Прикладная математика и механика. Том 35, 1971

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ УПРУГОГО ПОЛЯ

Т. Д. Шермергор

(Москва)

При помощи уравнений равновесия и совместности находятся дифференциальные уравнения, связывающие алгебраически независимые компоненты бинарных корреляционных тензорных функций статистически однородного и изотропного упругого поля. Рассмотрены случаи бивихревого поля для тензора напряжений и потенциального для тензора деформаций. Найдены также соответствующие соотношения для корреляционных тензоров полей кривизны и векторов углов поворота. В последнем случае уравнение по форме аналогично соотношению Кармана из статистической гидродинамики.

1. Корреляционные функции напряжений и деформаций представляют собой тензоры четвертого ранга. В отличие от тензора четвертого ранга упругих модулей, имеющего в изотропной среде две независимые компоненты, корреляционный тензор четвертого ранга определяется пятью алгебраическими функциями. Необходимость введения пяти различных функций вытекает из аксиальной симметрии задачи, поскольку в изотропном пространстве появляется выделенная ось, проходящая через точки, между которыми устанавливаются корреляционные связи.

Будем рассматривать статистически однородную среду. Бинарные корреляционные функции тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} такой среды определяются соотношениями

$$S_{ijkl}(\mathbf{r}) \equiv \langle \sigma_{ij}^\circ(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\, \sigma_{kl}^\circ(\mathbf{r}_1)\rangle, \qquad E_{ijkl}(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\, \varepsilon_{kl}^\circ(\mathbf{r}_1)\rangle \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(\mathbf{r}) - \langle \sigma_{ij}(\mathbf{r})\rangle, \qquad \varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) - \langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\rangle \tag{1.2}$$

Здесь угловые скобки означают статистическое осреднение, а кружочками отмечены случайные составляющие соответствующих величин.

Для статистически изотропной среды корреляционные тензоры напряжений и деформаций могут быть представлены в виде [1]

$$S_{ijkl}(\mathbf{r}) = S_\alpha(r)\, J_{ijkl}^\alpha, \qquad E_{ijkl}(\mathbf{r}) = E_\alpha(r)\, J_{ijkl}^\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, 5 \tag{1.3}$$

$$J_{ijkl}^1 = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad J_{ijkl}^2 = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \quad J_{ijkl}^3 = \delta_{ij}n_{kl} + \delta_{kl}n_{ij}$$
$$J_{ijkl}^4 = \delta_{ik}n_{jl} + \delta_{jl}n_{ik} + \delta_{il}n_{jk} + \delta_{jk}n_{il}, \qquad J_{ijkl}^5 = n_{ijkl} \tag{1.4}$$
$$n_{ij\cdot\cdot m} = n_i n_j \cdot\cdot n_m, \qquad n_i = x_i / r$$

Здесь по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование, а координаты точек, между которыми устанавливается корреляционная связь, равны 0 и x_i.

Из выражений (1.3) и (1.4) видно, что при $r \to 0$ для $\alpha = 3,4,5$ функции $S_\alpha(r)$ и $E_\alpha(r)$ обращаются в нуль. В другом предельном случае больших расстояний все компоненты корреляционных тензоров напряжений и деформаций асимптотически убывают, если в расположении элементов неоднородностей отсутствует дальний порядок.

2. Связи между компонентами корреляционного тензора существенно зависят от того, является ли исследуемое поле потенциальным или бивихревым. Как показал Крёнер [2], любое поле тензора второго ранга $\mathbf{T}$ может быть разложено на потенциальное $\mathbf{T}_1$ и бивихревое $\mathbf{T}_2$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2, \qquad \operatorname{Rot} \mathbf{T}_1 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{T}_2 = 0 \tag{2.1}$$

причем потенциальное поле описывается векторным потенциалом, а бивихревое — тензорным

$$\mathbf{T}_1 = \operatorname{def} \varphi, \qquad \mathbf{T}_2 = \operatorname{Rot} \Phi, \qquad \operatorname{div} \Phi = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{def}_i \varphi_k \equiv \varphi_{(k,\, i)}, \qquad \operatorname{Rot}_{ijkl} \equiv e_{ink} e_{jml} \nabla_n \nabla_m \tag{2.3}$$

Здесь индекс, стоящий после запятой, означает дифференцирование по соответствующей координате, по индексам, заключенным в скобки, проводится симметризация, а через e_{ink} обозначен единичный антисимметричный тензор.

Принимая во внимание равенства

$$\varepsilon_{ik} = u_{(k,\, i)}, \qquad \sigma_{ij,\, j} = 0 \tag{2.4}$$

первое из которых представляет собой условие малости деформаций, а второе — уравнение равновесия в отсутствие объемных сил, находим, что поле деформаций потенциальное, причем вектор смещения $\mathbf{u}$ может рассматриваться как его потенциал. Напротив, поле напряжений в отсутствие объемных сил будет бивихревым.

