Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

О НИЖНЕЙ ЧАСТИ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Н. В. Харькова

(Москва)

Приводятся условия, при которых нижняя часть спектра безмоментной задачи состоит из бесконечной серии собственных значений, сходящейся к нижней грани непрерывного спектра. Показано, что к этой части спектра применима теория пограничного слоя [1] и получено первое приближение для собственных значений.

Уравнения собственных осесимметричных колебаний тонкой упругой оболочки вращения имеют вид [2, 3]

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B(s)}\frac{dBu}{ds}\right)-\left(\frac{1-\sigma}{R_1(s)R_2(s)}\right)u+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{dw}{ds}+ \\ +\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda u \qquad (0.1)$$

$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds}-\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B}u+\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w+ \\ +\frac{h^2}{12}\frac{1}{B}\frac{d}{ds}\left(B\frac{d}{ds}\left(B\frac{dw}{ds}\right)\right)=\lambda w$$

Здесь параметр s — длина дуги меридиана срединной поверхности, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки, функция $B(s)$— расстояние от переменной точки меридиана до оси вращения. Через $u(s)$ и $w(s)$ обозначены проекции смещения точки срединной поверхности на направления меридиана и нормали к поверхности. Для главных радиусов кривизны имеем

$$R_1^{-1}=-B''(1-(B')^2)^{-1/2}, \qquad R_2^{-1}=(1-(B')^2)^{1/2}B^{-1}$$

Спектральный параметр λ пропорционален квадрату частоты колебания, малый параметр h — относительная толщина оболочки, σ — коэффициент Пуассона.

Коэффициенты уравнений (0.1) предполагаются достаточно гладкими.

Ограничим оболочку двумя параллелями $s=s_1$ и $s=s_2$ и возьмем следующие граничные условия:

$$u(s_1)=u(s_2)=w(s_1)=w(s_2)=w'(s_1)=w'(s_2)=0 \qquad (0.2)$$

Вместе с системой (0.1) будет рассматриваться безмоментная система уравнений $(h=0)$ (0.3)

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B}\frac{dBu}{ds}\right)-\left(\frac{1-\sigma}{R_1R_2}\right)u+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{dw}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda u$$

$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds}-\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B}u+\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w=\lambda w$$

с граничными условиями

$$u(s_1) = u(s_2) = 0 \tag{0.4}$$

После работ Н. А. Алумяе [4] и П. Е. Товстика [3] стало ясно, что определение асимптотическими методами частот собственных колебаний оболочки, принадлежащих отрезку изменения функции

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)} \qquad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2) \tag{0.5}$$

вызывает затруднение ввиду наличия точек поворота у системы (0.3). Обозначим отрезок изменения функции (0.5) через $[\alpha, \beta]$.

Как показано в работе В. Б. Лидского и автора [5], этот отрезок принадлежит непрерывному спектру задачи (0.3), (0.4).

В § 1 указываются условия, при которых существует бесконечная серия собственных значений краевой задачи (0.3),(0.4), сходящаяся снизу к точке α, а также условие, при котором существует бесконечная серия, сходящаяся к точке β сверху.

В моментной теории ($h \neq 0$) непрерывного спектра, а также бесконечной серии собственных значений, сходящейся к конечной точке, быть не может, но на участке $\lambda_n < \alpha$ любое конечное число собственных значений, близких к безмоментным, может быть получено при достаточно малых h.

В § 2 показано, что для собственных значений, удовлетворяющих неравенству $\lambda_n < \alpha$, справедливы асимптотические разложения по степеням $h^{1/2}$ (выполняются условия регулярности вырождения в смысле М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1]).

