

МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ГИДРОМЕХАНИКЕ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Р. И. Нигматулин

(Москва)

На основе представлений о многофазной сплошной среде, изложенных в [1], получены уравнения механики двухфазной дисперсной смеси в рамках «двухдавленной», двухскоростной и двухтемпературной модели с учетом мелкомасштабного движения около включений, фазовых переходов, поверхностной энергии и сжимаемости обеих составляющих. Под мелкомасштабным движением здесь понимаются течения несущей среды около включений из-за их радиальных пульсаций и относительного движения в несущей фазе. Введение поверхностной фазы позволило использовать уравнения притока тепла для каждой фазы в виде, который приводит к более удобному способу учета эффектов, связанных с фазовыми превращениями. Рассмотрены основы термодинамики таких сред. Получено явное выражение для производства энтропии смеси, исходя из которого можно сформулировать линейные феноменологические соотношения, характеризующие межфазовые взаимодействия, что и проделано на примере уравнения кинетики фазовых переходов.

В качестве области приложения, где требуется совместный учет указанных эффектов, можно указать течения жидкостей, содержащих пузырьки газа (пара), в частности распространение возмущений в таких смесях. При давлениях и температурах, достаточно близких к критическим, может оказаться необходимым и учет сжимаемостей как пара, так и жидкости.

Гидродинамические уравнения движения жидкости с пузырьками газа в рамках «двухдавленной» модели (с учетом радиального мелкомасштабного движения вокруг «пузыря») в более частных случаях рассмотрены в работах [2-4]. Распространению малых возмущений и ударных волн в таких средах посвящены работы [5-8]. В [6] имеется интересный анализ основных физических явлений в жидкости, содержащей пузырьки газа.

§ 1. Рассмотрим гетерогенную смесь двух сжимаемых фаз или веществ, в каждой из которых отсутствуют эффекты прочности. Причем вторая фаза присутствует в виде отдельных одинакового радиуса a сферических включений (пузырей, частиц, капель), непосредственными взаимодействиями (например столкновениями) между которыми можно пренебречь. Первая фаза — несущая среда. Полагаем справедливым основное допущение механики сплошной среды — расстояния, на которых параметры течения смеси меняются существенно (вне поверхности разрыва), много больше характерных размеров указанных включений и расстояний между ними. Это позволяет описывать дисперсную смесь как совокупность двух (или более, если размеры включений можно представить в виде дискретного набора значений) континуумов, заполняющих один и тот же объем. В каждой точке объема, занятого смесью, можно ввести макроскопические скорости фаз v_i , давления p_i , объемные содержания фаз α_i , средние плотности ρ_i и т. д.

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность смеси, ρ_i^0 — истинная плотность вещества i -й фазы (составляющей), n — число взвешенных частиц (пузырей) в единице объема смеси.

Следуя [1], имеем следующие дифференциальные уравнения масс и импульсов каждой фазы, а также уравнение для числа частиц

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i v_i) &= J_{ji} - J_{ij}, & \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n v_2) &= \psi & (1.2) \\ \rho_i \frac{d_i v_i}{dt} &= \nabla^k \sigma_i^k + r_{ji} + J_{ji} (v_{ji} - v_i) - J_{ij} (v_{ij} - v_i) + \rho_i F_i \\ \left(\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \nabla^k = \frac{\partial}{\partial t} \Big| + v_i^k \Big| \frac{\partial}{\partial x^k}; r_{ji} = -r_{ij}, \quad i, j = 1, 2; i \neq j \right) \end{aligned}$$

Здесь и далее везде суммирование только по верхним индексам, относящимся к координатным осям. Далее J_{ij} — «наблюдаемые» макроскопические скорости фазовых превращений ($J_{ij} \geq 0$), дающие скорость только образования j -й фазы (в противном случае $J_{ij} = 0$) за счет i -й в единице объема и времени; v_{ij} характеризует импульс массы, терпящей фазовый переход $i \rightarrow j$; ψ характеризует изменение числа частиц диспергированной фазы за счет процессов дробления, слипания, образования новых включений. В данной работе будет рассматриваться случай отсутствия указанных процессов, т. е.

$$\psi = 0 \quad (1.3)$$

Далее r_{ji} — сила взаимодействия между фазами, отнесенная к единице объема смеси; F_i — внешние массовые силы; σ_i — тензор поверхностных сил, действующий на i -ю фазу.

Для дисперсных систем при достаточно малых объемных содержаниях взвешенной фазы α_2 можно принять [1]

$$\sigma_1^{kl} = -p_1 \delta^{kl} + \tau_1^{kl}, \quad \sigma_2^{kl} = 0 \quad (1.4)$$

где δ^{kl} — символ Кронекера, p_1 и τ_1^{kl} — давление и тензор вязких напряжений несущей среды. Причем последний определяется внешним тензором скоростей деформаций

$$e_1^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^k}{\partial x^l} + \frac{\partial v_1^l}{\partial x^k} \right) \quad (1.5)$$

а влияние смещений на межфазных границах можно учесть поправками в коэффициентах вязкости.