Поэтому несмотря на идентичность тензорного представления корреляционных полей напряжений и деформаций, следует ожидать различия в виде искомых связей между компонентами соответствующих корреляционных тензоров.

3. Найдем вначале связи между компонентами корреляционного тензора напряжений. Будем считать, что в поле напряжений отсутствует потенциальная составляющая и оно чисто бивихревое. Тогда, принимая для определенности $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = n$ и переходя от тензорных индексов к матричным, при помощи первого из равенств (1.3) находим

$$\begin{aligned} S_{ijkl} = S_{12} J^1_{ijkl} + S_{66} J^2_{ijkl} + (S_{13} - S_{12}) J^3_{ijkl} + \\ + (S_{44} - S_{66}) J^4_{ijkl} + (S_{11} + S_{33} - 2S_{13} - 4S_{44}) J^5_{ijkl} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Из шести компонент корреляционного тензора напряжений, входящих в правую часть равенства (3.1), лишь пять будут алгебраически независимыми, поскольку из аксиальной симметрии следует соотношение

$$S_{66} = {}^1/_2\, (S_{11} - S_{12}) \tag{3.2}$$

Используя равенства (1.1) и (2.4), находим, что для бивихревого поля должно выполняться условие

$$S_{ijkl,j} = 0 \tag{3.3}$$

Подставляя (3.1) в (3.3), получаем уравнение

$$A_1 n_i \delta_{kl} + A_2 (n_l \delta_{ik} + n_k \delta_{il}) + A_3 n_{ikl} = 0 \tag{3.4}$$

$$A_1 \equiv S_{13}' + \frac{2}{r}(S_{13} + S_{44} - S_{12} - S_{66}),$$

$$A_2 \equiv S_{44}' + \frac{1}{r}(3S_{44} + S_{13} - S_{12} - 3S_{66})$$

$$A_3 \equiv S_{33}' - S_{13}' - 2S_{44}' + \frac{2}{r}(2S_{11} + S_{33} - 3S_{13} - 6S_{44}) \tag{3.5}$$

Здесь штрихом обозначена производная по скалярному аргументу. Придавая тензорным индексам в уравнениях (3.4) различные значения, убеждаемся, что каждый из коэффициентов A_α должен быть равен нулю. Таким образом, находим три дифференциальных уравнения, которые связывают пять алгебраически независимых компонентов матрицы S_{pq}

$$\begin{gathered} rS_{13}' + 2(S_{13} + S_{44} - S_{12} - S_{66}) = 0 \\ rS_{33}' + 2(S_{33} - S_{13} - 2S_{44}) = 0 \\ rS_{44}' + 3S_{44} + S_{13} - S_{12} - 3S_{66} = 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Соотношения типа (3.6) были впервые получены В. А. Ломакиным [1]; однако в численных расчетах им была допущена ошибка, в результате чего в окончательных уравнениях некоторые слагаемые оказались опущенными.

4. Для нахождения связей между компонентами корреляционного тензора деформаций воспользуемся первым из равенств (2.4). Это дает [3]

$$E_{ijkl} = -\nabla_{(i} U_{j)(k,l)}, \qquad U_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \langle u_i^\circ (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) u_j^\circ (\mathbf{r}_1)\rangle \tag{4.1}$$

где U_{ij} — корреляционный тензор векторов смещений. Последний может быть представлен в виде

$$U_{ij} = U_1 \delta_{ij} + U_2 n_{ij} \tag{4.2}$$

Подставляя выражение (4.2) в первое из равенств (4.1), находим

$$\begin{aligned} r^2 E_{ijkl} = & -U_2 J_{ijkl}^1 - {}^1/_2 (U_2 + rU_1') J_{ijkl}^2 + (2U_2 - rU_2') J_{ijkl}^3 + \\ & + {}^1/_4 (6U_2 - 3rU_2' + rU_1' - r^2 U_1'') J_{ijkl}^4 - (8U_2 - 5rU_2' + r^2 U_2'') J_{ijkl}^5 \end{aligned} \tag{4.3}$$

С другой стороны, используя второе из равенств (1.3), можно представить корреляционный тензор деформаций через его матричные компоненты

$$\begin{aligned} E_{ijkl} = & E_{12} J_{ijkl}^1 + {}^1/_4 E_{66} J_{ijkl}^2 + (E_{13} - E_{12}) J_{ijkl}^3 + \\ & + {}^1/_4 (E_{44} - E_{66}) J_{ijkl}^4 + (E_{11} + E_{33} - 2E_{13} - E_{44}) J_{ijkl}^5 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь при переходе от тензорных к матричным обозначениям введены числовые коэффициенты [4] в соответствии с правилом $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}$, $\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$.