§ 1. Безмоментный случай. Заменим систему (0.3) одним уравнением. Для этого из второго уравнения выразим w и подставим в первое. Если λ не принадлежит области значений функции

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{R_1^2(s)} + \frac{2\sigma}{R_1(s)R_2(s)} + \frac{1}{R_2^2(s)} \tag{1.1}$$

то это всегда можно сделать. Получим

$$(\lambda - \varphi_1(s))\frac{d^2u}{ds^2} + b(s,\lambda)\frac{du}{ds} + c(s,\lambda)u = 0 \tag{1.2}$$

$$b(s,\lambda) = b_1(s)\lambda + b_2(s) + \frac{b_3(s)}{\lambda - \varphi_2(s)} \tag{1.3}$$

$$c(s,\lambda) = \lambda^2 + c_1(s)\lambda + c_2(s) + \frac{c_3(s)}{\lambda - \varphi_2(s)} \tag{1.4}$$

Здесь $b_i(s)$ и $c_i(s)$ $(i = 1, 2, 3)$— некоторые гладкие функции, не зависящие от λ. Напомним, что

$$\alpha = \inf \varphi_1(s) \qquad (s \in [s_1, s_2]) \tag{1.5}$$

Если $\lambda = \alpha$, то уравнение (1.2) становится сингулярным. Для простоты предположим, что $\inf \varphi_1(s)$ в (1.5) достигается в одной точке $s = s_0$. Пусть для определенности $s_0 \neq s_1$.

Поставим задачу Коши для уравнения (1.2) на левом конце

$$u(s_1, \lambda) = 0, \qquad u'(s_1, \lambda) = 1 \quad (\lambda < \alpha) \tag{1.6}$$

Установим сначала следующее вспомогательное предложение.

---

[1] Ранее такая серия отмечалась в случае цилиндра и сферы [6,7].

Лемма 1.1. Пусть при $\lambda = \alpha > 0$ решение $u(s, \lambda)$ задачи (1.6) для уравнения (1.2) имеет на полуинтервале $[s_1, s_0)$ бесконечное число нулей. Тогда ниже α расположено бесконечное число собственных значений задачи (0.3), (0.4).

Доказательство. Пусть N — произвольное натуральное число. Выберем δ столь малым, чтобы функция $u(s, \alpha)$ имела $N + 1$ нуль на отрезке $[s_1, s_0 - \delta]$. После этого выберем $\lambda < \alpha$ столь мало отличающимися от α, чтобы $u(s, \lambda)$ обратилась на отрезке $[s_1, s_0 - \delta)$ также $N + 1$ раз в нуль; это можно сделать в силу теоремы о непрерывной зависимости решения (1.6) от параметра λ.

Будем уменьшать λ. Заметим, что при $\lambda \to -\infty$ решение $u(s, \lambda)$ вообще не имеет нулей внутри отрезка $[s_1, s_2]$, что следует из формул (1.2) — (1.4) с учетом теоремы Штурма [1]. Поскольку нули решения (1.6) при $\lambda < \alpha$ некратны (в силу теоремы единственности) и суть непрерывные функции λ, то с уменьшением λ они проходят через точку s_2 (в s_1 они попасть не могут, так как $u(s,\lambda) \not\equiv 0$). Таким образом, существует не менее N собственных значений задачи (0.3), (0.4).

Так как N — любое, то лемма 1.1 доказана.

Замечание 1.1. Из доказательства леммы следует, что если у решения Коши при $\lambda = \alpha$ имеется N нулей на интервале (s_1, s_0), то ниже $\lambda = \alpha$ расположено по крайней мере N собственных значений.

Замечание 1.2. Аналогичную лемму можно доказать и в том случае, когда множество точек s_0 произвольно. Задачу Коши нужно ставить тогда в точке s', где $\varphi_1(s') > \alpha$.

Ниже предполагается, что $s_0 = 0$.

Лемма 1.2. Пусть в окрестности точки $s_0 = 0$ уравнение (1.2) имеет вид

$$L(s^2 + O(s^3))u'' + 2L(s + O(s^2))u' + (M + O(s))u = 0 \qquad (1.7)$$

где члены $O(s^i)$ допускают формальное дифференцирование. Тогда для того, чтобы нетривиальное решение имело бесконечное число нулей, необходимо и достаточно, чтобы

$$L^2 - 4LM < 0$$

Доказательство. Проводится аналогично [8].