Силу взаимодействия между фазами r_{12} представим в виде

$$r_{12} = f_f + f_m + f_r - \alpha_2 \nabla p_1 = f_f + r - \alpha_2 \nabla p_1, \quad r = f_m + f_r \quad (1.6)$$

где f_f — сила трения (Стоксова сила) между фазами за счет вязких сил; f_m — сила «присоединенных» масс; f_r — сила из-за градиентов в поле скоростей несущей фазы v_1 (сила Магнуса или Жуковского); последняя составляющая $\alpha_2 \nabla p_1$ связана с воздействием поля давления несущей фазы на включения (сила Архимеда). Для этих сил можно использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_f &= \alpha_2 \rho_1^0 K (v_1 - v_2) & (K = K(\alpha_2, |v_1 - v_2|, a, \dots)) & (1.7) \\ f_m &= \alpha_2 \rho_1^0 \chi' \frac{d_2}{dt} (v_1 - v_2), & f_r &= \alpha_2 \rho_1^0 \chi'' (v_1 - v_2) \times \text{rot } v_1 \end{aligned}$$

Коэффициенты K , χ' , χ'' учитывают влияние формы частиц, их неоднородности и другие факторы. Выделение составляющей τ в (1.6) необходимо для дальнейшего и объясняется тем, что τ так же, как и сила Архимеда, не связана непосредственно с эффектами вязкости.

§ 2. Для дальнейшего необходимо уточнить выражение для энергии единицы массы смеси E , которая складывается из внутренней u и кинетической k энергий среды

$$E = u + k \quad (2.1)$$

В теориях взаимопроникающего движения (см. работу [1] и соответствующие в ней ссылки) энергия каждой составляющей полагается пропорциональной ее массе, а энергия смеси считается аддитивной по массе фаз

$$\rho u = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2, \quad \rho k = \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 \quad (2.2)$$

Такое представление (первая формула (2.2)) игнорирует особенности поверхностного слоя толщиной порядка радиуса молекулярного взаимодействия в конденсированной фазе ($\sim 10^{-9}$ м), представляющей границу раздела фаз. Этот так называемый поверхностный, или капиллярный, эффект учитывают (по Гиббсу), вводя [9,10] поверхностную составляющую внутренней энергии смеси (и соответственно некую дополнительную фазу — поверхностную, или капиллярную, которая иногда будет называться σ -фазой), пропорциональную поверхности раздела фаз

$$\rho u = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \rho u_\sigma^* \quad (u_\sigma^* = 4\pi a^2 u_\sigma) \quad (2.3)$$

Здесь u_σ^* и u_σ — поверхностные энергии, приходящиеся соответственно на одно включение и единицу поверхности. Последняя, так же как и удельные внутренние энергии фаз u_i , является термодинамическим параметром.

Далее используем гипотезу локального равновесия фаз и капиллярного слоя (что позволяет ввести соответствующие температуры T_i ($i = 1, 2$) и T_σ) и следующие уравнения состояния

$$u_i = u_i(\rho_i, T_i), \quad p_i = p_i(\rho_i, T_i), \quad s_i = s_i(\rho_i, T_i) \\ u_\sigma = \sigma - T_\sigma \frac{d\sigma}{dT_\sigma}, \quad s_\sigma = - \frac{d\sigma}{dT_\sigma}, \quad \sigma = \sigma(T_\sigma) \quad (2.4)$$

где s_i и s_σ — соответствующие удельные энтропии фаз и единичной поверхности раздела фаз; σ — коэффициент поверхностного натяжения, зависящий от температуры и материала обеих фаз.

Введение понятия σ -фазы может быть связано не только с капиллярными эффектами, но и с учетом особых свойств тонких слоев вокруг включений другого характера (например, пламя вокруг горячей частицы, когда это пламя имеет температуру, существенно отличную от температуры как частицы, так и несущей среды).

Уравнения состояния (2.4) подчиняются соотношениям Гиббса

$$T_i \frac{d_i s_i}{dt} = \frac{d_i u_i}{dt} + p_i \frac{d_i}{dt} \frac{1}{\rho_i}, \quad T_\sigma \frac{d_2 s_\sigma^*}{dt} = \frac{d_2 u_\sigma^*}{dt} - \sigma \frac{d_2}{dt} (4\pi a^2) \quad (2.5)$$

Кинетическая энергия смеси представлена в (2.2) только через энергию макроскопического движения фаз со скоростями v_i . В некоторых случаях (особенно при движении жидкости с пузырями или вообще, когда плотность материала несущей фазы ρ_1° больше или того же порядка, что и плотность материала взвешенной фазы ρ_2°) необходимо учитывать и кинетическую энергию мелкомасштабных (с характерным линейным размером, равным по порядку размеру включений) течений, макроскопический импульс которых равен нулю. Это в первую очередь энергия радиального пульсационного движения вокруг пузыря k_p и энергия возмущений, которые будем называть псевдовихревыми, в несущей фазе из-за относительного движения в ней включений k_v (k_p и k_v — соответствующие энергии приходящиеся на одно включение). Таким образом, имеем

$$\rho k = \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + nk_p + nk_v \quad (2.6)$$

Соотношения (2.3) и (2.6) представляют обобщенную аддитивность внутренней и кинетической энергий смеси, причем аналогично (2.3) определяются и другие термодинамические потенциалы смеси (энтропия, свободная энергия и др.).

Выделим фиксированный объем V , ограниченный неподвижной поверхностью S , и аналогично [1] определим понятие субстанциональной производной полной энергии смеси, представляющей изменение энергии в неподвижном объеме, вызванное лишь взаимодействием с внешней средой и не связанное с конвективным переносом вещества, т. е. имеем

$$\int_V \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV = - \int_S \left[\rho_1 \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) v_{1n} + \rho_2 \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_{2n} + (u_{\sigma^*} + k_p + k_v) \times \right. \\ \left. \times v_{2n} \right] dS + \int_V \rho \frac{dE}{dt} dV \quad (2.7)$$

После применения формулы Гаусса — Остроградского следует выражение для субстанциональной производной полной энергии среды

$$\rho \frac{dE}{dt} = \rho_1 \frac{d_1}{dt} \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \frac{d_2}{dt} \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) + \\ + n \frac{d_2}{dt} (u_{\sigma^*} + k_p + k_v) + (J_{12} - J_{21}) (u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)) \quad (2.8)$$

Определения субстанциональных производных, аналогичные (2.8), легко получить и для других аддитивных в обобщенном смысле функций, относящихся ко всей смеси.

