е.

$$\langle v_n'^2 \rangle = (\mathbf{R}[\mathbf{v}, \mathbf{w}]\,\theta)_{nn} = \vartheta Q^2, \qquad \langle v_t'^2 \rangle = (\mathbf{R}\,[\mathbf{v}, \mathbf{w}]\,\theta)_{tt} = 0, \qquad x_n = 0 \tag{3.15}$$

где ϑ — некий коэффициент, зависящий от структуры решетки и тех возмущений, которые она вносит в поток жидкости. Величины $\mathbf{R}$ и θ, входящие в (3.15), выражаются через динамические переменные и их производные при помощи соотношений, рассмотренных выше.

Рассматривая уравнения (2.18) при $m > 1$, можно получить выражения для последующих членов в разложении (2.3). Каждый такой член может быть представлен в виде суммы частного решения соответствующего неоднородного уравнения (2.15) и общего решения однородного уравнения, т. е.

$$f_m = f_m' + K_m \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}}\right) \tag{3.16}$$

Ясно, что первое условие (2.17) всегда может быть удовлетворено путем подходящего выбора постоянной K_m в (3.16). Однако второе условие (2.17) может не удовлетворяться тождественно, начиная с некоторого номера $m = M$. Это обстоятельство имеет глубокий физический смысл.

Действительно, как было показано в [5], в общем случае не существует условий, при выполнении которых можно было бы одновременно использовать аппарат уравнений движения частиц и статистическое понятие «диффузии в пространстве скоростей», используемое при формулировке кинетического уравнения для системы частиц. Поэтому априори можно ожидать, что однозначное соответствие между описаниями взвешенных частиц при помощи кинетического уравнения и путем использования моментных урав нений типа (0.3) будет наблюдаться лишь с точностью до некоторого приближения по отклонению реального состояния дисперсной системы от равновесного, причем число M и определяет характер этого приближения.

Заметим, что выбор начального члена в разложении (2.3) в виде (1.3) не единствен. В качестве f_0 можно взять также сумму функции (1.3) и некоторых других функций, имеющих порядок $\geqslant\varepsilon$. В частности, можно выбрать f_0 в виде

$$f_0 = n\left(\frac{(\theta_0/\theta)^3}{8\pi^3\theta_0^{(1)}\theta_0^{(2)}\theta_0^{(3)}}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\theta_0}{\theta}\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j'^2}{\theta_0^{(j)}}\right) \tag{3.17}$$

где θ рассматривается как независимая динамическая переменная, соответствующая по своему смыслу температуре газа в кинетической теории. Легко видеть, что введение θ не вносит принципиальных затруднений в решение кинетического уравнения (0.1), если наряду с уравнениями (0.3), (0.4) использовать также уравнение (2.20). Хотя такой путь построения системы последовательных гидромеханических приближений и возможен (именно таким способом строилось приближение Эйлера в работе [1]), он все же мало естествен, ибо, как уже указывалось выше, псевдотурбулентную энергию взвешенных частиц нельзя, в отличие от температуры газа, рассматривать как независимую величину.

Отметим, что таким же путем можно решить кинетическое уравнение и в случае, когда дисперсную систему нельзя считать бесстолкновительной, однако вычисления оказываются значительно более сложными. Учет межчастичных столкновений существен лишь для систем, концентрация которых почти не отличается от концентрации плотноупакованного состояния; в первом приближении столкновения можно учесть, вводя в кинетическое уравнение обычный больцмановский член. Такое уравнение рассматривалось, например, в [6].

Результаты этой работы легко обобщаются также на полидисперсные системы с дискретным или непрерывным распределением частиц по размерам или по плотности. Для этого можно воспользоваться методом, развитым в [1], согласно которому каждая компонента диспергированной фазы рассматривается как независимая фаза.

4. *Приложение. Определение полной силы, действующей на частицу.* Выше использовалось выражение для силы, действующей на отдельную частицу, которое несколько отличается от соотношений, использовавшихся ранее (см. например, [1,6]). При выводе выражения для такой силы $\mathbf{F}$ будем исходить из представления для силы, действующей на единичную стоксову частицу в неограниченной вязкой жидкости, которое можно записать в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4, \qquad \mathbf{F}_1 = -\sigma\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} \\ \mathbf{F}_2 = d_0\sigma\beta\mathbf{u}, \quad \mathbf{F}_3 = \frac{1}{2}d_0\sigma\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad \beta = \frac{9\nu_0}{2a^2} \\ \mathbf{F}_4 = d_0\sigma\gamma\int_{-\infty}^{t}\frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \qquad \gamma = \frac{9}{2a}\left(\frac{\nu_0}{\pi}\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь a — радиус частицы, а дифференцирование по времени производится вдоль траектории частицы. Под $\mathbf{v}$ и ∇p подразумеваются скорость и градиент давления в жидкости, не возмущенной присутствием частицы; кроме того, предполагается, что линейные масштабы изменения $\mathbf{v}$ и p значительно превосходят a.