Поэтому вместо соотношения (3.2) теперь имеем

$$E_{66} = 2\,(E_{11} - E_{12}) \tag{4.5}$$

Из сопоставления (4.3) и (4.4) получаем систему уравнений

$$r^2E_{12} = -\,U_2, \quad r^2E_{66} = -\,2\,(U_2 + rU_1'), \quad r^2\,(E_{13} - E_{12}) = 2U_2 - rU_2'$$
$$r^2\,(E_{44} - E_{66}) = 6U_2 - 3rU_2' + rU_1' - r^2U_1'' \tag{4.6}$$
$$r^2\,(E_{11} + E_{33} - 2E_{13} - E_{44}) = -\,8U_2 + 5rU_2' + r^2U_2''$$

Искомые соотношения между компонентами корреляционной матрицы поля деформаций получаем отсюда, исключив вспомогательные функции U_1 и U_2

$$rE_{11}' + 2E_{11} - 3E_{12} + E_{13} - E_{44} = 0, \quad rE_{12}' + E_{12} - E_{13} = 0 \tag{4.7}$$
$$rE_{13}' - E_{11} + 3E_{12} - E_{13} - E_{33} + E_{44} = 0$$

Соотношения (3.6) и (4.7) определяют связи между компонентами бинарных корреляционных тензоров полей напряжений и деформаций. Их сопоставление показывает, что в первом случае в качестве двух независимых компонент удобно выбрать S_{13} и S_{33}, тогда как во втором — E_{11} и E_{12}. При таком выборе остальные компоненты корреляционных тензоров могут быть выражены через две базовые компоненты при помощи дифференциальных операторов. Проводя вычисления, находим

$$8S_{11} = (R + 2)\,(R + 4)S_{33}, \quad 4S_{44} = (R + 2)S_{33} - 2S_{13}$$
$$8S_{12} = 8\,(R + 1)S_{13} - R\,(R + 2)\,S_{33} \tag{4.8}$$

$$E_{33} = (R + 1)E_{11} + R\,(R + 1)E_{12}, \quad E_{44} = (R + 2)\,E_{11} + (R - 2)E_{12}$$
$$E_{13} = (R + 1)E_{12}, \quad R \equiv r\frac{d}{dr} \tag{4.9}$$

Полученные соотношения (3.6) и (4.7) или эквивалентные им равенства (4.8) и (4.9) выражают связи между компонентами корреляционных тензоров чисто бивихревого и потенциального полей. Если же случайное поле тензора второго ранга смешанное, то для использования полученных соотношений оно предварительно должно быть разложено при помощи равенств (2.1) и (2.2) на потенциальную и бивихревую составляющие.

5. Наряду с корреляционными тензорами напряжений и деформаций обычно вычисляют и корреляционный тензор углов поворота. Последний особенно удобен для оценки относительной разориентации зерен при деформировании микронеоднородных сред. Между компонентами этого тензора также может быть установлена связь. Определяя вектор поворота $\boldsymbol{\omega}$ как половину ротора смещения [5], получим

$$\Omega_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \langle \omega_i{}^\circ(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)\,\omega_j{}^\circ(\mathbf{r}_1)\rangle, \quad \boldsymbol{\omega} = {}^1/_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \tag{5.1}$$

$$\Omega = {}^1/_4\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{U}, \quad \mathrm{div}\,\Omega = 0 \tag{5.2}$$

Представляя тензор Ω_{ij} в виде

$$\Omega_{ij} = \Omega_{11}\delta_{ij} + (\Omega_{33} - \Omega_{11})n_{ij} \tag{5.3}$$

и используя второе из равенств (5.2), находим связь между компонентами корреляционного тензора углов поворота

$$r\Omega_{33}' + 2(\Omega_{33} - \Omega_{11}) = 0, \qquad \Omega_{11} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(r^2\Omega_{33}) \tag{5.4}$$

Здесь в отличие от соответствующих соотношений для полей напряжений и деформаций используется тензорная запись компонент.

Равенства (5.4) по форме аналогичны соотношениям Кармана между компонентами корреляционного тензора поля скоростей, полученных с учетом уравнения непрерывности [6].