§ 3. Из (1.2) с учетом (1.6) следует уравнение кинетической энергии макроскопического движения среды

$$\rho_1 \frac{d_1}{dt} \frac{v_1^2}{2} + \rho_2 \frac{d_2}{dt} \frac{v_2^2}{2} = v_1 \nabla^k \sigma_1^k + v_2 \nabla^k \sigma_2^k - (J_{12} - J_{21}) \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \rho_1 \mathbf{F}_1 v_1 + \\ + \rho_2 \mathbf{F}_2 v_2 - \mathbf{r}_{12} (v_1 - v_2) + J_{21} (v_1 - v_2) \left(v_{21} - \frac{v_1 + v_2}{2} \right) - J_{12} (v_1 - v_2) \times \\ \times \left(v_{12} - \frac{v_1 + v_2}{2} \right) \quad (3.1)$$

Анализ (3.1), (1.2) и движения тел в жидкости показывает, что силовое взаимодействие между фазами приводит: 1) к переходу кинетической энергии макроскопического движения из одной фазы в другую; 2) к диссипации энергии макроскопического движения во внутреннюю энергию смеси (в тепло) из-за вязких сил с интенсивностью $f_f (v_1 - v_2)$; 3) к обмену между энергией макроскопического движения и энергией мелкомасштабных псевдовихревых течений nk_v из-за действия составляющих r_{12} , имеющих «невязкую» природу (сила Магнуса, эффект присоединенных масс) с интенсивностью $r (v_1 - v_2)$; 4) к обмену энергией с внешней средой из-за градиента давления ∇p_1 , т. е. за счет поверхностных сил.

Отсутствие понятия энергии мелкомасштабных течений в теориях взаимопроникающего движения вынуждает относить эффект, отмеченный в пункте 3, к чисто диссипативному, т. е. к переходу кинетической энергии непосредственно в тепло. Заметим, что при обтекании включений с достаточно большими скоростями в силу r могут войти дополнительные составляющие, переводящие кинетическую энергию макроскопического движения в вихревое движение в следе частиц.

Уравнение кинетической энергии мелкомасштабного движения nk_v , вызванного несовпадением скоростей фаз, можно записать в виде

$$n \frac{dk_v}{dt} = r (v_1 - v_2) - n\eta_{v1} - n\eta_{v2} \quad (3.2)$$

где первое слагаемое в правой части определяет обмен с кинетической энергией макроскопического движения, как уже отмечалось, из-за силового воздействия фаз, а второе и третье слагаемые $n\eta_{vi}$ ($i = 1, 2$) определяют диссипацию энергии мелкомасштабного псевдовихревого движения во внутреннюю (тепловую) энергию соответственно первой и второй фаз.

В качестве некоторого приближения можно пренебречь движением (и диссипацией) внутри включений, а η_{v1} определять как диссипативную [11] функцию

$$\eta_{v1} = \frac{\rho_1^0 v_1}{2} \int_{R>0} \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \right) dV = - \rho_1^0 v_1 \int_{R=a} \frac{\partial}{\partial n} w^2 dS \quad (3.3)$$

(v_1 — кинематический коэффициент вязкости первой фазы), определяемую полем скоростей $w^i(x^j)$, вызванным движением сферы со скоростью w_v в идеальной несжимаемой жидкости, и описываемую потенциалом φ_v и кинетической энергией возмущения k_v

$$\varphi_v = \frac{w_v a^3}{2} \frac{x}{R^3}, \quad k_v = \frac{2\pi}{3} a^3 \rho_1^0 w_v^2 \quad (3.4)$$

Т. е. с учетом (3.3) и (3.4) имеем

$$\eta_{v1} = 36\pi a v_1 \rho_1^0 w_v^2 = 54 v_1 a^{-2} k_v, \quad \eta_{v2} = 0 \quad (3.5)$$

§ 4. В постановке Рэлея [11] рассмотрим задачу о пульсациях пузыря в несжимаемой жидкости с плотностью ρ_1^0 с учетом фазовых переходов на поверхности раздела фаз. Это движение описывается потенциалом поля скоростей φ , интегралом Коши — Лагранжа

$$\varphi = - \frac{a^2 w_a^2}{R}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho_1^0} = F(t) \quad (4.1)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} R = a, & \quad w = w_a, & \quad p = p_a = p_0 - 2\sigma/a \\ R = \infty, & \quad w = 0, & \quad p = p_\infty \end{aligned} \quad (4.2)$$

где p_0 — давление в пузыре. Кроме того, имеет место связь между скоростью поверхности раздела фаз a и массовой скоростью жидкости на этой поверхности w_a

$$a = w_a + (j_{12} - j_{21})/\rho_1 \quad (4.3)$$

где j_{ij} — скорость фазового превращения, отнесенная к единице поверхности.