Распространение выражения (3.1) на ситуации, когда, во-первых, число Рейнольдса, характеризующее обтекание частицы, нельзя считать малым, а во-вторых, в жидкости имеется большое число взвешенных частиц, так что среднее расстояние между ними сравнимо с их радиусом, связано с необходимостью решения задачи о течении жидкости через решетку пульсирующих частиц. Такое решение в настоящее время отсутствует, поэтому ограничимся здесь феноменологическим подходом к проблеме.

Прежде всего ясно, что независимо от присутствия других частиц в системе сила $m\mathbf{g}$, действующая со стороны внешнего поля, не изменяется, а сила $\mathbf{F}_1$, обусловленная невозмущенным полем давления в жидкости, по-прежнему выражается в форме

$$\mathbf{F}_1(t, r) = \oint p(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\, d\mathbf{S} = -\sigma \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \sigma = \frac{4}{3}\pi a^3 \tag{4.2}$$

где интегрирование распространено по поверхности частицы. Таким образом, сила $\mathbf{F}_1$ сохраняет свой вид также и при наличии других частиц в потоке.

Для стационарной силы сопротивления, оказываемой жидкостью движению частицы при больших числах Рейнольдса и отличной от нуля $\langle\rho\rangle$, используем выражение, следующее из экспериментов по гидравлике жидкости, протекающей через слой закрепленных частиц. Обзор эмпирических зависимостей для F_1, полученных в таких экспериментах, содержится в [7]. Для определенности используем ниже зависимость Эргана

$$\mathbf{F}_2 = d_0\sigma\, [\beta_1 K_1(\rho) + \beta_2 K_2(\rho)\, u]\, \mathbf{u}, \qquad \beta_1 = 9\nu_0/2a^2, \qquad \beta_2 = 0.165/a \tag{4.3}$$

Здесь β_1 и β_2 — коэффициенты, зависящие только от физических параметров фаз, такие, что при $K_1 = 1$, $K_2 = 0$ и $K_1 = 0$, $K_2 = 1$ из (4.3) непосредственно получаются выражения для силы, относящиеся соответственно к ламинарному или развитому турбулентному режимам обтекания частицы.

При $R = 2au/\nu_0 \ll 1$ в (4.3) остается только первый член, описывающий силу сопротивления в форме Стокса, а при $R \gg 1$ существен только второй член, выражающий квадратичный закон сопротивления.

Функции $K_1(\rho)$ и $K_2(\rho)$ описывают влияние стесненности обтекания каждой частицы, вызванное присутствием соседних частиц в системе. Для них также имеются определенные эмпирические представления [7]. Ясно, что $K_1(\rho)$ и $K_2(\rho)$ должны обращаться в единицу при $\rho \to 0$.

Силу F_3, связанную с ускорением присоединенной массы жидкости при относительном движении частицы, можно представить, по аналогии с (4.1), в одной из следующих двух форм:

$$\mathbf{F}_3 = d_0\sigma\xi(\rho)\frac{d\mathbf{u}}{dt} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{F}_3 = d_0\sigma\frac{d}{dt}(\xi(\rho)\,\mathbf{u}) \tag{4.4}$$

где $\xi(\rho)$, заменяющая коэффициент $1/2$ в (4.1), представляет собой некоторую функцию от локального значения концентрации дисперсной системы. К сожалению, какие-либо опытные или теоретические данные относительно величины ξ в концентрированной дисперсной системе отсутствуют.