Пусть теперь в окрестности точки $s = 0$ функция $B(s)$ имеет разложение Тейлора

$$B(s) = B_0 + B_1 s + {}^1/_2 B_2 s^2 + {}^1/_6 B_3 s^3 + \ldots \qquad (1.8)$$

Здесь $B_0 > 0$, $|B_1| \leqslant 1$ и всегда можно считать, что $B_1 \geqslant 0$.

Легко проверить, что функция $\varphi_1(s)$ может иметь экстремум в точке $s = 0$ либо при $B_1 = 0$, либо при $B_2 = (B_1^2 - 1) B_0^{-1}$. Первое условие, очевидно, выполняется, если $s = 0$ является стационарной точкой меридиана, второе условие при $B_1 \neq 1$ совпадает с условием $R_1 = R_2$, т. е. соответствующая точка является омбилической. Исследовав эти случаи, получим две теоремы о бесконечности нижней серии собственных значений.

---

[1] Действительно, подстановка

$$u = v \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{b(s, \lambda)}{\lambda - \varphi_1(s)}\, ds\right)$$

приводит к двучленному уравнению

$$v'' + p(s, \lambda)v = 0, \qquad p(s, \lambda) = \lambda + O(1) < 0$$

Теорема 1.1. Пусть в разложении (1.8)

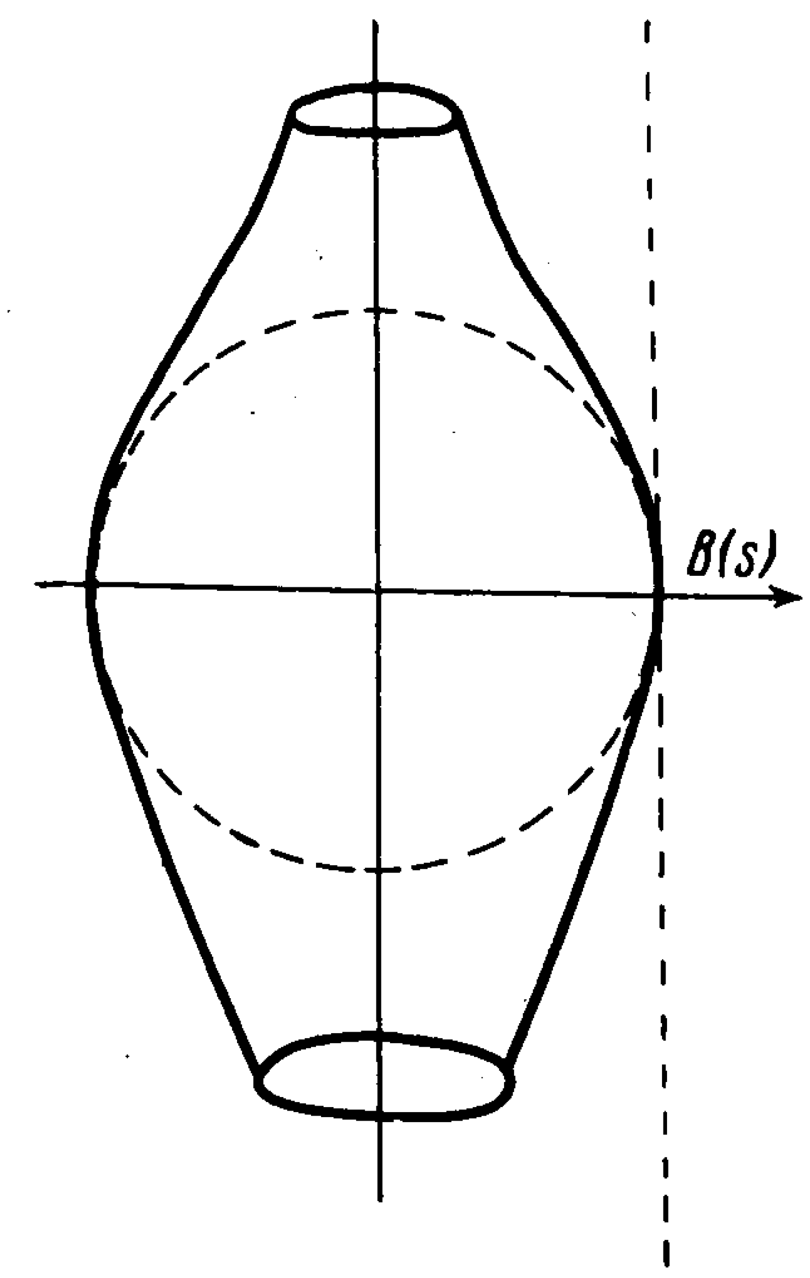
$$B_1 = 0, \qquad -1 \leqslant B_0B_2 \leqslant 0 \tag{1.9}$$