Кинетическая энергия рассматриваемого движения k и ее производная по времени k' имеют вид

$$k = 4\pi\rho_1 \int_a^\infty \frac{w^2}{2} R^2 dR = 2\pi\rho_1 a^3 w_a^2, \quad k' = 4\pi\rho_1 a^2 w_a \left(\frac{3}{2} \underline{a} w_a + a w_a \right) \quad (4.4)$$

(4.1) — (4.4) следует

$$k' = 4\pi a^2 [(p_0 - 2\sigma/a - p_\infty) w_a + 1/2 (j_{21} - j_{12}) w_a^2] \quad (4.5)$$

Действие вязкости можно учесть аналогично (3.3) введением в правую часть (4.5) диссипативной функции, определяемой полем скоростей (4.1)

$$\eta_{p1} = 16\pi\rho_1 \nu_1 a w_a^2 = 8\nu_1 k a^{-2} \quad (4.6)$$

Таким образом получим уравнение кинетической энергии

$$k' = 4\pi a^2 [(p_0 - 2\sigma/a - p_\infty) w_a + 1/2 (j_{21} - j_{12}) w_a^2] - 8\nu_1 k a^{-2} \quad (4.7)$$

которому соответствует обобщенное уравнение Ламба пульсаций пузырька в несжимаемой жидкости, учитывающее поверхностное натяжение, фазовые превращения и вязкостную диссипацию

$$\frac{3}{2} w_a^2 + a w_a \dot{} + \frac{2(j_{12} - j_{21})}{\rho_1} w_a = \frac{p_0 - p_\infty - 2\sigma/a}{\rho_1} - \frac{4\nu_1}{a} w_a \quad (4.8)$$

Закон изменения энергии мелкомасштабного пульсационного радиального движения в двухфазной среде будем задавать, исходя из уравнений (4.7) или (4.8), рассматривая их как некие кинетические соотношения, отождествляя давление [вдали (p_∞) и внутри (p_0)] пузыря соответственно с давлением первой (p_1) и второй (p_2) фаз, величину k с кинетической энергией пульсационного радиального движения k_p , приходящейся на одно включение, скорость w_a со скоростью w_{p1} , определяющей радиальную скорость несущей среды на поверхности раздела фаз. В результате имеем

$$\begin{aligned} a \frac{d_2 w_{p1}}{dt} + \frac{3}{2} w_{p1}^2 + \frac{J_{12} - J_{21}}{2\pi a^2 n \rho_1} w_{p1} &= \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/a}{\rho_1} - \frac{4\nu_1}{a} w_{p1} \\ \frac{d_2 a}{dt} &= w_{p1} + \frac{J_{12} - J_{21}}{4\pi n \rho_1 a^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уравнению (4.9) соответствует уравнение энергии мелкомасштабного радиального движения

$$n \frac{d_2 k_p}{dt} = 4\pi a^2 n (p_2 - p_1 - 2\sigma/a) w_{p1} - n\eta_{p2} - n\eta_{p1} \quad (4.10)$$

$$k_p = 2\pi\rho_1 a^3 w_{p1}^2, \quad \eta_{p1} = 8\nu_1 k_p a^{-2}, \quad \eta_{p2} = 1/2 (J_{12} - J_{21}) w_{p1}^2 n^{-1}$$

Первое слагаемое в правой части (4.10) описывает переход кинетической энергии в энергию сжатия и поверхностного натяжения и обратно, второе — приток (из-за перехода $2 \rightarrow 1$) или сток (из-за перехода $1 \rightarrow 2$) кинетической энергии за счет внутренней энергии второй фазы и, наконец, третье слагаемое — диссипация кинетической энергии во внутреннюю (тепловую) энергию первой фазы.

§ 5. Для дальнейшего определения поведения системы необходимо привлечь [12] уравнения притока тепла каждой фазы, которые в общем случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} \Big| &= \rho_i A_i - J_{ji} x_{i,j}^r - J_{ij} x_{i,i,j} - q_{i\sigma} - \nabla q_i + \rho_i Q_i \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \\ n \frac{d_2 u_\sigma}{dt} &= n A_\sigma - J_{12} x_{\sigma,12} - J_{21} x_{\sigma,21} + q_{1\sigma} + q_{2\sigma} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь A_i ($i = 1, 2, \sigma$) представляет мощность работы внутренних сил, отнесенную соответственно к единице массы фазы или к одному включению. Остальные слагаемые — притоки тепла; $x_{l,j}$ ($l = 1, 2, \sigma$; $i, j = 1, 2$; $i \neq j$) поток тепла от l -й фазы к веществу, претерпевающему превращение $j \rightarrow i$ и отнесенный к его массе; $q_{i\sigma} = -q_{\sigma i}$ — поток тепла, отнесенный к единице объема смеси, от i -й фазы к поверхности раздела фаз, не связанный с фазовыми переходами; q_i и $\rho_i Q_i$ — внешний поверхностный поток тепла (теплопроводность, излучение) и мощность объемных тепловых источников.

Для рассматриваемых дисперсных смесей обычно можно принять

$$q_1 = -\lambda_1 \nabla T_1, \quad q_2 = 0, \quad q_{i\sigma} = 4\pi a^2 n \beta_i (T_i - T_\sigma) \quad (5.2)$$

где λ_i — коэффициент теплопроводности материала i -й фазы, β_i — коэффициент теплоотдачи от поверхности раздела фаз к i -й фазе, для которого можно использовать экспериментальные соотношения типа

$$\begin{aligned} N_{Nu, i} &= F_i (N_{Pr, i}, N_{Re}) \\ \left(N_{Nu, i} = \frac{2\beta_i a}{\lambda_i}, \quad N_{Pr, i} = \frac{c_{pi} v_i \rho_i}{\lambda_i}, \quad N_{Re} = \frac{2|v_1 - v_2| a}{v_1} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

где c_{pi} — теплоемкость при постоянном давлении i -ой фазы.