Для приближенной оценки коэффициента $\xi(\rho)$ рассмотрим обтекание отдельной частицы решетки идеальной жидкостью, используя при этом ячеечную модель стесненного обтекания (см., например, [2]). Исследуем относительное движение частицы со скоростью u_*, направленной обратно оси x. Используя сферическую систему координат, связанную с положением центра частицы в рассматриваемый момент времени, сформулируем граничные условия для потенциала течения φ в виде

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = -u_*\cos\theta, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a'} = 0, \qquad a' = \frac{a}{\rho^{1/3}} \tag{4.5}$$

Решение уравнения Лапласа для φ при условиях (4.5) имеет вид

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad A = \frac{\rho u_*}{1-\rho}, \qquad B = \frac{a^3 u_*}{2(1-\rho)}$$

$$\cos\theta = -(\mathbf{r}\mathbf{u}_*)\,/\,(r u_*) \tag{4.6}$$

Кинетическая энергия возмущенного течения жидкости внутри ячейки запишется в форме

$$E = \frac{d_0}{2}\int\limits_{a<r<a'} |\nabla\varphi|^2\, d\mathbf{r} = \frac{\sigma d_0 u_*^2}{4}\left[1 + \frac{\rho}{1-\rho}\left(3 + \frac{2/3}{1-\rho}\ln\rho\right)\right] \tag{4.7}$$

В системе координат, связанной с движущейся частицей, скорость жидкости равна, очевидно, $u_* + \nabla\varphi$. Средняя скорость жидкости в ячейке выразится тогда в форме

$$u_x = \frac{1}{\sigma_\rho - \sigma} \int\limits_{a<r<a'} \left(u_* + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dr = u_* \left[1 + \frac{\rho}{1-\rho}\left(1 + \frac{1/3}{1-\rho}\ln\rho\right)\right] = u$$

$$u_y = u_z = 0, \qquad \{x, y, z\} = \{r_1, r_2, r_3\}, \qquad \sigma_\rho = \sigma/\rho \tag{4.8}$$

Выражение (4.8) позволяет выразить величину (4.7) как функцию от u. Далее из (4.7) легко получить полный импульс возмущенного течения жидкости. В результате после стандартного вычисления получим для силы $\mathbf{F}_3$ второе соотношение (4.4), в котором

$$\xi(\rho) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\rho}{1-\rho}\left(3 + \frac{2/3}{1-\rho}\right)\ln\rho\right]\left[1 + \frac{\rho}{1-\rho}\left(1 + \frac{1/3}{1-\rho}\ln\rho\right)\right]^{-1} \tag{4.9}$$

С увеличением ρ от нуля величина $\xi(\rho)$ сначала убывает от значения $1/2$, достигает минимума, а затем начинает возрастать (до $7/4$ при $\rho \to 1$).

Естественное феноменологическое обобщение формулы для величины $\mathbf{F}_4$ из (4.1) можно представить в виде

$$\mathbf{F}_4 = d_0\sigma\gamma \int\limits_{t-t_0}^{t} \eta(\rho) \frac{d\mathbf{u}}{dt}\bigg|_{t=t'} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \tag{4.10}$$

где $\eta(\rho)$ — некоторая функция, имеющая порядок единицы, а t_0 — характерный интервал времени, в течение которого изменение локальной скорости жидкости в свободном объеме частицы продолжает еще сказываться на величине силы, действующей на эту частицу. Величину t_0 можно оценить как время распространения возмущения, вносимого частицей в течение жидкости, от поверхности частицы до поверхности ячейки.

Согласно основной идее ячеечной модели, возмущения вне ячейки не сказываются на процессах, протекающих внутри нее, поэтому такая оценка t_0 представляется вполне естественной. Скорость распространения волн от поверхности тела, колеблющегося в вязкой жидкости, равна по порядку величины $(\nu_0\omega)^{1/2}$, где ω — частота колебания. В рассматриваемом случае под ω нужно подразумевать частоту изменения u. Поэтому

$$t_0 \sim \frac{a' - a}{(\nu_0\omega)^{1/2}} = \frac{1 - \rho^{1/3}}{\rho^{1/3}} \frac{a}{(\nu_0\omega)^{1/2}} \tag{4.11}$$

Как и следовало ожидать, при $\rho \to 0$ время $t_0 \to \infty$ в соответствии с выражением (4.1) для изолированной частицы. Основной интерес ниже представляют взаимодействия в достаточно концентрированной дисперсной системе; ниже для определенности ограничимся рассмотрением систем, для которых $(1-\rho)^{1/3}\rho^{-1/3} \sim 1$—$10$.