$$4\sigma^2 - (12\sigma - 1)B_0B_2 + 9\,(B_0B_2)^2 > 0$$

и пусть функция $\varphi_1(s)$ при $s = 0$ имеет минимум, который является абсолютным: $\varphi_1(0) = \alpha > 0$, тогда существует бесконечная серия собственных значений задачи (0.3), (0.4), сходящаяся снизу к точке α.

Замечание 1.3. Второе условие в (1.9) геометрически означает, что функция $B(s)$ имеет максимум в точке $s = 0$ и радиус окружности, соприкасающейся к меридиану в этой точке, не меньше расстояния до оси вращения (фигура). Сфера и цилиндр являются двумя крайними случаями такой оболочки, для них B_0B_2 равно соответственно —1 и 0.

Замечание 1.4. При $\sigma > {}^1/_{24}$ третье условие (1.9) выполнено, как только выполнены первые два.



Фиг. 1

Доказательство теоремы 1.1. Непосредственной выкладкой можно проверить, что если $B_0B_2 \neq 0, -1$, то в окрестности точки $s = 0$ при $\lambda = \alpha$ уравнение (1.2) имеет вид (1.7) и

$$L = -\,[(B_0B_2)^2 + B_0B_2], \qquad M = [2\,(B_0B_2)^2 - 3\sigma B_0B_2 + \sigma^2]$$

Остается лишь применить леммы 1.2 и 1.1. Если B_0B_2 равно 0 или —1, то $L = 0$ и доказательство становится сложнее. Соответствующее исследование здесь опускается.

Теорема 1.2. Пусть $0 < B_1 < 1$ в разложении (1.8) и

$$B_2 = (B_1^2 - 1)B_0^{-1}, \qquad B_3 \leqslant B_1\,(B_1^2 - 1)B_0^{-2}$$

Пусть функция $\varphi_1(s)$ при $s = 0$ имеет минимум, который является абсолютным, $\varphi_1(0) = \alpha > 0$. Тогда существует бесконечная серия собственных значений, сходящаяся снизу к точке α.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1. В окрестности точки $s = 0$ при $\lambda = \alpha$ уравнение (1.2) имеет вид (1.7) с

$$L = -B_1B_3B_0^{-2} - B_1^2\,(1 - B_1^2)\,B_0^{-4} \tag{1.10}$$
$$M = L + (2 + 3\sigma + \sigma^2)\,(1 - B_1^2)^2B_0^{-4}$$

Если $L \neq 0$, то, применив леммы 1.2 и 1.1, получим утверждение теоремы. В случае $L = 0$ проводится дополнительное исследование, которое здесь опущено.

Замечание 1.5. Если функция $\varphi_1(s)$ достигает минимума на границе с отличной от нуля производной, то аналогичными методами можно показать, что бесконечного числа нулей у решения соответствующего сингулярного уравнения быть не может. Из теоремы 1.2 (см. [5]) следует, что тогда и собственных значений, лежащих ниже α, может быть лишь конечное число.