Определение так называемой работы внутренних сил каждой составляющей, вообще говоря, связано с выявлением поведения каждого включения, что в рассматриваемых условиях большого количества таких включений представляет непосильную (а для описания в среднем и ненужную) задачу. Поэтому, следуя [1], мощность работы внутренних сил фазы будем задавать как некую среднюю величину через макроскопические параметры, исходя из анализа движения тела в жидкости и принятых соотношений (3.1), (3.2), (4.10)

$$\begin{aligned} \rho_i A_i &= \frac{\alpha_i p_i}{\rho_i} \frac{d_i \rho_i}{dt} + \tau_i^{kl} e_i^{kl} + \kappa_i f_j (v_1 - v_2) + n \eta_{pi} + n \eta_{vi} + J_{ji} \frac{(v_{ji} - v_i)^2}{2} - \\ &\quad - J_{ij} \frac{(v_{ij} - v_i)^2}{2} \\ (\kappa_1 + \kappa_2 = 1; i, j = 1, 2; i \neq j) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено работой внутренних сил давления на сжатие i -й фазы (обратимая работа). Остальные слагаемые дают диссипируемую энергию (некомпенсированное тепло) в i -й фазе из-за внутренних вязких сил, проявляющихся за счет градиентов в поле средних скоростей ($\tau_1^{kl} e_1^{kl}$, где e_1^{kl} — тензор деформации, определяемый полем скоростей v_1), за счет вязкого взаимодействия с другой фазой ($\kappa_i \mathbf{f}_i (v_1 - v_2)$), сдвиговых деформаций при радиальном и псевдовихревом мелко-масштабном течении ($n\eta_{pi}$ и $n\eta_{vi}$) и, наконец, за счет необратимого обмена импульсом при фазовых превращениях [1] (последние два слагаемых). Коэффициенты κ_i показывают долю диссипируемой из-за силы Стокса \mathbf{f}_i кинетической энергии макроскопического движения смеси, переходящую непосредственно во внутреннюю энергию i -й фазы. Во многих случаях, когда сдвиговыми деформациями включений по сравнению со сдвиговыми деформациями несущей среды можно пренебречь, справедливы следующие соотношения:

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 0, \quad v_{21} = v_{12} = v_2 \quad (5.5)$$

Мощность работы внутренних сил σ -фазы можно представить [9,10] в виде

$$A_\sigma = 4\pi a^2 \frac{2\sigma}{a} \frac{d_2 a}{dt} = 8\pi a \sigma \frac{d_2 a}{dt} \quad (5.6)$$

что соответствует работе внутренних сил в сферической равномерно натянутой упругой пленке, в которой усилие, приходящееся на единицу длины, равно σ .

Исходя из определения (2.8) и уравнений для составляющих энергии смеси (3.1), (3.2), (4.10), (5.1) с учетом (1.4), (1.6), получим явное выражение для субстанциональной производной полной энергии смеси

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} = & J_{12} \left[u_2 - u_1 - (x_{1,12} + x_{2,12} + x_{\sigma,12}) + p_2 \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} - \frac{1}{\rho_1^\circ} \right) + \frac{2\sigma}{a} \frac{1}{\rho_1^\circ} \right] - \\ & - J_{21} \left[u_2 - u_1 + (x_{1,21} + x_{2,21} + x_{\sigma,21}) + p_2 \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} - \frac{1}{\rho_1^\circ} \right) + \frac{2\sigma}{a} \frac{1}{\rho_1^\circ} \right] - \\ & - \nabla p_1 (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \nabla^k \tau_1^{kl} v_1^l - \nabla q_1 + \rho_1 \mathbf{F}_1 v_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2 v_2 + \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Полная энергия среды может меняться только за счет внешнего воздействия (описываемого последними восемью слагаемыми), но никак не за счет внутренних процессов. Поэтому выражения в квадратных скобках в правой части (5.7) типа источников, связанных с фазовыми переходами, должны равняться нулю, т. е.!

$$\begin{aligned} x_{1,12} + x_{2,12} + x_{\sigma,12} = u_2 - u_1 + p_2 \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} - \frac{1}{\rho_1^\circ} \right) + \frac{2\sigma}{a\rho_1^\circ} = i_2 - i_1 - \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/a}{\rho_1^\circ} \\ x_{1,21} + x_{2,21} + x_{\sigma,21} = u_1 - u_2 + p_2 \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) - \frac{2\sigma}{a\rho_1^\circ} = i_1 - i_2 + \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/a}{\rho_1^\circ} \\ (i_j = u_j + p_j/\rho_j^\circ, \quad j = 1,2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

где i_j — энтальпия соответствующей фазы.

Конкретизация модели требует определения энергий $x_{l,ij}$, определяющих затраты энергий l -й фазы на превращение $i \rightarrow j$ единицы массы, при известных суммарных (по l) эффектах (5.8). Эти дополнительные соотношения (аналогично зависимостям для коэффициентов аккомодации в кинетической теории газов, отображающим взаимодействие среды с поверхностями) должны постулироваться.