6. Производная от вектора угла поворота по координате представляет собой тензор кривизны [5]. Его корреляционная функция может быть использована для оценки изгибов зерен микронеоднородной среды при однородной макродеформации. Корреляционный тензор кривизны определим соотношениями

$$\Gamma_{ijkl}(\mathbf{r}) \equiv \langle \gamma_{ij}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\gamma_{kl}(\mathbf{r}_1)\rangle, \qquad \gamma_{ij} \equiv \omega_{i,j} \tag{6.1}$$

$$\Gamma_{ijkl} = -\Omega_{ik,jl} \equiv -\theta_{ikjl} \tag{6.2}$$

Тензор θ_{ikjl} не обладает симметрией относительно перестановки пары индексов; в то же время перестановка индексов внутри каждой пары сохраняет его неизменным

$$\theta_{ikjl} = \theta_{kijl} = \theta_{iklj} \neq \theta_{ljik}$$

Тензор θ_{ikjl} позволяет перейти к стандартным матричным обозначениям, а тензор Γ_{ijkl} — нет ($\Gamma_{1313} \neq \Gamma_{3131}$), поэтому ниже устанавливаются связи между компонентами θ_{ikjl}.

Переход от θ_{ikjl} к Γ_{ijkl} может быть легко проведен при помощи определения (6.2)

Явный вид тензора θ_{ikjl} получим, подставляя в (6.2) значение Ω_{ik} согласно (5.3)

$$\begin{gathered}r^2\theta_{ikjl} = r\Omega_1'\delta_{ik}\delta_{jl} + \Omega_2(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + r(r\Omega_1'' - \Omega_1')\delta_{ik}n_{jl} + \\ + (r\Omega_2' - 2\Omega_2)(\delta_{kl}n_{ij} + \delta_{ij}n_{kl} + \delta_{il}n_{jk} + \delta_{jk}n_{il} + \delta_{jl}n_{ik}) + \\ + (r^2\Omega_2'' - 5r\Omega_2' + 8\Omega_2)n_{ijkl}\end{gathered} \tag{6.3}$$

$$\Omega_1 \equiv \Omega_{11}, \qquad \Omega_2 \equiv \Omega_{33} - \Omega_{11} \tag{6.4}$$

Из равенства (6.3) следует, что хотя тензоры θ_{ikjl} и Γ_{ijkl} и не обладают аксиальной симметрией, они также характеризуются пятью алгебраически независимыми компонентами. Вводя матричные индексы, находим семь различных компонент тензора θ_{ikjl} и два алгебраических соотношения между ними

$$\begin{gathered}\theta_{11} = 2\Omega_2 + r\Omega_1', \qquad \theta_{12} = r\Omega_1', \qquad \theta_{13} = r^2\Omega_1'' \\ \theta_{31} = r(\Omega_1' + \Omega_2') - 2\Omega_2, \ \theta_{33} = r^2(\Omega_1'' + \Omega_2'') \\ \theta_{44} = r\Omega_2' - \Omega_2, \ \theta_{66} = \Omega_2,\end{gathered} \tag{6.5}$$

$$\theta_{66} = {}^1/_2(\theta_{11} - \theta_{12}), \ \theta_{31} = \theta_{44} + \theta_{66} - \theta_{12} \tag{6.6}$$

Первое из равенств (6.6) имеет место для всех систем гексагональной сингонии, тогда как второе отражает условие $\theta_{13} \neq \theta_{31}$.

Исключая из выражений (6.5) вспомогательные функции Ω_1 и Ω_2, находим три дифференциальных уравнения, связывающих компоненты тензора θ_{ikjl}

$$r\theta_{11}' = \theta_{11} + \theta_{12} + 2\theta_{44}, \quad r\theta_{12}' = \theta_{12} + \theta_{13}, \quad r\theta_{44}' = {}^1/_2(\theta_{33} - \theta_{12}) \quad (6.7)$$

Отсюда, выбирая в качестве независимых функций θ_{11} и θ_{12}, выражаем через них остальные компоненты тензора θ_{ikjl}

$$\begin{gathered}\theta_{13} = (R-1)\theta_{12}, \qquad \theta_{31} = {}^1/_2 R\theta_{11} = 2\theta_{12} \\ \theta_{33} = (R-1)(R\theta_{11} - \theta_{12}), \qquad 2\theta_{44} = (R-1)\,\theta_{11} - \theta_{12}\end{gathered} \quad (6.8)$$

Соотношения (6.7) и (6.8) при помощи определения (6.2) легко записываются непосредственно относительно компонент корреляционного тензора кривизны Γ_{ijkl}. Однако, при этом поскольку $\Gamma_{ijkl} \neq \Gamma_{jilk}$, необходимо пользоваться тензорными индексами.

Поступила 12 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
2. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin — Göttingen — Heidelberg. Springer — Verlag, 1958.
3. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Корреляционные функции упругого поля квазиизотропных твердых тел. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., «Мир», 1967.
5. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.