Рассмотрим два предельных случая. В первом из них

$$t_0 \ll T \sim \frac{1}{\omega}, \qquad \omega^{1/2} \ll \left(\frac{\nu_0}{a^2}\right)^{1/2} \tag{4.12}$$

причем, если принять $u \sim a\omega$, то неравенство (4.12) равносильно неравенству $R \ll 1$, определяющему безынерционный режим обтекания частицы. В этом случае, учитывая соотношения (4.1), (4.11), получим оценку для силы (4.10)

$$F_4 \sim d_0\sigma\gamma\omega u \sqrt{t_0} \sim d_0\sigma \left(\frac{\nu_0}{a}\right)^{1/4} \omega^{3/4} u \ll d_0\sigma\left(\frac{\nu_0}{a^2}\right) u \sim F_2 \tag{4.13}$$

так что этой силой можно пренебречь по сравнению с силой вязкого взаимодействия частицы и жидкости.

Во втором случае неравенство (4.12) заменяется на обратное, так что в (4.10) можно принять $t_0 \approx \infty$. Заменяя u на $u \cos \omega t$, $u \approx \mathrm{const}$, получим вместо (4.13) оценку

$$F_4 \sim d_0\sigma\gamma \sqrt{\omega}\, u \sim d_0\sigma \left(\frac{\nu_0\omega}{a^2}\right)^{1/2} u \ll d_0\sigma\omega u \sim F_3 \tag{4.14}$$

т. е. и в этом случае силой $\mathbf{F}_4$ можно пренебречь по сравнению с $\mathbf{F}_3$.

Оценки (4.13) и (4.14) позволяют в некотором приближении исключить силу $\mathbf{F}_4$ из рассмотрения вообще. Это пренебрежение принципиально важно, ибо необходимость учета $\mathbf{F}_4$ означала бы необходимость пересмотра большинства соотношений, приведенных выше.

Действительно, кинетическое уравнение (0.1) получается из уравнения Колмогорова — Чепмена, справедливого лишь в предположении о марковости процесса случайного изменения переменных, описывающих локальное состояние дисперсной системы. В то же время зависимость силы $\mathbf{F}$ от истории движения частицы противоречила бы требованию о марковости этого процесса. В ряде работ (например, в [1]) компонента $\mathbf{F}_4$ силы $\mathbf{F}$ учитывалась, но ограничения, налагаемые этим обстоятельством на законность использования кинетического уравнения в форме (0.1), игнорировались.

Относя силу $\mathbf{F}$ к массе частицы m, получим, таким образом, уравнение для силы $\mathbf{H}$. Усредняя последнее, приходим к соотношению для $\langle\mathbf{H}\rangle$, записанному в (0.2), справедливому с точностью до членов второго порядка по псевдотурбулентным переменным. Вычитая величину $\langle\mathbf{H}\rangle$ из $\mathbf{H}$, имеем также представление для пульсационной силы $\mathbf{H}'$

$$\mathbf{H}' \approx \varkappa\left\{\beta_1\left(K_1\mathbf{u}' + \frac{dK_1}{d\langle\rho\rangle}\rho'\langle\mathbf{u}\rangle\right) + \beta_2\left[K_2(\langle u\rangle\,\mathbf{u}' + (\mathbf{u}_0\mathbf{u}')\langle\mathbf{u}\rangle) + \frac{dK_2}{d\langle\rho\rangle}\rho'\langle u\rangle\langle\mathbf{u}\rangle\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dt}\left(\xi\mathbf{u}' + \frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\rho'\langle\mathbf{u}\rangle\right) + \left(\mathbf{w}'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\xi\langle\mathbf{u}\rangle\right\} - \frac{1}{d_1}\frac{\partial p'}{\partial\mathbf{r}} \tag{4.15}$$

Сила $\mathbf{H}'$ содержит члены, пропорциональные различным псевдотурбулентным переменным. Выделяя в выражении (4.15) слагаемые, пропорциональные компонентам $\mathbf{w}'$, получим соотношение для тензора $\mathbf{c}$ в (0.2). Влияние остальных составляющих силы $\mathbf{H}'$ на случайное поведение частиц диспергированной фазы учитывается, согласно основному допущению, используемому при формулировке уравнения (0.1), путем введения в это уравнение члена, описывающего диффузию в пространстве скоростей.

5. *Приложение. Определение характеристик псевдотурбулентности в равновесном приближении.* Случайные псевдотурбулентные переменные удовлетворяют стохатическим уравнениям, которые получаются из уравнений движения частиц и жидкости в промежутках между частицами [1]. Уравнение Ланжевена для отдельной частицы имеет вид

$$d\mathbf{w}'/dt = \mathbf{H}_0' \tag{5.1}$$

(выражение для $\mathbf{H}_0'$, справедливое в равновесном состоянии, получается из (4.15) после пренебрежения членами, пропорциональными производным динамических переменных).