Одним из возможных вариантов такого рода соотношений можно использовать некоторое обобщение зависимостей [1], использованных для двухфазной среды с равными давлениями фаз ($p_1 = p_2$) и при отсутствии капиллярных эффектов, т. е. соотношения для $x_{l,ij}$, которые по некоторой аналогии с кинетической теорией газов можно назвать аккомодационными, имеют вид

$$\begin{aligned} x_{1,12} = i_{2s}(p_2) - i_1, \quad x_{2,12} = i_2 - i_{2s}(p_2) - \frac{p_2 - p_1}{\rho_1^0}, \quad x_{\sigma,12} = \frac{2\sigma}{a\rho_1^0} \\ x_{2,21} = i_{1s}(p_2) - i_2, \quad x_{1,21} = i_1 - i_{1s}(p_2) + \frac{p_2 - p_1}{\rho_1^0}, \quad x_{\sigma,21} = -\frac{2\sigma}{a\rho_1^0} \end{aligned} \quad (5.9)$$

где индекс s относится к состоянию насыщения над плоской поверхностью раздела фаз. Тот факт, что в (5.9) используются характерные энтальпии фаз i_{js} при состоянии насыщения, взятые при давлении p_2 , объясняется тем, что фазовые переходы происходят на поверхности раздела фаз, с одной стороны которой давление равно p_2 , а с другой стороны $p_2 - 2\sigma/a$.

Наиболее существенным моментом, отображенным в (5.9), является то, что энергия, равная теплоте перехода $i \rightarrow j$, обеспечивается главным образом i -й фазой. Другим возможным и иногда более удобным вариантом аккомодационных соотношений являются

$$x_{1,12} = x_{2,12} = x_{1,21} = x_{2,21} = 0, \quad x_{\sigma,12} = -x_{\sigma,21} = i_2 - i_1 - (p_2 - p_1 - 2\sigma/a) / \rho_1^0 \quad (5.10)$$

Уравнения (5.10) роль источника или стока тепла, необходимого для фазовых переходов, отводят поверхностной фазе. Заметим, что наличие «обратной» связи σ -фазы с первой и второй фазами за счет $q_{\sigma 1}$ и $q_{\sigma 2}$ приведет к тому, что дополнительный источник или сток тепла в σ -фазе по сравнению с (5.9) компенсируется тепловыми потоками со стороны первой и второй фаз, а фактические результаты, обеспечиваемые (5.9) и (5.10), будут близки между собой.

Таким образом, система уравнений, описывающая взаимопроникающее движение двухфазной дисперсной смеси с учетом мелкомасштабного движения вокруг включений, несовпадения давлений фаз, сжимаемостей фаз и фазовых переходов на имеющихся поверхностях раздела фаз, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla (\rho_1 \mathbf{v}_1) &= J_{21} - J_{12}, \quad \frac{d_2 a}{dt} = w_{p1} + \frac{J_{12} - J_{21}}{4\pi a^2 n \rho_1^0} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla (\rho_2 \mathbf{v}_2) &= J_{12} - J_{21}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n \mathbf{v}_2) = 0 \\ \rho_1 \frac{d_1 \mathbf{v}_1}{dt} &= -\alpha_1 \nabla p_1 + \nabla^k \tau_1^k - \mathbf{r} - \mathbf{f}_f + J_{21} (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_1) - J_{12} (\mathbf{v}_{12} - \mathbf{v}_1) + \rho_1 \mathbf{F}_1 \\ \rho_2 \frac{d_2 \mathbf{v}_2}{dt} &= -\alpha_2 \nabla p_1 + \mathbf{r} + \mathbf{f}_f - J_{21} (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_2) + J_{12} (\mathbf{v}_{12} - \mathbf{v}_2) + \rho_2 \mathbf{F}_2 \\ a \frac{d_2 w_{p1}}{dt} + \frac{3w_{p1}^2}{2} + \frac{(J_{12} - J_{21}) w_{p1}}{2\pi a^2 n \rho_1^0} &= \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/a}{\rho_1^0} - \frac{4v_1 w_{p1}}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n \frac{d_2 k_v}{dt} &= \mathbf{r} (v_1 - v_2) - n\eta_{v1} - n\eta_{v2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_r \\
\rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 p_1}{\rho_1^\circ} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + \tau_1^{kl} e_1^{kl} + \kappa_1 \mathbf{f}_f (v_1 - v_2) + n\eta_{v1} + 16\pi n \rho_1^\circ v_1 a \omega_{p1}^2 + \\
&+ J_{21} \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2} - J_{12} \frac{(v_{12} - v_1)^2}{2} - J_{21} x_{1,21} - J_{12} x_{1,12} - q_{1\sigma} - \nabla Q_1 + \rho_1 Q_1 \\
\rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} &= \frac{\alpha_2 p_2}{\rho_2^\circ} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + \kappa_2 \mathbf{f}_f (v_1 - v_2) + n\eta_{v2} + \frac{J_{12} - J_{21}}{2} \omega_{p1}^2 - J_{21} \frac{(v_{21} - v_2)^2}{2} + \\
&+ J_{12} \frac{(v_{12} - v_2)^2}{2} - J_{21} x_{2,21} - J_{12} x_{2,12} - q_{2\sigma} + \rho_2 Q_2 \\
4\pi n a^2 \frac{d_2 u_\sigma}{dt} &= q_{1\sigma} + q_{2\sigma} - J_{21} x_{\sigma,21} - J_{12} x_{\sigma,12}, \quad u_\sigma = \sigma(T_\sigma) - T_\sigma \frac{d\sigma}{dT_\sigma} \\
p_i &= p_i(\rho_i^\circ, T_i), \quad u_i = u_i(\rho_i^\circ, T_i) \quad (i = 1, 2) \quad (5.11) \\
(\alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \quad \alpha_2 = 4/3\pi n a^3, \quad \rho_i = \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i = 1, 2), \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 1)
\end{aligned}$$

Соотношения типа (1.7), (3.5), (5.2), (5.3), (5.5), (5.9) или (5.10) (с учетом (5.8)) или их обобщения вместе с уравнениями кинетики фазовых превращений (для J_{ij}) при заданных внешних воздействиях (\mathbf{F}_i, Q_i) замыкают систему уравнений (5.11) в области непрерывного движения.