Замечание 1.6. Анализ уравнений, получающихся для $\lambda = \beta = \sup\varphi_1(s)$ показывает, что бесконечное число нулей у нетривиального решения бывает лишь в том случае, когда точка s_0 с $\varphi_1(s_0) = \beta$ является омбилической и $-3L-4M < 0$ (L и M те же, что и в формулах (1.10)). Если $\inf \varphi_2(s) > \sup \varphi_1(s)$, то это условие достаточно для существования бесконечной серии собственных значений задачи (0.3), (0.4), сходящейся сверху к точке β.

§ 2. **Приближение собственных значений и собственных функций моментной задачи.** Для отыскания собственных значений моментной задачи $\lambda_k < \alpha$ может быть применен асимптотический метод Л. А. Люстерника и М. И. Вишика [1]. При доказательстве существенно используется теорема 13 из [1]. Отметим только изменения, которые следует внести в доказательство в связи с тем, что рассматривается система, а не одно уравнение. Чтобы не загромождать изложение, ограничимся лишь первым приближением для собственных чисел и собственных векторов.

Перепишем систему (0.1) в виде

$$\begin{gathered}-u'' + a_1u' + a_0u + b_1w' + b_0w = \lambda u \\ c_1u' + c_0u + d_0w + \varepsilon^4(w^{\mathrm{IV}} + d_3w''' + d_2w'' + d_1w') = \lambda w, \qquad \varepsilon^4 = {}^1/_{12}\, h^2\end{gathered} \tag{2.1}$$

Левыми частями уравнений (0.3) и (2.1) задаются линейные операторы L_0 и $L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon^4 L_1$, которые естественно рассматривать в пространстве пар функций $f = (u, w)$, где скалярное произведение вводится по формуле

$$(f_1, f_2) = \int_{s_1}^{s_2} (u_1\bar{u}_2 + w_1\bar{w}_2)\, B ds$$

Нетрудно проверить, что оператор L_0 будет симметричным и положительно определенным при граничных условиях (0.4), а оператор L_ε — при граничных условиях (0.2). Их замыкания обозначаются теми же буквами.

Пусть $s_1 = 0$ и в окрестности точки 0 все коэффициенты (2.1) разложены в ряды Тейлора, например:

$$a_1(s) = a_1^\circ + a_1^1 s + a_1^2 s^2 + \ldots$$

Положим

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots$$

Перенесем в (2.1) все члены налево, сделаем замену переменной $s = \varepsilon t$ и заметим, что удобнее считать неизвестной функцией не u, а $\varepsilon^{-1}u$. Упорядочив члены по степеням ε, получим

$$\varepsilon^{-1} \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i M_i^1(\varepsilon^{-1}u, w) + \varepsilon^2 M_3^1(\varepsilon^{-1}u, w) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i M_i^2(\varepsilon^{-1}u, w) + \varepsilon^3 M_3^2(\varepsilon^{-1}u, w) = 0$$

Левая часть этих формул дает разбиение оператора $L_\varepsilon - \lambda_\varepsilon I$ в окрестности точки $s = 0$, которое играет ту же роль, что и (2.9) из [1].

Здесь операторы M_0^1 и M_0^2 с постоянными коэффициентами

$$M_0^1(\varepsilon^{-1}u, w) = -(\varepsilon^{-1}u)_t'' + b_1^\circ w_t'$$

$$M_0^2(\varepsilon^{-1}u, w) = -b_1^\circ(\varepsilon^{-1}u)_t' + d_0^\circ w + w_t^{\mathrm{IV}} - \lambda_0 w$$

Коэффициентами операторов M_i^1 и M_i^2 ($i = 1, 2$) служат многочлены степени не выше i, а коэффициенты операторов M_3^1 и M_3^2 — многочлены третьей степени, умноженные на ограниченные функции. Система

$$M_0^1(\varepsilon^{-1}u, w) = 0, \qquad M_0^2(\varepsilon^{-1}u, w) = 0$$

имеет при $\lambda < (1 - \sigma^2) R_2^{-2}(0)$ следующие решения:

$$z_i^\circ = (u_i^\circ, w_i^\circ), \qquad \varepsilon^{-1}u_i^\circ = b_1^\circ \rho_i^{-1} e^{\rho i t}, \qquad w_i^\circ = e^{\rho i t}, \qquad t = s / \varepsilon \tag{2.2}$$

где ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$)— корни четвертой степени из

$$(\lambda_0 - (1 - \sigma^2) R_2^{-2}(0))$$

Еще два решения этой системы получаются при $\rho_5 = \rho_6 = 0$. Два корня ρ_1 и ρ_2 лежат в левой полуплоскости, поэтому вырождение регулярно в смысле [1].