Стохастические уравнения для жидкости получаются после вычитания из уравнений Навье — Стокса соответствующих усредненных уравнений [1]. Таким путем в равновесном состоянии имеем

$$\left(\frac{d}{dt} + \langle\mathbf{u}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\rho' - (1 - \langle\rho\rangle)\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial\mathbf{r}} = 0 \tag{5.2}$$
$$\left(\frac{d}{dt} + \langle\mathbf{u}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}' = -\frac{1}{d_0(1-\langle\rho\rangle)}\frac{\partial p'}{\partial\mathbf{r}} + \frac{2\nu_0 S}{1-\langle\rho\rangle}\frac{\partial\mathbf{e}_d'}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\langle\rho\rangle}{\varkappa(1-\langle\rho\rangle)}\mathbf{H}'$$

Уравнения (5.1), (5.2) позволяют судить об изменениях величин p', $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ при заданной случайной функции $\rho'(t, \mathbf{r})$, характеризующей флуктуации локальной концентрации дисперсной системы, т. е. дают возможность выразить статистические характеристики указанных величин через соответствующие характеристики ρ'.

Проще всего сделать это в рамках корреляционной теории стационарных случайных процессов, для чего необходимо представить ρ', p', $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ в виде интегралов Фурье—

Стильтьеса и рассмотреть спектральные меры, входящие в эти интегралы. Из (5.2) получается следующая система уравнений для спектральных мер:

$$i\omega dZ_w = dZ_H, \qquad (\omega + \langle \mathbf{u}\rangle \mathbf{k})\, dZ_\rho - (1 - \langle\rho\rangle)\, \mathbf{k} dZ_v = 0 \tag{5.3}$$

$$(\omega + \langle \mathbf{u}\rangle \mathbf{k})\, dZ_v = -\frac{i\mathbf{k}}{d_1(1-\langle\rho\rangle)} dZ_p - \frac{\nu_0 S}{1-\langle\rho\rangle}\left[k^2 dZ_v + \frac{1}{3}\mathbf{k}(\mathbf{k} dZ_v)\right] - \frac{\langle\rho\rangle}{\varkappa(1-\langle\rho\rangle)} dZ_H$$

Представление для dZ_H следует из (4.15)

$$dZ_H = \varkappa\left\{(\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 \langle u\rangle)\, dZ_u + \beta_2 K_2 (\mathbf{u}_0 dZ_u)\langle \mathbf{u}\rangle + \left(\beta_1 \frac{dK_1}{d\langle\rho\rangle} + \beta_2 \frac{dK_2}{d\langle\rho\rangle}\langle u\rangle\right)\langle \mathbf{u}\rangle dZ_\rho + i\omega\xi dZ_u + i\omega \frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\langle \mathbf{u}\rangle dZ_\rho\right\} - \frac{i\mathbf{k}}{d_1} dZ_p, \qquad dZ_u = dZ_v - dZ_w \tag{5.4}$$

Уравнения позволяют выразить все спектральные меры и далее все спектральные плотности через спектральную меру dZ_ρ и спектральную плотность $\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k})$ случайного процесса ρ'. Пространственно-временные корреляционные функции различных псевдотурбулентных процессов получаются из соответствующих спектральных плотностей после интегрирования последних по частотам ω и волновому вектору $\mathbf{k}$ пульсаций. Такое интегрирование проводится стандартным путем; необходимое выражение для $\Psi_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k})$ приведено, например, в [8]. В результате все характеристики псевдотурбулентности в равновесном приближении, фигурирующие в динамических уравнениях, рассмотренных выше, выражаются в виде определенных функций от динамических переменных.

Поступила 9 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А. Приближение Эйлера для бесстолкновительных полидисперсных суспензий. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
2. Сафрай В. М. О применении ячеечной модели к расчету вязкости дисперсных систем. ПМТФ, 1970, № 1.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Буевич Ю. А. Режимы ламинарных стационарных течений двухкомпонентных дисперсных систем. Вертикальные потоки. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 3.
5. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.
6. Мясников В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
7. Аэров М. Э., Тодес О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
8. Буевич Ю. А. Спектральная теория концентрации дисперсных систем. ПМТФ, 1970, № 6.