Важно отметить, что если $v_{12} = v_{21}$ (наиболее вероятный случай) и приняты аккомодационные соотношения (5.10), то отпадает необходимость введения «наблюдаемых» скоростей фазовых переходов отдельно для превращений $1 \rightarrow 2$ (J_{12}) и $2 \rightarrow 1$ (J_{21}). В этом случае все эффекты фазовых превращений во всех уравнениях (5.11) можно учесть в виде слагаемых с сомножителем

$$J = J_{12} - J_{21} \quad (5.12)$$

так что эффекты двух возможных направлений фазовых переходов учитываются сменой знака в скорости результирующей реакции J .

§ 6. Аналогично (2.3) имеем обобщенную аддитивность для энтропии смеси

$$\rho s = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2 + n s_\sigma^* \quad (6.1)$$

для которой выражение субстанциональной производной (2.8), представляющей изменение энтропии смеси в фиксированном объеме только из-за взаимодействия с внешней средой и внутренних процессов, имеет вид

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho_1 \frac{d_1 s_1}{dt} + \rho_2 \frac{d_2 s_2}{dt} + n \frac{d_2 s_\sigma^*}{dt} + (J_{12} - J_{21}) (s_2 - s_1) \quad (6.2)$$

Используя соотношения Гиббса (2.5), отображающие локальное равновесие фаз и уравнения притоков тепла, входящие в систему (5.11), имеем

$$\begin{aligned}
\rho \frac{ds}{dt} &= \frac{\rho_1 Q_1}{T_1} + \frac{\rho_2 Q_2}{T_2} - \nabla \left(\frac{q_1}{T_1} \right) + q_1 \nabla \left(\frac{1}{T_1} \right) + \frac{\tau_1^{kl} e_1^{kl}}{T_1} + \mathbf{f}_f (v_1 - v_2) \left(\frac{\kappa_1}{T_1} + \frac{\kappa_2}{T_2} \right) + \\
&+ \frac{n\eta_{p1}}{T_1} + \frac{n\eta_{v1}}{T_1} + \frac{n\eta_{v2}}{T_2} + q_{1\sigma} \left(\frac{1}{T_\sigma} - \frac{1}{T_1} \right) + q_{2\sigma} \left(\frac{1}{T_\sigma} - \frac{1}{T_2} \right) + J_{21} X_{21} + J_{12} X_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{21} &= s_1 - s_2 - \frac{x_{1,21}}{T_1} - \frac{x_{2,21}}{T_2} - \frac{x_{\sigma,21}}{T_{\sigma}} + \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2T_1} - \frac{(v_{21} - v_2)^2 + w_{p1}^2}{2T_2} \\
 X_{12} &= s_2 - s_1 - \frac{x_{1,12}}{T_1} - \frac{x_{2,12}}{T_2} - \frac{x_{\sigma,12}}{T_{\sigma}} - \frac{(v_{12} - v_1)^2}{2T_1} + \frac{(v_{12} - v_2)^2 + w_{p1}^2}{2T_2} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Здесь первые три слагаемых определяют изменение энтропии за счет энергообмена с внешней средой, а остальные (всегда неотрицательные), представляющие произведения термодинамических сил на термодинамические потоки [12], определяют диссипативную функцию, показывающую производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов внутри и между фазами.

Введем обозначения

$$\theta_i = \frac{T_i - T_s(p_2)}{T_s(p_2)} \quad (i = 1, 2, \sigma), \quad \theta_{s1} = \frac{T_s(p_1) - T_s(p_2)}{T_s(p_2)} \quad (6.4)$$

где $T_s(p)$ — температура насыщения при плоской поверхности раздела фаз. В случае малых отклонений температур фаз T_i и $T_s(p_1)$ от $T_s(p_2)$ (т. е. $|\theta_i|, |\theta_{s1}| \ll 1$) и несжимаемости несущей фазы ($\rho_1^0 = \text{const}$) линеаризованные уравнения состояния составляющих имеют вид

$$\begin{aligned}
 s_1(p_1, T_1) &= s_{1s}(p_1) + c_{p1}(\theta_1 - \theta_{s1}) \\
 i_1(p_1, T_1) &= i_{1s}(p_1) + c_{p1}(\theta_1 - \theta_{s1}) T_s(p_2) \\
 s_2(p_2, T_2) &= s_{1s}(p_1) - c_{p1}\theta_{s1} + l(p_2)/T_s(p_2) + c_{p2}\theta_2 \\
 i_2(p_2, T_2) &= i_{1s}(p_1) + l(p_2) + (c_{p2}\theta_2 - c_{p1}\theta_{s1}) T_s(p_2) + (p_2 - p_1)/\rho_1
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $l(p)$ — теплота равновесного перехода $1 \rightarrow 2$ на плоской поверхности раздела фаз (в случае жидкости с пузырьками $l > 0$); c_{p1} и c_{p2} — теплоемкости фаз при постоянном давлении.