Аналогичное разбиение оператора можно построить на правом конце и убедиться, что правый конец также регулярен.

Первое приближение для собственных функций ищется в виде

$$f_\varepsilon^1 = f_0 + \varepsilon f_{10} + z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \varepsilon^3\alpha_3$$

Здесь векторы f_0 и f_{10} — решения вырожденной системы, $z_i = (u_i, w_i)$ — решения типа пограничного слоя и α_i — поправки. Эти векторы строятся следующим образом. В выражении

$$L_\varepsilon f_\varepsilon^1 - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) f_\varepsilon^1 \tag{2.3}$$

приравняем нулю члены при младших степенях ε. Получим пять систем уравнений

$$L_0 f_0 - \lambda_0 f_0 = 0 \tag{2.4}$$

$$M_0^1(\varepsilon^{-1}u_1, w_1) = 0, \qquad M_0^2(\varepsilon^{-1}u_1, w_1) = 0 \tag{2.5}$$

$$(L_0 - \lambda_0) f_{10} - \lambda_1 f_0 = \lambda_0\alpha_1 - L_0\alpha_1 \tag{2.6}$$

$$M_0^1(\varepsilon^{-1}u_2, w_2) = -M_1^1(\varepsilon^{-1}u_1, w_1), \quad M_0^2(\varepsilon^{-1}u_2, w_2) = -M_1^2(\varepsilon^{-1}u_1, w_1) \tag{2.7}$$

$$M_0^1(\varepsilon^{-1}u_3, w_3) = -M_1^1(\varepsilon^{-1}u_2, w_2) - M_2^1(\varepsilon^{-1}u_1, w_1) \tag{2.8}$$

$$M_0^2(\varepsilon^{-1}u_3, w_3) = -M_1^2(\varepsilon^{-1}u_2, w_2) - M_2^2(\varepsilon^{-1}u_1, w_1)$$

Вектор f_0 будет решением вырожденной системы (2.4) при граничных условиях (0.4). Вектор $z_1 = (u_1, w_1)$ в окрестности точки 0 отыскивается в виде линейной комбинации решений z_1° и z_2° (2.2) так, чтобы сумма $f_0 + z_1$ удовлетворяла на левом конце граничным условиям на компоненту w из (0.2).

Аналогично найдем вектор z_1 в окрестности правого конца и склеим их так же, как в [1] при помощи бесконечно дифференцируемых срезающих функций. Поправку α_1 найдем в виде $\alpha_1 = (\alpha_{1u}, 0)$, где α_{1u} — многочлен нулевой степени такой, что сумма $f_0 + z_1 + \varepsilon\alpha_1$ удовлетворяет всем граничным условиям (0.2) на левом конце. Затем построим поправку на правом конце и склеим их.

После этого найдем решение f_{10} системы (2.6), удовлетворяющее граничным условиям (0.4). Это решение существует ([1], стр. 110, замечание *в*), если

$$\lambda_1 = -(\lambda_0\alpha_1 - L_0\alpha_1, f_0) \tag{2.9}$$

Можно найти такое решение z_2 системы (2.7), что его компоненты суть произведения многочленов первой степени по t на экспоненты пограничного слоя (2.2) и вектор z_2 таков, что $f_{10} + z_2$ удовлетворяет условиям на w из (0.2) на левом конце. Далее так же, как и z_1, вектор z_2 склеивается на двух концах и находится поправка α_2.

Векторы z_3 и α_3 ищутся аналогично z_2 и α_2 с той лишь разницей, что z_3 должен удовлетворять граничным условиям на w из (0.2).