Из (6.3) и (6.5) получим линеаризованные по величинам, характеризующим неравновесность, по давлению и температурам, выражения для термодинамических сил переходов $2 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 2$

$$\begin{aligned}
 X_{21} &= \frac{1}{T_s(p_2)} \left[\frac{2\sigma}{a\rho_1^0} + x_{1,21}\theta_1 + x_{2,21}\theta_2 + x_{\sigma,21}\theta_{\sigma} \right] + \Phi_{21} \\
 X_{12} &= \frac{1}{T_s(p_2)} \left[-\frac{2\sigma}{a\rho_1^0} + x_{1,12}\theta_1 + x_{2,12}\theta_2 + x_{\sigma,12}\theta_{\sigma} \right] + \Phi_{12} \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\left(\Phi_{21} = \frac{(v_{21} - v_1)^2}{2T_1} - \frac{(v_{21} - v_2)^2 + w_{p1}^2}{2T_2}, \quad \Phi_{12} = -\frac{(v_{12} - v_1)^2}{2T_1} + \frac{(v_{12} - v_2)^2 + w_{p1}^2}{2T_2} \right)$$

Величины Φ_{21} и Φ_{12} учитывают воздействие скоростной неравновесности на фазовые переходы. В случае равновесной системы

$$\begin{aligned}
 v_1 = v_2 = v_{12} = v_{21} = w_{p1} = 0, \quad T_1 = T_2 = T_{\sigma}, \quad p_2 = p_1 + 2\sigma/a, \\
 X_{12} = X_{21} = 0 \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

следует известный факт [9] о том, что равновесная температура $T_s^a(p_2)$ переходов $2 \rightarrow 1$ на искривленной поверхности радиуса a равна

$$T_s^a(p_2) = T_s(p_2) \left[1 + \frac{2\sigma}{a\rho_1^0 l(p_2)} \right] \quad (6.8)$$

Для аккомодационных соотношений (5.9) выражения (6.6) принимают вид

$$X_{21} = -\frac{l(p_2)}{T_s(p_2)} \frac{T_2 - T_s^a(p_2)}{T_s(p_2)} + \Phi_{21}, \quad X_{12} = \frac{l(p_2)}{T_s(p_2)} \frac{T_1 - T_s^a(p_2)}{T_s(p_2)} + \Phi_{12} \quad (6.9)$$

Учитывая очевидные неравенства

$$J_{ij} \geq 0, \quad J_{ij}X_{ij} \geq 0 \quad (6.10)$$

можно рассмотреть линейные уравнения кинетики для скоростей фазовых переходов

$$J_{ij} = L_{ij} X_{ij} \quad (X_{ij} > 0), \quad J_{ij} = 0 \quad (X_{ij} \leq 0) \\ (L_{ij} \geq 0; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j) \quad (6.11)$$

В случае аккомодационных соотношений (5.10) и $v_{21} = v_{12}$ линеаризованные соотношения (6.6) для термодинамических сил имеют вид

$$X = X_{12} = -X_{21} = \frac{l(p_2)}{T_s(p_2)} \frac{T_\sigma - T_s^a(p_2)}{T_s(p_2)} + \Phi_{12} \quad (6.12)$$

а линейное уравнение кинетики (6.11) можно привести к выражению для результирующей скорости фазовых переходов

$$J = J_{12} - J_{21} = LX \quad (L > 0) \quad (6.13)$$

В большом классе задач можно пренебречь капиллярными эффектами (величинами $2\sigma/a$, u_σ^*) или по крайней мере теплоемкостью σ -фазы (величиной $4\pi na^2 d_2 u_\sigma / dt$). Тогда уравнение притока тепла поверхностной фазы переходит в конечное алгебраическое уравнение относительно T_σ , которая влияет, согласно (6.12), на скорость фазовых превращений

$$q_{1\sigma} + q_{2\sigma} - J_{21}x_{\sigma, 21} - J_{12}x_{\sigma, 12} = 0 \quad (6.14)$$

Например, в случае (5.10), учитывая (5.2), имеем

$$4\pi na^2 [\beta_1 (T_1 - T_\sigma) + \beta_2 (T_2 - T_\sigma)] - J [i_2 - i_1 - (p_2 - p_1 - 2\sigma/a) / \rho_1^0] = 0 \quad (6.15)$$

Полученные результаты можно обобщить на случай полидисперсной смеси, когда размеры включений описываются некоторой функцией распределения, на случай, когда фазы представляют собой гомогенные смеси нескольких компонент, вступающих в химические реакции.

В уравнениях, описывающих межфазовые взаимодействия (например, в (1.7), (3.5), (4.10)), можно путем некоторого усложнения учесть влияние неоднородности включений в рамках представлений регулярной «ячеичной» модели [13] и влияние сжимаемости несущей фазы на мелкомасштабное пульсационное движение.

Поступила 17 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и г м а т у л и н Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
2. И о р д а н с к и й С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3.
3. К о г а р к о Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
4. W i j n g a a r d e n L. van. On the equations of motion for mixtures of fluid and gas bubbles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, No. 3.
5. W i j n g a a r d e n L. van. Linear and non-linear dispersion of pressure pulses in liquid-bubble mixtures. Proc. «6-th Sympos. Naval Hydrodynam., Washington, D. C. 1966». Washington, D. C., 1968.
6. Б э т ч е л о р Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. стат., 1968, № 3.
7. К е д р и н с к и й В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1968, № 4.
8. С г е с р о А. Sound and Shock Waves in Liquids Containing Bubbles. Physics Fluids, 1969, vol. 12, No. 11.
9. Э п ш т е й н П. С. Курс термодинамики. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
10. Б а з а р о в И. П. Термодинамика. М., Физматгиз, 1961.
11. Л а м б Г. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
12. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды, т. I. М., «Наука», 1970.
13. Б у е в и ч Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.