Если теперь подставить найденные векторы в выражение (2.3), то получится

$$L_3 f_\varepsilon^1 - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) f_\varepsilon^1 = \varepsilon^2(-\lambda_1 f_{10} + (L_0 - \lambda_0 I)\alpha_2 - \lambda_1\alpha_1 + Z) + \varepsilon^3 Y \tag{2.10}$$

Вектор Z имеет в окрестности левого конца компоненты

$$Z_u = M_1^1(z_3) + M_2^1(z_2) + M_3^1(z_1), \qquad Z_w = 0$$

Норма вектора Y ограничена: $\|Y\| \leqslant M$. В этом можно убедиться, записав все члены, входящие в Y. Обозначим еще

$$\| -\lambda_1 f_{10} + (L_0 - \lambda_0 I)\alpha_2 - \lambda_1\alpha_1 + Z \| = N$$

Тогда для малых ε из (2.10) следует

$$\| L_\varepsilon f_\varepsilon^1 - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) f_\varepsilon^1 \| \leqslant \varepsilon^2 2N \tag{2.11}$$

И далее, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 13 из [1], получаем следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть в пространстве пар функций (u, w) определены операторы L_0 при помощи (0.3) и (0.4) и $L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon^4 L_1$ при помощи (2.1) и (0.2) и пусть λ_0 — собственное значение оператора L_0 такое, что

$$\lambda_0 < \alpha = \inf (1 - \sigma^2) R_2^{-2}(s)$$

Тогда существует собственное значение λ_ε оператора L_ε с асимптотическим представлением

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

и соответствующая собственная функция вида

$$f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_{10} + z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \varepsilon^3\alpha_3 + \varepsilon^2 y_2$$

Здесь члены f_0, f_{10}, z_i и α_i строятся, как было описано. Вектор y_2 имеет ограниченную норму: $\| y_2 \| = O(1)$. Для λ_1 справедлива следующая формула [1]:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}\, B(s_1)\, w_0^2(s_1) \left(\frac{1 - \sigma^2}{R_2^2(s_1)} - \lambda_0 \right)^{3/4} + \\ + \sqrt{2}\, B(s_2)\, w_0^2(s_2) \left(\frac{1 - \sigma^2}{R_2^2(s_2)} - \lambda_0 \right)^{3/4}$$

где $w_0(s)$ — компонента вектора f_0.

Разность $\lambda_\varepsilon - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ допускает при малых ε оценку

$$| \lambda_\varepsilon - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) | < \varepsilon^2 3N$$

Формула для λ_1 получается непосредственно из (2.9). Последняя оценка следует из (2.11) и следующей оценки ([1], стр. 114):

$$| \lambda_\varepsilon - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) | < \varepsilon^2 \frac{\| g \|}{\| f_\varepsilon^1 \|}, \qquad g = \varepsilon^{-2} (L_\varepsilon f_\varepsilon^1 - (\lambda_0 + \lambda_1\varepsilon) f_\varepsilon^1)$$

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера, по инициативе которого велось данное исследование, и В. Б. Лидского за руководство и советы.

Поступила 13 VIII 1970

[1] После того, как статья была подготовлена к печати, автору стало известно, что аналогичную формулу независимо вывел П. Е. Товстик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
3. Товстик П. Е. Интегралы уравнений осесимметричных колебаний оболочки вращения. Сб. «Исследования по упругости и пластичности», Л., Изд-во ЛГУ, 1965, № 4.
4. Алумяе Н. А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. Изв. АН ЭССР, 1960, т. 9, № 1.
5. Лидский В. Б., Харькова Н. В. Спектр системы безмоментных уравнений в случае осесимметричных колебаний оболочки вращения. Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 4.
6. Товстик П. Е. Свободные колебания тонкого сферического купола. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6.
7. Лужин О. В. К определению частот колебаний безмоментного сферического купола. Сб. «Исследования по теории сооружений», М., Гостехиздат, 1961, вып. 10.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. 2. М., Физматгиз, 1961.